بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

وجود جواب‌های ماکسیمال و مینیمال معادلات دیفرانسیل هیبرید کسری از مرتبه توزیعی

پژوهشگر

حسین نوروزی

استادان راهنما

دکتر محمد شفیع دهاقین و دکتر علیرضا انصاری

استاد مشاور

دکتر حمید شایان پور

مرداد ۱۳۹۱

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است،
به پاس قلب های بزرگشان، که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید،
و به پاس ایثار و محبت های بی دریغشان، که هرگز فروکش نمی کند،
این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می کنم.

اولین چکه ناودان بلند یک احساس را، در قالب کلامی از جنس تنفس با غنچه های معصوم یاس، به روی حجم سپید یک برگه می ریزم و آن را به لهجه های همه ی پروانه صفت های این گیتی بی انتها به آستان نیلوفری دل های زلال هدیه می کنم :

ای یزدان پاک تو را سپاس می گویم،

که به حکمت بی انتهایت مرا یاری کردی،

و به رحمت نعمت هایت را بر من تمام کردی،

خانواده ای خوب به من عطا کردی که در هر حال پشتیبانی ام کنند و استادانی سر راهم نهادی تا دانش و علمشان را بی ریا در اختیارم بگذارند.

بر خود لازم می دانم از همه عزیزانی که در جهت به سرانجام رساندن این مجموعه مرا یاری نمودند، قدردانی نمایم. مراتب قدردانی و سپاس خود را از زحمات بی دریغ استادان راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر محمد شفیع دهاقین و جناب آقای دکتر علیرضا انصاری ابراز می نمایم، که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید. از استاد گرانقدر، دکتر حمید شایان پور، که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. همچنین از جناب آقای مهندس مجید یمانی منش که لطف ایشان رهگشای تحصیلات من بود، با تمام وجود تشکر و قدردانی می کنم.

با آرزوی موفقیت برای تمام عزیزان

حسین نوروزی

مرداد ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان‌نامه، معادلات دیفرانسیل هیبرید که توسط دهاگ [۱] و لاکشمیکانتام [۲] در سال ۲۰۱۰ مطرح شد، را مورد بررسی قرار داده و نتایج وجودی و برخی نامساوی‌های اساسی و همچنین وجود جواب‌های ماکسیمال و مینیمال را برای این معادلات بیان می‌کنیم. سپس نظریه معادلات دیفرانسیل هیبرید کسری که دربردارنده عملگر دیفرانسیلی ریمان-لیوویل از مرتبه $1 < q < 2$ است، را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. قضیه وجودی برای معادلات دیفرانسیل هیبرید کسری را تحت ترکیب شرایط لیپ شیتس و کاراتئودوری ثابت می کنیم و برخی نامساوی‌های اساسی که برای اثبات وجودی جواب‌های اکسترمالی استفاده می‌شود، را اثبات می‌کنیم. همچنین ما اصل مقایسه را اثبات می‌کنیم که برای مطالعه بیشتر رفتار کیفی جواب ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. در ادامه معادلات دیفرانسیل هیبرید کسری از مرتبه توزیعی وابسته به یک تابع چگالی نامنفی را معرفی می‌کنیم و وجود جواب، نامساوی‌های دیفرانسیلی، وجود جواب‌های اکسترمال و قضایای مقایسه را برای آن‌ها اثبات می‌کنیم.

رده بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 26A33، 44A10، 47H10، 34A40، 34K10.

کلمات کلیدی : معادلات دیفرانسیل هیبرید، نامساوی‌های دیفرانسیلی، قضیه وجودی، اصل مقایسه، مرتبه توزیعی.

---

[۱] Dhage
[۲] Lakshmikantham

فهرست مطالب

مقدمه

در سال‌های اخیر معادلات دیفرانسیل کسری توجه بسیاری از دانشمندان ریاضی را به خود جلب کرده است، زیرا نظریه و کاربردهای آن با پیشرفت‌های زیادی همراه بوده است [۲۴، ۲۹]. ابزارهای حساب دیفرانسیل کسری در زمینه‌های مختلف به کار برده می‌شوند. به عنوان مثال، معادلات دیفرانسیل در بردارنده عملگر دیفرانسیلی ریمان-لیویل کسری از مرتبه $1 > q > 0$ در مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد [۲۱].
تکنیک‌های آشفتگی در آنالیز غیرخطی برای مطالعه سیستم‌های دینامیکی که به وسیله معادلات دیفرانسیل و انتگرال نمایش داده می‌شود بسیار مفیدند. اغلب یک معادله دیفرانسیل با نمایش یک سیستم دینامیکی مخصوص به‌راحتی قابل تجزیه و تحلیل نیست. به عنوان مثال، برای هر بازه کراندار و بسته $J = [0, T]$ از $\mathbb{R}$، معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول غیرخطی:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

را در نظر بگیرید، که در آن $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. این معادله، یک مسئله مقدار اولیه (IVP)[۳] است که اساس آنالیز غیرخطی است و معادله دیفرانسیل آشفته نامیده می‌شود. آشفتگی از یک معادله غیرخطی شامل جمع یا تفریق چند جمله، آشفتگی خطی نامیده می‌شود و آشفتگی که شامل ضرب یا تقسیم چند جمله باشد را آشفتگی درجه دوم از معادله مطلوب می‌نامند.
در سال‌های اخیر معادلات دیفرانسیل غیرخطی آشفته درجه دوم توجه زیادی را به خود جلب کرده است. ما این قبیل معادلات را معادلات دیفرانسیل هیبرید می‌نامیم [۱۱، ۱۵، ۱۸، ۲۸]. جزئیات انواع مختلف آشفتگی‌ها برای یک معادله انتگرال و دیفرانسیل غیرخطی در [۱۷] ارائه شده است. همچنین روش‌های تقریب برای معادلات هیبرید در [۱۴] استفاده شده است.
این پایان‌نامه از ۵ فصل تشکیل شده است. در فصل اول مقدمات و تعاریف اولیه‌ای از آنالیز ریاضی که در فصل‌های بعد به آن احتیاج خواهیم داشت، ارائه می‌شود. همچنین با معرفی جبرهای باناخ، تعدادی قضیه نقطه ثابت در جبر باناخ بیان می‌شود که اساس کار ما در فصل‌های بعدی است.
در فصل دوم، ابتدا مقدمات و تعاریفی از حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری و ویژگی عملگرهای مربوطه، آورده می‌شود. همچنین تعدادی نامساوی دیفرانسیلی که در فصل‌های بعد مورد استفاده

[۳] Initial Value Problem

قرار می‌گیرند، اثبات می‌شوند. در انتهای این فصل، به بیان تاثیر تبدیل لاپلاس روی عملگرهای کسری تعریف شده می‌پردازیم.
فصل سوم به معرفی معادلات دیفرانسیل هیبرید و نتایج اساسی برای این معادلات، اختصاص یافته است. ابتدا نتایج وجودی و یکتایی و برخی نامساوی‌های دیفرانسیلی اساسی را برای معادلات دیفرانسیل هیبرید، ثابت می‌کنیم. سپس با استفاده از نظریه نامساوی‌ها، وجود جواب‌های اکسترمالی و یک نتیجه مقایسه‌ای را برای این‌گونه معادلات ثابت می‌کنیم. دهاگ[۴] و لاکشمیکانتام[۵] در [۱۶] این نتایج را ثابت کرده‌اند.
در فصل چهارم نظریه معادلات دیفرانسیل هیبرید کسری، دربردارنده عملگر دیفرانسیلی ریمان-لیوویل از مرتبه $۱ < q < ۲$ را معرفی می‌کنیم. زائو [۶] و همکاران، نتایجی را برای این معادلات در [۳۳] به دست آورده‌اند، به این ترتیب که قضیه وجودی برای این‌گونه معادلات، تحت ترکیب شرایط لیپ‌شیتس و کاراتئودوری ثابت می‌شود. برخی نامساوی‌های دیفرانسیلی کسری اساسی که توسط لاکشمیکانتام و واتسالا[۷] در [۲۲] و [۲۳] بنا نهاده شده است که برای اثبات وجودی جواب‌های اکسترمالی مورد استفاده قرار می‌گیرند. ابزارهای ضروری در نظر گرفته می‌شود و اصل مقایسه ثابت می‌شود، که برای مطالعه بیشتر بر روی رفتار کیفی جواب‌ها مفید خواهد بود.
در فصل ۵، با تعمیم دادن معادلات دیفرانسیل هیبرید کسری که در فصل ۴ ارائه شد، رده جدیدی از معادلات هیبرید با عنوان معادلات دیفرانسیل هیبرید کسری از مرتبه توزیعی، با رجوع به یک تابع چگالی نامنفی، مطرح خواهد شد. نظریه مشتق کسری از مرتبه توزیعی توسط کپوتو [۸] در [۵]، [۶] و [۴] ارائه شده است. همچنین در این فصل یک قضیه وجودی، نامساوی‌های دیفرانسیلی، وجود جواب‌های اکسترمال و قضیه‌های مقایسه برای این‌گونه معادلات ثابت خواهد شد. در انتهای این فصل، چند حالت ویژه را برای تابع چگالی دستگاه معادله هیبرید کسری از مرتبه توزیعی، مورد بررسی قرار می‌دهیم و در هر حالت به بیان تغییر شکل دستگاه معادله، معادله هم‌ارز با دستگاه و پیدا کردن دو عملگر موثر در اثبات قضیه وجودی مطرح شده در این فصل می‌پردازیم. ما مطالب جدید استخراج شده از این فصل را، در قالب مقالات [۲۵، ۲۶، ۲۷] ارائه کرده‌ایم.

[۴] Dhage
[۵] Lakshmikantham
[۶] Zhao
[۷] Vatsala
[۸] Caputo

فهرست نمادها

فصل ۱
تعاریف و مقدمات

۱.۱ مقدمه

در این فصل به بیان تعاریف و قضایایی از آنالیز ریاضی می‌پردازیم که در فصل‌های آینده از آن‌ها استفاده خواهیم کرد.

۲.۱ فضاهای نرم‌دار و باناخ و تعاریف مرتبط

فضاهای نرم‌دار و باناخ و قضایای نقطه ثابت در جبر باناخ، اساس کار ما را در فصل‌های بعد تشکیل می‌دهند. برای ارائه تعریفی از فضاهای نرم‌دار و باناخ و بیان قضایای نقطه ثابت مربوطه، به مقدمات و تعاریفی از [۱]، [۳۱] و [۳۲] نیازمندیم که به شرح زیر بیان می‌شوند.

تعریف ۱.۲.۱. یک فضای برداری متشکل است از:

(۱) یک میدان F از اسکالرها؛

(۲) یک مجموعه V از اشیاء به نام بردارها؛

(۳) یک عمل دوتایی $+ : V \times V \longrightarrow V$ به نام جمع برداری که به هر جفت از بردارهای α و β از V بردار $\alpha + \beta$ از V را که مجموع α و β نامیده می‌شود وابسته می‌سازد با این شرایط که:

(الف) جمع دارای خاصیت جابجایی است. به عبارت دیگر به ازاء هر دو بردار α و β،

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

(ب) جمع دارای خاصیت شرکت‌پذیری است. به‌عبارت دیگر به ازاء هر سه بردار α، β و γ،

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

(ج) بردار یکتای $\circ$ به نام بردار صفر در V موجود است به‌طوری‌که به ازای هر α در V داریم

$$\alpha + \circ = \alpha.$$

(د) به ازای هر بردار α در V، بردار یکتای $-\alpha$ در V موجود است به‌طوری‌که $\alpha+(-\alpha) = \circ$.

(۴) یک عمل دوتایی $V \times F \longrightarrow V$: . به نام ضرب اسکالری که به هر اسکالر c از F و هر بردار α از V بردار $c\alpha$ در V را که حاصل ضرب c و α نامیده می‌شود وابسته سازد با این شرایط که:

(الف) به ازای هر α در V و $1 \in F$، $1\alpha = \alpha$.

(ب) به ازاء هر بردار α و هر دو اسکالر c_1 و c_2، $(c_1c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$.

(ج) به ازاء هر دو بردار α و β و هر اسکالر c، $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$.

(د) به ازاء هر دو اسکالر c_1 و c_2 و هر بردار α، $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان F باشد. تابع $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک نرم می‌نامیم هرگاه در سه شرط زیر صدق کند:

(الف) به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq \circ$ و $\|x\| = \circ$ اگر و فقط اگر $x = \circ$.

(ب) به ازای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in F$، داریم $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$.

(ج) به ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

فضای برداری X مجهز به نرم $\|.\|$ را یک فضای نرم‌دار می‌نامیم. فضای نرم‌دار X با متر تعریف شده به صورت $d(x, y) = \|x - y\|$، تبدیل به یک فضای متریک می‌شود، که این متر را متر القایی به‌وسیله نرم گوییم.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. زیرمجموعه A از X را یک مجموعه کلا کراندار [1] گوییم اگر برای هر $\epsilon > \circ$، یک زیرمجموعه متناهی $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ از A وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B(s_k, \epsilon),$$

که در آن $B(s_k, \epsilon)$ یک گوی باز در X، به مرکز s_k و شعاع ϵ است. به‌عبارت دیگر

$$B(s_k, \epsilon) = \{x \in X \ : \ d(x, s_k) < \epsilon\}.$$

[1] Totally bounded

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای متریک و $A \subseteq X$. در این‌صورت A را تام [۲] گوییم اگر هر دنباله کوشی در A، همگرا در A باشد.

قضیه ۵.۲.۱. *فرض کنیم X یک فضای متریک و $A \subseteq X$. در این‌صورت A فشرده است اگر و فقط اگر تام و کلا کراندار باشد* [۳۲].

تعریف ۶.۲.۱. فضای نرم دار $(X, \|.\|)$ را تام گوییم هرگاه نسبت به متر القایی به وسیله نرم تام باشد. در این‌صورت X را یک فضای باناخ [۳] می‌نامیم. به‌عبارت دیگر X یک فضای باناخ است هرگاه به ازای هر دنباله کوشی مانند $\{x_n\}$ در X، عنصری مانند $x \in X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = ۰.$$

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ باشند. در این‌صورت، یک عملگر کراندار $T : X \longrightarrow Y$ را به‌طور کامل پیوسته [۴] گوییم اگر پیوسته و کلا کراندار باشد.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. نگاشت $T : X \longrightarrow X$ را یک نگاشت فشرده گوییم اگر، $\overline{T(X)}$ یک مجموعه فشرده در X باشد.

تعریف ۹.۲.۱. می‌گوییم نگاشت $Q : [a, b] \longrightarrow X$ غیرنزولی یا صعودی غیراکید است اگر برای هر $x, y \in [a, b]$ که $x \leq y$، آن‌گاه $Qx \leq Qy$.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم Ω یک زیر مجموعه باز از یک فضای اقلیدسی باشد. فضای همه توابعی از Ω که مشتق مرتبه k پیوسته دارند، را فضای هولدر [۵] گوییم هرگاه برای هر f از این فضا، ثابت‌های حقیقی و نامنفی C و α موجود باشد به‌طوری‌که برای هر x و y از دامنه f:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha},$$

این فضا را با نماد $C^{k,\alpha}(\Omega)$ نمایش می‌دهیم. اگر ثابت هولدر

$$|f|_{C^{k,\alpha}} = \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\alpha}},$$

روی زیر مجموعه فشرده Ω کراندار باشد، آن‌گاه f را یک تابع پیوسته هولدر موضعی گوییم.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنیم I بازه‌ای در $\mathbb{R}$ باشد. تابع $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ روی I پیوسته مطلق است، اگر برای هر عدد مثبت ϵ، عدد مثبت δ باشد به‌طوری‌که هرگاه یک دنباله از زیربازه‌های مجزای (x_k, y_k) از I در

$$\sum_k |y_k - x_k| < \delta,$$

[۲] Complete
[۳] Banach space
[۴] Completely continuous
[۵] Holder

صدق کند، آن‌گاه

$$\sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \epsilon.$$

مجموعه همه توابع پیوسته مطلق بر I را با $AC(I)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد، $C(X, \mathbb{R})$ فضای توابع پیوسته از X به توی $\mathbb{R}$ باشد و $B \subset C(X, \mathbb{R})$. در این‌صورت B هم‌پیوسته است اگر برای هر $\epsilon > ۰$، یک $\delta > ۰$ وجود داشته باشد، به‌طوری که برای هر $f \in B$ و هر $a, x \in X$:

$$d(x, a) < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

در فصل‌های بعدی از قضیه زیر که به قضیه آرزلا–آسکولی [۶] مشهور است، استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۱۳.۲.۱. *فرض کنیم E یک فضای متریک فشرده باشد و $F \subseteq C(E)$، که $C(E)$ فضای توابع پیوسته مختلط مقدار روی E است، در این‌صورت دو گزاره زیر هم‌ارزند:*

(۱) F *فشرده است.*

(۲) F *بسته، کراندار و هم‌پیوسته است* [۳۲].

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنیم S گردایه‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌ها از مجموعه ناتهی X باشد. گردایه S را یک جبر از مجموعه‌ها نامیم اگر در شرایط:

(الف) اگر $A, B \in S$، آن‌گاه $A \cap B \in S$،

(ب) اگر $A \in S$، آن‌گاه $A^c \in S$،

صدق کند.

تعریف ۱۵.۲.۱. جبر S از زیر مجموعه‌های مجموعه X را یک $\sigma-$ جبر نامیم اگر به ازاء هر دنباله $\{A_n\}$ از S، اجتماع:

$$\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n$$

متعلق به S باشد.

تعریف ۱۶.۲.۱. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد. گردایه S از زیر مجموعه‌های X را یک نیم‌حلقه نامیم اگر در سه خاصیت زیر صدق کند:

(۱) مجموعه تهی متعلق به S باشد،

[۶] Arzela-Ascoli

(۲) اگر $A, B \in S$، آن‌گاه $A \cap B \in S$،

(۳) به ازاء هر دو مجموعه از S، تفاضل‌شان را بتوان به صورت اجتماعی متناهی از اعضای از هم‌جدای S نوشت.

تعریف ۱.۲.۱۷. فرض کنید $P(X)$ مجموعه توانی X باشد. تابع $\mu : P(X) \longrightarrow [0, \infty]$ را یک اندازه بیرونی روی X گوییم هرگاه در ویژگی‌های زیر صدق کند:

(الف) $\mu(\infty) = 0$،

(ب) اگر $A \subseteq B$ آن‌گاه $\mu(A) \leq \mu(B)$،

(ج) به ازای هر دنباله $\{A_n\}$ از زیرمجموعه‌های X نامساوی $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ برقرار باشد.

تعریف ۱.۲.۱۸. فرض کنیم μ یک اندازه بیرونی روی X باشد. زیر مجموعه E از X را اندازه‌پذیر گوییم، هرگاه به ازای هر $A \subseteq X$ رابطه

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c),$$

برقرار باشد. همچنین تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را اندازه‌پذیر گوییم، اگر به ازای هر زیر مجموعه باز $O \subseteq \mathbb{R}$، مجموعه $f^{-1}(O)$ اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۱.۲.۱۹. سه‌تایی (X, S, μ) که در آن X یک مجموعه ناتهی، S نیم‌حلقه‌ای از زیرمجموعه‌های X، و μ یک اندازه روی S است، یک فضای اندازه نام دارد.

قضیه ۱.۲.۲۰. *گردایه $\wedge$ مرکب از تمام مجموعه‌های اندازه‌پذیر یک $\sigma-$ جبر از زیرمجموعه‌های X است* [۱].

قضیه ۱.۲.۲۱. *فرض کنیم μ یک اندازه خارجی بر X، و $\wedge$ گردایه تمام مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد. در این‌صورت، $(X, \wedge, \mu)$ یک فضای اندازه است* [۱].

تعریف ۱.۲.۲۲. فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد. اگر تابع اندازه‌پذیر $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ فقط تعدادی متناهی مقدار بگیرد، آن‌گاه ϕ یک تابع ساده نام دارد. همچنین یک تابع ساده ϕ یک تابع پله‌ای نام دارد اگر ϕ نمایشی به‌شکل

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$$

داشته باشد، که در آن هر A_i یک مجموعه اندازه‌پذیر با اندازه متناهی است و

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \neq A. \end{cases} \qquad (1.1)$$

تعریف ۲۳.۲.۱. فرض کنیم (X,S,μ) یک فضای اندازه باشد. تابع $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ را یک تابع بالایی نامیم اگر دنباله‌ای مانند $\{\phi_n\}$ از توابع پله‌ای وجود داشته باشد به‌طوری‌که

(۱) تقریبا همه جا برای هر n، $\phi_n\leq\phi_{n+1}$

(۲) تقریبا همه جا $\phi_n\to f$

(۳) $\lim\int\phi_n d\mu<\infty$.

تعریف ۲۴.۲.۱. فرض کنیم (X,S,μ) یک فضای اندازه باشد. تابع $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ را انتگرال‌پذیر لبگ (یا فقط انتگرال‌پذیر) نامیم اگر دو تابع بالایی مانند u و v وجود داشته باشند به‌طوری‌که تقریبا همه جا $f=u-v$. در این‌صورت انتگرال (لبگ) f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int fd\mu=\int ud\mu-\int vd\mu.$$

در فصل‌های بعدی از قضیه زیر که به قضیه همگرایی تسلطی لبگ [۷] مشهور است، استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۲۵.۲.۱. *فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر باشد و تابع انتگرال‌پذیر ثابتی چون g وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازاء هر n رابطه $|f_n|\leq g$ تقریبا همه جا برقرار باشد. هرگاه تقریبا همه جا $f_n\to f$، آن‌گاه f یک تابع انتگرال‌پذیر است و رابطه:*

$$\lim\int f_n d\mu=\int\lim f_n d\mu=\int fd\mu,$$

برقرار است [۱].

تعریف ۲۶.۲.۱. فرض کنیم (X,S,μ) یک فضای اندازه و $0<p<\infty$. گردایه همه توابع اندازه‌پذیر مانند f به‌طوری‌که $|f|^p$ انتگرال‌پذیر باشد را با $L_p(\mu)$ نشان می‌دهیم. با جمع و ضرب اسکالر معمولی $L_p(\mu)$ یک فضای برداری است، همچنین به ازای هر $f\in L_p(\mu)$ تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_p=(\int|f|^p\,d\mu)^{1/p},$$

واضح است که $\|f\|_p$، یک نرم روی $L_p(\mu)$ است و $L_p(\mu)$ با این نرم تبدیل به یک فضای باناخ می‌شود.

قضیه زیر، به قضیه ریس-فیشر [۸] مشهور است.

قضیه ۲۷.۲.۱. *فرض کنیم (X,S,μ) یک فضای اندازه و $1\leq p<\infty$. در این‌صورت $L_p(\mu)$ یک فضای باناخ است* [۱].

[۷] Lebesgue dominated convergence theorem
[۸] Riesz-Fischer

۳.۱ جبرهای باناخ [۹]

تعریف ۱.۳.۱. گوییم A یک جبر باناخ است، اگر روی A نرم $\|.\|$ تعریف شده باشد به‌طوری‌که:

(۱) $(A, \|.\|)$ یک فضای باناخ باشد.

(۲) یک ضرب به‌صورت $A \times A \longrightarrow A$ روی A تعریف شده باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y, z \in A$ و $c \in \mathbb{C}$ خواص زیر برقرار باشند:

(الف) $(xy)z = x(yz)$،

(ب) $(x+y)z = xz + yz$،

(ج) $x(y+z) = xy + xz$،

(د) $c(xy) = (cx)y = x(cy)$.

(۳) برای هر $x, y \in A$، $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$.

گوییم جبر باناخ A یکدار است اگر عنصری مانند $e \in A$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in A$، $ex = xe = x$ و $\|e\| = ۱$.

برای جزئیات بیشتر مربوط به جبرهای باناخ، خواننده می‌تواند به [۳۰] مراجعه کند.

تعریف ۲.۳.۱. مجموعه بسته غیرتهی K از جبر باناخ X یک مخروط [۱۰] با راس صفر (۰) گفته می‌شود اگر:

(۱) $K + K \subseteq K$،

(۲) برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ که $\lambda \geq ۰$، داشته باشیم $\lambda K \subseteq K$.

(۳) $(-K) \cap K = ۰$، به‌طوری‌که ۰ عنصر صفر از X است.

فرض کنیم X یک جبر باناخ ، $x, y \in X$ و K یک مخروط در X باشد. گوییم $x \leq y$ اگر و فقط اگر $y - x \in K$.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنیم X یک جبر باناخ باشد. گوییم مخروط K در X نرمال شده است، اگر نرم $\|.\|$ روی K به‌طور یکنواخت صعودی باشد. یعنی یک ثابت $N > ۰$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y \in K$ اگر $x \leq y$ آن‌گاه $\|x\| \leq N \, \|y\|$.

برای جزئیات بیشتر در مورد مخروط‌ها، خواننده می‌تواند به [۲۰] مراجعه کند.

[۹] Banach algebra
[۱۰] Cone

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنیم X یک جبر باناخ باشد، برای هر $a,b \in X$ که $a \leq b$، بازه $[a,b]$ یک مجموعه در X است که به‌صورت:

$$[a,b] = \{x \in X \;:\; a \leq x \leq b\}$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۵.۳.۱. گوییم زیر مجموعه A از یک فضای نرم‌دار، نرم‌کراندار است اگر عدد حقیقی $M > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم $\|x\| \leq M$.

از نتیجه و لم زیر در اثبات وجود جواب‌های اکسترمالی در قطعه برداری، که در فصل‌های بعد برای معادلات هیبرید مطلوب مطرح خواهند شد، استفاده خواهیم کرد.

نتیجه ۶.۳.۱. *اگر مخروط K در X نرمال باشد، آن‌گاه هر مجموعه منظم کراندار در X، مانند $[a,b]$ نرم‌کراندار است [۲۰].*

لم ۷.۳.۱. *فرض کنیم K یک مخروط مثبت در جبر باناخ X باشد و $u_1, u_2, \nu_1, \nu_2 \in K$ به‌طوری‌که $u_1 \leq \nu_1$ و $u_2 \leq \nu_2$. آن‌گاه $u_1 u_2 \leq \nu_1 \nu_2$ [۹].*

۴.۱ نگاشت‌های لیپ‌شیتس [۱۱]

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم (X, d_x) و (Y, d_y) دو فضای متریک باشند. تابع $f : X \longrightarrow Y$ در شرایط لیپ‌شیتس صدق می‌کند اگر ثابت حقیقی $k \geq 0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x_1, x_2 \in X$ رابطه

$$d_y(f(x_1), f(x_2)) \leq k d_x(x_1, x_2),$$

برقرار باشد. k را ثابت لیپ‌شیتس گوییم.

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. گوییم نگاشت $f : X \longrightarrow X$ یک نگاشت انقباضی یا یک انقباض [۱۲] است هرگاه عدد حقیقی $0 < k < 1$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $x_1, x_2 \in X$ رابطه $d(f(x_1), f(x_2)) \leq k d(x_1, x_2)$، برقرار باشد. به کوچکترین مقدار k ثابت لیپ‌شیتس گفته می‌شود. نگاشت‌های انقباضی را نگاشت‌های لیپ‌شیتس گویند.

تعریف ۳.۴.۱. نگاشت $T : X \longrightarrow X$ را D– لیپ‌شیتس گوییم، اگر تابع غیرنزولی و پیوسته $\phi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ موجود باشد به‌طوری‌که $\phi(0) = 0$ و برای هر $x, y \in X$:

$$\|Tx - Ty\| \leq \phi(\|x - y\|).$$

[۱۱] Lipschitz
[۱۲] Contraction

اغلب تابع ϕ را یک $D-$ تابع از T روی X گوییم. اگر ϕ لزوما غیرنزولی نباشد و برای هر $r > 0$، $\phi(r) < r$ آن‌گاه نگاشت T را یک انقباض غیرخطی، با تابع انقباضی ϕ گوییم. واضح است که اگر در تعریف (۱.۴.۱)، متر d را نرم $\|.\|$ و تابع ϕ را تابع ثابت $\phi(x) = kx$ که $k, x \geq 0$ در نظر بگیریم آن‌گاه هر نگاشت لیپ‌شیتس، یک نگاشت $D-$ لیپ‌شیتس است.

۵.۱ قضایای نقطه ثابت [13]

در این بخش قضیه‌های نقطه ثابت در جبرهای باناخ را که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرد، می‌آوریم.

قضیه ۱.۵.۱. *فرض کنیم X یک فضای متریک محدب و تام باشد. اگر نگاشت $T : X \longrightarrow X$ یک انقباض غیرخطی با تابع انقباضی $\psi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ باشد، آن‌گاه T یک نقطه ثابت یکتای x_0 دارد به‌طوری‌که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $T^n x \longrightarrow x_0$.* [۳].

قضیه زیر به قضیه نقطه ثابت شودر [14] مشهور است.

قضیه ۲.۵.۱. *اگر U یک زیر مجموعه بسته و محدب از فضای نرم‌دار X باشد، آن‌گاه هر نگاشت پیوسته و فشرده $T : U \longrightarrow U$ حداقل یک نقطه ثابت در U دارد* [۱۹].

در فصل‌های بعدی از لم‌های نقطه ثابت زیر برای اثبات وجود جواب‌های اکسترمال برای معادلات مطرح شده استفاده خواهیم کرد.

لم ۳.۵.۱. *فرض کنید K یک مخروط در جبر باناخ X باشد و $a, b \in X$ به‌طوری‌که $a \leq b$.* همچنین *فرض کنیم که $A, B : [a, b] \longrightarrow K$ دو عملگر غیرنزولی باشند به‌طوری‌که:*

(الف) *A لیپ‌شیتس با ثابت لیپ‌شیتس α باشد.*

(ب) *B به‌طور کامل پیوسته باشد.*

(ج) *برای هر $x \in [a, b]$، $AxBx \in [a, b]$.*

به علاوه اگر مخروط K نرمال و مثبت و $\alpha M < 1$ که در آن

$$M = \|B([a, b])\| = \sup\{\|Bx\| \ : \ x \in [a, b]\},$$

آن‌گاه عملگر معادله $AxBx = x$ کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین جواب مثبت در $[a, b]$ دارد [۱۰].

لم ۴.۵.۱. *فرض کنید K یک مخروط در جبر باناخ X باشد و $a, b \in X$.* همچنین *فرض کنید $A, B : [a, b] \longrightarrow K$ دو عملگر غیرنزولی باشند به‌طوری‌که:*

[13] Fixed point
[14] Schauder