بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده فیزیک

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته فیزیک

گرایش اتمی و مولکولی

نظریه کوانتومی نوسانگر هماهنگ میرا

مؤلف:

بتول ایلاقی حسینی

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا مطلوب

شهریور ماه ۱۳۹۲

تقدیم به:

نور و برهان الهی

تجلی اتقان و استواری

طهارت بخش جان انسانی

حضرت صاحب الزمان (عج).

تشکر و قدردانی:

الهی، مرا مدد کن تا دانش اندکم نه نردبانی باشد برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه‌ای برای اسارت و نه دست مایه‌ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

حال که ایزد منان توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان‌نامه را به پایان برسانم، برخود واجب می-دانم از استاد راهنمای گرانقدرم، جناب آقای دکتر مطلوب که با سعه صدر و صبوری مرا راهنمایی نمودند، تشکر و قدردانی نمایم. بی‌گمان شاگردی ایشان و بهره‌مندی از راهنمایی‌های بی‌دریغشان که همواره راهگشای کار من بوده و خواهد بود، برای من باعث افتخار است. از درگاه پروردگار مهربان برای ایشان آرزوی سلامتی، سعادت و توفیق روز افزون خواستارم. همچنین، از اساتید گرامی، جناب آقای دکتر یزدان‌پناه و سرکارخانم دکتر شجاعی که لطف کردند و زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند، بسیار سپاسگزارم.

در نهایت صمیمانه‌ترین تقدیرها تقدیم به پدر و مادر عزیز و مهربانم که همواره حامی و مشوقم بوده‌اند و هر آنچه دارم از دعای خیر و برکت وجودشان است.

چکیده:

توصیف ماکروسکوپی نوسانگر هماهنگ میرا در محدودهٔ مکانیک کوانتومی در سه بعد به کمک معادلهٔ لانژوین کوانتومی ارائه شده است. مشخص شده است که معادلهٔ لانژوین کوانتومی نمایش جایگزین توصیف ماکروسکوپی از یک ذره کوانتومی جفت شده با حمام گرمایی است. جفت شدگی با حمام گرمایی در معادلهٔ حرکت توسط دو جمله بیان می‌شود: تابع حافظه و عملگر نیروی تصادفی. ما فرمول‌بندی را در حالت‌هایی در حضور دو تابع حافظه و دو عملگر نیروی تصادفی و نیز در حالت نوسانگر هماهنگ تقویت شده توسعه خواهیم داد. برای اطمینان از صحت فرمول‌بندی، در هر حالت رابطهٔ جابجایی کانونیک بین عملگر موقعیت و اندازه حرکت متناظر با آن بررسی شده است.

کلید واژه: نوسانگر هماهنگ میرا، معادلهٔ لانژوین کوانتومی، حمام گرمایی، تابع حافظه، عملگر نیروی تصادفی، رابطه جابجایی کانونیک، نوسانگر هماهنگ تقویت شده

فهرست مطالب:

عنوان **صفحه**

فصل اول مقدمه ۱

فصل دوم نوسانگر هماهنگ میرا در مکانیک کلاسیک ۵

۲-۱ مقدمه ۵

۲-۲ فرمول بندی لاگرانژی ۶

۲-۲-۱ مختصات تعمیم‌یافته ۶

۲-۲-۲ معادلات حرکت اویلر-لاگرانژ برای سیستم پایستار ۷

۲-۲-۳ اندازه حرکت تعمیم‌یافته و تابع انرژی ۹

۲-۲-۴ معادلات حرکت سیستم ناپایستار با توجه به تابع اتلافی ریلی و لوری ۱۲

۲-۲-۵ تابع هامیلتونی ۱۴

۲-۳ نوسانگر هماهنگ ساده ۱۴

۲-۳-۱ اندازه حرکت تعمیم‌یافته و هامیلتونی نوسانگر هماهنگ ساده ۱۶

۲-۴ نوسانگر هماهنگ میرا ۱۶

۲-۵ نوسانگر هماهنگ واداشته ۱۹

فصل سوم نظریه کوانتومی سیستم‌های اتلافی، رهیافت هایزنبرگ- لانژوین ۲۲

۳-۱ مقدمه ۲۲

۳-۲ معادلهٔ لانژوین کوانتومی ۲۳

۳-۲-۱ ویژگی‌های تابع حافظه ۲۴

۳-۳ هم ارزی مدل حمام گرمایی و معادلهٔ لانژوین کوانتومی ۲۵

۳-۳-۱ مدل نوسانگرهای مستقل ۲۶

فصل چهارم نوسانگر هماهنگ میرا در مکانیک کوانتومی ۳۲

۴-۱ مقدمه ۳۲

۴-۲ نوسانگر هماهنگ ساده ۳۳

۴-۳ نوسانگر هماهنگ میرا ۳۵

۴-۳-۱ دینامیک نوسانگرهماهنگ درحضورتابع حافظه وابسته به نیروی اصطکاک ۳۵

۲-۳-۴ دینامیک نوسانگرهماهنگ درحضورتابع حافظه وابسته به نیروی بازگرداننده ۳۹
۳-۳-۴ کوانتش نوسانگر هماهنگ در حضور دو تابع حافظه..... ۴۱
۴-۴ عملگر هامیلتونی نوسانگر هماهنگ میرا..... ۴۴
۴-۵ بررسی حالت حدی..... ۴۵
۴-۶ کوانتش میدان الکترومغناطیسی..... ۴۷
۱-۶-۴ کوانتش میدان الکترومغناطیسی در فضای تهی..... ۴۷
۲-۶-۴ کوانتش میدان الکترومغناطیسی در محیط دی‌الکتریک تراوای همگن..... ۵۰
فصل پنجم نوسانگر هماهنگ تقویت شده در مکانیک کوانتومی ۵۵
۱- ۵ مقدمه..... ۵۵
۲-۵ نوسانگر هماهنگ تقویت شده..... ۵۶
۳-۵ عملگر هامیلتونی نوسانگر هماهنگ تقویت شده..... ۵۸
نتیجه‌گیری..... ۶۰
پیوست الف محاسبهٔ عضوهای ماتریسی عملگر $exp(-\beta\hat{H})$ در نمایش q..... ۶۲
پیوست ب محاسبهٔ انتگرال (۴-۶۴)..... ۶۵
پیوست پ فرمول‌بندی کلی برای نوسانگر هماهنگ میرا و تقویت شده..... ۶۷
منابع..... ۶۹

فصل اول

مقدمه

در اطراف ما سیستم‌های بسیاری مشاهده می‌شوند که همواره در حال حرکت تناوبی هستند. مانند نوسانات کوچک آونگ ساعت، تاب خوردن بچه‌ها، حرکات بالا و پایین جزر و مد، ارتعاش تار ویولن. حتی سیستم‌هایی که حرکت تناوبی آنها نمایان نیست نیز وجود دارد، مانند ارتعاش مولکول-های هوا در ابزارهای بادی، ارتعاش اتم‌ها و مولکول‌هایی که بدن ما را تشکیل می‌دهند و غیره.

وجه اشتراک همهٔ این پدیده‌ها، تناوبی بودن حرکت آنهاست. نوعی از حرکت یا جابجایی که به دفعات تکرار می‌شود. این حرکت ممکن است ساده یا پیچیده باشد. تحلیلی از ساده‌ترین شکل آن، حرکت هماهنگ ساده است. حرکت هماهنگ ساده دو مشخصهٔ اساسی دارد: (۱) با یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم با ضرائب ثابت توصیف می‌شود. (۲) دورهٔ تناوب حرکت، یا زمان لازم برای این که یک کمیت خاص (نه تنها مکان، بلکه سرعت) تکرار شود مستقل از جابجایی بیشینه از حالت تعادل است [۲ و۱]. این کیفیت‌ها تنها زمانی صادق‌اند که جابجایی از وضعیت تعادل کوچک باشد. در این حالت نیروی بازگرداننده، متناسب با جابجایی است. جابجایی‌های بزرگ باعث می‌شود که جملات غیر خطی در معادلهٔ دیفرانسیل حرکت وجود داشته باشد و جواب‌های نوسانی حاصل دیگر از اصل بر هم نهی پیروی نمی‌کنند.

حرکت نوسانگر هماهنگ ساده اندکی آرمانی است، زیرا در این حالت نیروی اصطکاک نادیده گرفته می‌شود. این نیرو تا حدودی در اکثر سیستم‌های مکانیکی وجود دارد. بنابراین، علاقمند به بررسی حرکت نوسانگر هماهنگ میرا هستیم. نوسانگر هماهنگ ساده و میرا از مهم‌ترین مسائل در

محدودهٔ مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی است. در محدودهٔ مکانیک کلاسیک اکثر سیستم-های نوسانی که بررسی می‌شود، اندکی از حالت تعادل منحرف شده‌اند و حرکت سیستم مورد مطالعه قرار می‌گیرد [۲ و ۱].

هرچند نوسانگر هماهنگ از نظر علمی در شاخه‌های مختلف فیزیک کاربرد دارد اما آنچه که بر اهمیت بررسی این مسئله در محدودهٔ مکانیک کوانتومی افزوده است، از نظر تاریخی به اوایل سال ۱۹۰۰ بر می‌گردد. زمانی که پلانک تابش جسم سیاه را مورد بررسی قرار می‌داد، استدلال کرد که واحدهای گسسته انرژی به نوسانگرهای تابشی مربوط اند و این پیشنهاد به تولّد مفاهیم کوانتومی انجامید [۳]. بنابراین، می‌توان کوانتش میدان الکترومغناطیسی در خلا را با کوانتیزه کردن نوسانگر هماهنگ ساده نتیجه گرفت [۴] و به طور مشابه با کوانتیزه کردن نوسانگر هماهنگ میرا، کوانتش میدان الکترومغناطیسی را در حضور ماده بیان کرد [۵]. کوانتش میدان الکترومغناطیسی علاوه بر این روش، با استفاده از روش تابع گرین نیز بیان می‌شود [۷ و۶].

در نظریهٔ کوانتومی فرض می‌شود که نیرو (یا ترجیحاً تابع پتانسیل) به همان شکل مکانیک کلاسیک است. وقتی نیرو پایستار باشد فرمول‌بندی حرکت در محدودهٔ مکانیک کوانتومی مشابه با مکانیک کلاسیک خواهد بود و به راحتی می‌توان این کار را انجام داد. اما اگر ما بخواهیم یک سیستم غیر پایستار کلاسیکی مانند نوسانگر هماهنگ میرا را در مکانیک کوانتومی بررسی کنیم با مشکل مواجه خواهیم شد. در این حالت بین معادلات حرکت و رابطهٔ جابجایی کانونیک ناسازگاری پیدا خواهیم کرد. این مشکل به این دلیل خواهد بود که فرمول‌بندی کوانتومی برای سیستم‌های بسته بیان شده است. اما نوسانگر هماهنگ میرا سیستمی است که با محیط برهم کنش دارد و در طی زمان انرژی خود را به محیط اطراف می‌دهد.

از روزهای اولیهٔ تولّد مکانیک کوانتومی، مسئلهٔ میرایی تابش و پایداری اتم مورد بحث بود. برای نمونه در سمیناری که با موضوع اتم بوهر[1] برگزار شده بود، ماکس ون لیو[2] به نظریهٔ بوهر انتقاد کرد و بیان می‌کند: " این غیرمنطقی است! معادلات ماکسول تحت همهٔ شرایط معتبر هستند. الکترون در یک مدار باید تابش داشته باشد" [۸]. با بیان مکانیک ماتریسی و بعداً بیان معادلات شرودینگر، مجدداً به مسئلهٔ میرایی در محدودهٔ مکانیک کوانتومی توجه شد. اولین مقالات با موضوع میرایی و نوسانگر هماهنگ میرای کوانتومی به وسیلهٔ سیگرت[3] در سال ۱۹۳۲ نوشته شد. وی با استفاده از تابع اتلافی

[1] N. H. D. Bohr
[2] M. V. Laue
[3] R. J. Seegert

ریلی و مکانیک ماتریسی بورن[1]، جردن[2] و هایزنبرگ توانست معادلات حرکت نوسانگر هماهنگ میرا را به دست آورد [۸]. اما این روش کوانتش برای سیستم اتلافی کوانتومی به وسیلهٔ بریتین[3] مورد انتقاد قرار گرفت. او استدلال کرد که برای نیروی اصطکاک وابسته به سرعت روابط جابجایی با معادلات حرکت هایزنبرگ ناسازگار است. بریتین برای اثبات انتقاد خود یک نیروی اصطکاک وابسته به سرعت در طرف دوم معادلهٔ اویلر- لاگرانژ اضافه کرد. سپس، با در نظر گرفتن نشان کوانتومی مسئله (رابطهٔ جابجایی کانونیک) نشان داد که نیروی اصطکاکی که در نظر گرفته است، نمی‌تواند تابعی از سرعت مختصه باشد بلکه باید تابعی از مختصه باشد [۸]. در این زمینه توسط افراد دیگری نیزکوانتش نوسانگر هماهنگ میرا انجام شده است که در [۹ و ۸] بیان شده است.

روش‌های گوناگونی برای مطالعهٔ سیستم‌های اتلافی بیان شده است. یکی از این روش‌ها، رهیافت سیستم و حمام گرمایی است که این روش یک توصیف میکروسکوپی از سیستم مورد مطالعه را بیان می‌کند [۱۰و۹]. در این روش با جفت کردن یک حمام گرمایی با ذره یا سیستم مورد مطالعه، مجموعه سیستم و حمام گرمایی، سیستمی بسته را تشکیل می‌دهد که به راحتی می‌توان برای آن فرمول‌بندی کوانتومی را بیان کرد. در حالتی که به توصیف ماکروسکوپی نوسانگر هماهنگ میرا علاقه مند باشیم می‌توان معادل با این روش از معادلهٔ لانژوین کوانتومی[4] استفاده کنیم [۱۱]. اولین بار لانژوین در سال ۱۹۰۸ با معرفی معادلهٔ لانژوین کلاسیکی توانست حرکت ذره براونی را فرمول‌بندی کند [۱۲].

معادلهٔ لانژوین کوانتومی توصیف ماکروسکوپی از حرکت ذرهٔ جفت شده با حمام گرمایی را بیان می‌کند. کوپل شدگی با حمام گرمایی در این معادله توسط دو جمله: تابع حافظه و نیروی تصادفی بیان می‌شود. تبدیل فوریه تابع حافظه یک تابع تحلیلی از متغییر مختلط در نیمهٔ بالایی صفحهٔ اعداد مختلط است، قسمت حقیقی این تابع روی محور حقیقی اعداد مختلط تابعی زوج و مثبت است. در واقع تبدیل فوریهٔ تابع حافظه باید تابع حقیقی مثبت[5] باشد [۱۱].

در رهیافت لانژوین برهم کنش نوسانگر هماهنگ با محیط اطراف به وسیلهٔ قسمت موهومی تابع پاسخ بیان می‌شود. برای این تابع که بر حسب تبدیل فوریهٔ تابع حافظه بیان می‌شود روابط کرامر- کرونیگ[6] که مبتنی بر اصل علیت است صادق است. در حالت کلی قسمت موهومی تابع پاسخ می-

[1] M. Born
[2] P. Jordan
[3] W. E. Brittin
[4] Quantum Langevin Equation
[5] Positive Real Function
[6] Kramers-Kronig

تواند مثبت یا منفی باشد. در حالتی که قسمت موهومی این تابع مثبت باشد، سیستم به محیط اطراف انرژی می‌دهد و فرمول‌بندی ما نوسانگر هماهنگ میرا را بیان می‌کند. اما زمانی‌که قسمت موهومی تابع پاسخ منفی در نظر گرفته شود، نوسانگر هماهنگ تقویت شده را خواهیم داشت. البته در حالت تقویت لازم است مزدوج هرمیتی عملگر تصادفی در فرمول‌بندی وارد شود که رابطهٔ جابجایی بوزونی برقرار باشد. از جمله کارهایی که در این زمینه با تغییر علامت قسمت موهومی تابع پاسخ انجام شده می‌توان به کوانتش میدان الکترومغناطیسی در حضور تیغه‌ی تقویت کننده اشاره کرد [۱۳].

در فصل دوم این پایان نامه به کمک رهیافت لاگرانژی حرکت نوسانگر هماهنگ در مکانیک کلاسیک مرور می‌شود . از آنجا که در این پایان نامه هدف بررسی حرکت نوسانگر هماهنگ میرای کوانتومی است، در فصل سوم معادلهٔ لانژوین کوانتومی معرفی خواهد شد و ویژگی‌های تابع حافظه و عملگر نیروی تصادفی بیان می‌شود. در بخش پایانی این فصل با شروع از تابع هامیلتونی مدلی ساده از سیستم و حمام گرمایی (نوسانگرهای مستقل[1]) نشان خواهیم داد که مدل جفت شدگی با حمام گرمایی معادل با معادلهٔ لانژوین کوانتومی است.

در فصل چهارم با توجه به توضیحاتی که برای معادلهٔ لانژوین کوانتومی بیان شده است، در ابتدا با در نظر گرفتن تابع حافظهٔ وابسته به نیروی اصطکاک معادلهٔ حرکت نوسانگر میرا نوشته می‌شود. علاوه بر این با در نظر گرفتن تابع حافظه وابسته به نیروی بازگرداننده در غیاب اصطکاک فرمول-بندی تکرار می‌شود. درنهایت با دو تابع حافظه و دو نیروی تصادفی معادلهٔ حرکت نوسانگر هماهنگ میرا نوشته می‌شود. هدف اصلی از این کار آن است که حتی‌الامکان زمینه‌ای فراهم شود تا بتوانیم کوانتش میدان الکترو مغناطیسی در حضور ماده بیان شود.

در فصل پایانی این پایان نامه، حرکت ماکروسکوپی نوسانگر هماهنگ تقویت شده[2] با تغییر علامت تابع پاسخ و قرار دادن مزدوج هرمیتی عملگر نیروی تصادفی در معادلهٔ حرکت نوسانگر هماهنگ میرا فرمول‌بندی خواهد شد.

[1] The Independent-Oscillator Model
[2] The Amplifying Harmonic Oscillator

فصل دوم

نوسانگر هماهنگ میرا در مکانیک کلاسیک

۲-۱ مقدمه

سیستمی در حالت تعادل پایدار در نظر بگیرید. هنگامی‌که این سیستم دستخوش جابجایی کوچکی از حالت تعادلش شود، حرکت نوسانی هماهنگ ساده می‌کند. اما وقتی جابجایی سیستم از وضع تعادل کوچک نباشد، سیستم رفتار خطی از خود بروز نمی‌دهد و حرکت آن نوسانی هماهنگ ساده نخواهد بود. در ابتدا برای درک بیش‌تر مسئله به مطالعهٔ حرکت نوسانگر هماهنگ ساده می‌پردازیم.

این چنین فرآیندی در طبیعت زیاد رخ می‌دهد و مطالعهٔ آن در فیزیک، هم از دیدگاه عملی و هم از دیدگاه نظری مورد توجه است. نمونه هایی از این مسئله در محدوهٔ مکانیک کلاسیک عبارتند از: فنر کشسان، آونگ، تار مرتعش، تشدید کاواک صوتی و حرکت بار در مدار الکتریکی. حضور نیروی اصطکاک در چنین فرآیندی باعث میرایی نوسانات در طی زمان می‌شود. به این دلیل علاقمند به مطالعهٔ نوسانگر هماهنگ میرا هستیم.

در این فصل، ابتدا حرکت نوسانگر ساده (حرکت حاصل از جابجایی کوچک سیستم از وضع تعادل، بدون حضور نیروی اصطکاک) را به کمک رهیافت لاگرانژی بررسی خواهیم کرد. سپس به منظور فرمول‌بندی حرکت نوسانگر هماهنگ میرا، نیروی اصطکاک را متناسب با سرعت در نظر می-گیریم. با توجه به نیروی اتلافی معرفی شده توسط ریلی، حرکت نوسانگرهماهنگ میرا را مطالعه خواهیم کرد. برای حفظ حرکت نوسانی با حضور نیروی اصطکاک، اعمال یک نیروی خارجی به سیستم ضروری است. این نوع سیستم نوسانی، نوسانگر واداشته یا هدایت شده نامیده می‌شود.که در بخش پایانی این فصل آن را بررسی خواهیم کرد.

۲-۲ فرمول بندی لاگرانژی

غیر از نظریهٔ نیوتن و تقریباً همزمان با او، در قارهٔ اروپا توسط لایبنیتس[1] روش دیگری برای مطالعه مکانیک مطرح شد. رهیافت لایبنیتس، برخلاف کمیتهای برداری نیرو و شتاب بر عملیات ریاضی با کمیتهای نرده‌ای انرژی مبتنی بود. این روش بیش از یک قرن طول کشید تا کامل شود و ذهن خلاق بسیاری از بزرگان علم را به خود مشغول ساخت [۱].

به دنبال رهیافت لایبنیتس پیشرفتهایی در مکانیک توسط برنولی[2] حاصل شد. وی در سال ۱۷۱۷ اصل «کار مجازی» را برای توصیف تعادل سیستم‌های ایستایی مطرح کرد و دالامبر[3] آن را تعمیم داد تا حرکت سیستم‌های دینامیکی را نیز در بر بگیرد [۱۴و۱]. منشاء این تحول کار لاگرانژ[4] بود. وی اصل کار مجازی و تعمیم آن توسط دالامبر را برای به دست آوردن معادلات مکانیکی حرکت به کار برد، که امروزه به افتخار او به این نام مشهور است.

ما در اینجا رهیافت لاگرانژ را برای استخراج معادلاتش انتخاب نخواهیم کرد. در عوض، روش دیگری با هدف حل مسائلی که کل حوزه فیزیک را در بر می‌گیرد را در پیش می‌گیریم، نه منحصراً آنهایی که به قلمرو مکانیک کلاسیک محدود می‌شوند. این روش از این باور عمیق فلسفی سرچشمه می‌گیرد،که طبیعت همواره حکم می‌کند اشیای سازندهٔ عالم فیزیکی مسیرهایی را در فضا و زمان طی می‌کنند که مبتنی بر اصول فرینگی[5] هستند.

این فرضیه را که در سال ۱۸۳۴ توسط ریاضیدان ایرلندی سر ویلیام روئن هامیلتون[6] بیان شد، اصل وردشی هامیلتون می‌نامند [۲]. بیشتر فیزیکدانان این فرضیه را بنیادی تر از قوانین نیوتن دانسته‌اند.

۱-۲-۲ مختصات تعمیم‌یافته

مختصات معمولاً برای تعریف مکان مجموعه‌ای از ذرات در فضا به کار می‌رود. در حالت کلی ما می‌توانیم هر مجموعه‌ای از مختصات را برای توصیف حرکت سیستم فیزیکی انتخاب کنیم. برخی انتخاب‌ها به دلیل وجود قیدهای هندسی که پیکربندی مجاز هر سیستمی را محدود می‌کنند با صرفه تر از بقیه هستند [۲].

یک سیستم مکانیکی شامل N ذرّه در نظر بگیرید. برای مشخص کردن موقعیت چنین سیستمی در

---

[1] W. V. Leibniz
[2] J. Bernoulli
[3] J. L. D'Alembert
[4] J. L. Lagrange
[5] Extrema
[6] S. W. R. Hamilton

هرلحظه، به N بردار نیاز داریم و هر بردار با سه مختصه توصیف می‌شود. بنابراین، به طور کلی، برای توصیف یک سیستم مکانیکی به 3N مختصه نیاز داریم. اگر این مختصات با m شرط قیدی به یکدیگر مربوط شوند، آنگاه n=3N-m مختصهٔ تعمیم‌یافته مستقل وجود دارد. لازم نیست که این n مختصه، مختصات دکارتی، استوانه‌ای یا هر مختصهٔ منحنی‌الخط دیگری باشد. در واقع این n مختصه می‌توانند هر پارامتری، از قبیل طول، زاویه و انرژی باشند (تا وقتی که پیکر بندی سیستم را کاملاً توصیف کنند).

مجموعهٔ مختصات تعمیم‌یافته به صورت q_1 , q_2,... q_n نوشته می‌شود. این n مختصه یک فضای پیکربندی[1] را تشکیل می‌دهند. اگر دستگاهی از ذرات توسط مجموعه‌ای از مختصات تعمیم‌یافتهٔ q_jها توصیف شده باشند، مشتق نسبت به زمان هر مختصه را سرعت تعمیم‌یافتهٔ وابسته به این مختصه می‌نامیم.

۲-۲-۲ معادلات حرکت اویلر-لاگرانژ برای سیستم پایستار

همان‌طور که قبلاً گفتیم، برای به دست آوردن معادلات اویلر-لاگرانژ، اصل وردشی هامیلتون را انتخاب می‌کنیم. این اصل حرکت سیستم را در بازه زمانی t_1 و t_2 با تغییرات ناچیزی نسبت به حرکت واقعی سیستم در نظر می‌گیرد [۱۴]. بنابراین ابتدا بایستی معنای عبارت «حرکت سیستم بین زمان‌های t_1 و t_2» را به زبان دقیق‌تری بیان نمود.

باگذشت زمان، حالت سیستم تغییر کرده و هر نقطه از سیستم در فضای پیکربندی یک منحنی از خود بر جای می‌گذارد، که به عنوان «مسیر حرکت ذره» خوانده می‌شود.

اصل انتگرال هامیلتون، توصیف کننده حرکت سیستم‌های مکانیکی است که در آنها، تمامی نیروها (بجز نیروهای قیدی) از یک پتانسیل اسکالر به دست می‌آید. زمانی که پتانسیل تابع صریحی از مختصات مکان باشد، سیستم پایستار[2] است. برای سیستم پایستار حرکت سیستم از زمان t_1 به زمان t_2 به نحوی است که انتگرال (انتگرال کنش)،

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt, \qquad (۱-۲)$$

فرین باشد. L، تابع لاگرانژی است که به صورت تفاضل انرژی جنبشی وانرژی پتانسیل آن سیستم تعریف می‌شود. یعنی از تمام مسیرهای ممکن که یک نقطه از سیستم می‌تواند طبق آنها از موقعیتش

[1] Configuration Space
[2] Conservative

در زمان t_1 به موقعیت بعدی‌اش در زمان t_2 برود، سیستم دقیقاً مسیری را طی خواهد کرد که انتگرال (۲-۱) در آن مسیر مقداری ثابت باشد. منظور از عبارت «مقدار ثابت» برای انتگرال خطی روی یک مسیر آن است که مقدار انتگرال روی مسیر و مسیرهایی که از جابجایی‌های بینهایت کوچک نسبت به آن مسیر ایجاد می‌شوند، یکسان باشد.

می‌توان اصل هامیلتون را اینگونه جمع‌بندی کرد، حرکت به گونه‌ای است که تغییرات انتگرال خطی I برای مقادیر ثابت t_1 و t_2 برابر با صفر باشد.

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_n, \dot{q}_n) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt = 0, \qquad (۲-۲)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0. \qquad (۲-۳)$$

در عبارت (۲-۳)، مختصه‌های q_i توابعی از زمان هستند و $\delta \dot{q}_i$ به صورت:

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i, \qquad (۲-۴)$$

بیان می‌شود. به منظور ساده کردن عبارت (۲-۳)، رابطهٔ (۲-۴) را درآخرین جملهٔ آن جایگزین می-کنیم و پس از انتگرال‌گیری به روش جز به جز خواهیم داشت:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i dt = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \qquad (۲-۵)$$

جملهٔ اول در رابطهٔ (۲-۵) صفر است. زیرا در نقاط پایانی t_1 و t_2 ، $\delta q_i = 0$ است. بنابراین رابطهٔ (۲-۳) را به صورت:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i \, dt = 0, \qquad (۲-۶)$$

می‌توان ساده کرد. هر مختصهٔ تعمیم یافتهٔ q_i، متناظر با آن هر وردش δq_i، مستقل از بقیه است. در نتیجه، با معلوم بودن همهٔ مقادیر گوناگون ممکن برای δq_iها، برای اینکه انتگرال (۲-۶) صفر شود، هر جملهٔ داخل کروشه در انتگرالده به طور جداگانه باید صفر شود. یعنی رابطهٔ،

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \qquad i = 1,2, \dots, n. \qquad (۲-۷)$$

برقرار باشد. معادلات (۲-۷)، معادلات حرکت اویلر- لاگرانژ برای سیستم پایستار نامیده می‌شوند.

۳-۲-۲ اندازه حرکت تعمیم‌یافته و تابع انرژی

در بخش قبل نشان دادیم که چگونه می‌توان حرکت یک سیستم پایستار را به کمک معادلات اویلر-لاگرانژ توصیف کرد. اما به نحوه حل آنها برای مسائل خاص نپرداختیم.

سیستمی با n درجه آزادی، دارای n معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است. جواب هر معادله نیازمند دو انتگرال‌گیری است که در کل به $2n$ ثابت انتگرال‌گیری منتهی می‌شوند. در هر مسئله خاص، این ثابت‌ها طبق شرایط اولیه یعنی مقادیر اولیهٔ q_jها و $\dot{q}_j$ها تعیین می‌شوند.

گاهی اوقات معادلات حرکت برحسب برخی توابع شناخته شده قابل انتگرال‌گیری هستند، اما همواره اینطور نیست. حتی زمانی‌که نتوانیم جواب‌های کامل را بدست آوریم، اغلب می‌توانیم اطلاعات زیادی درمورد ماهیت فیزیکی حرکت سیستم کسب نماییم. در عمل، چنین اطلاعاتی ممکن است ارزش بیشتری از نظر فیزیکدانان داشته باشد تا زمانی‌که جواب کامل برای مختصات تعمیم‌یافته بعنوان تابعی از زمان داشته باشیم. بنابراین مهم است که بدانیم تا چه اندازه می‌توانیم در مورد حرکت یک سیستم اطلاعات ارائه کنیم، بدون اینکه نیاز به انتگرال‌گیری کامل مسئله داشته باشیم.

در بسیاری از مسائل، تعدادی از انتگرال‌های اولیه برای معادله حرکت را سریعاً می‌توان محاسبه کرد. منظور ما روابطی به شکل:

$$f(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, t) = constant, \qquad (۸-۲)$$

می‌باشد. این معادلات به این دلیل مورد توجه هستند که در مورد وضعیت فیزیکی سیستم به ما اطلاعاتی می‌دهند. در واقع این روابط شامل قوانین پایستگی می‌باشند [۱۴].

به عنوان نمونه، یک سیستم تحت تأثیر نیروی ناشی از پتانسیل‌های وابسته به مکان را در دستگاه دکارتی در نظر بگیرید، آنگاه:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}, \qquad (۹-۲)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) = m_i \dot{x}_i = p_{ix}. \qquad (۱۰-۲)$$

p_{ix} مؤلفه x از اندازه حرکت مربوط به i-امین ذره می‌باشد. این نتیجه، تعمیم واضحی از مفهوم اندازه حرکت به ما ارائه می‌دهد. اندازه حرکت تعمیم یافته مربوط به مختصات q_j به صورت:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \qquad (۱۱-۲)$$

تعریف می‌شودکه آن را اندازه حرکت کانونیک[1] یا اندازه حرکت مزدوج[2] می‌نامند.

توجه کنید اگر q_j یک مختصه دکارتی نباشد، p_j ضرورتاً ابعاد اندازه حرکت خطی را نخواهد داشت. به‌علاوه اگر پتانسیل وابسته به سرعت را داشته باشیم، آنگاه حتی با وجود مختصات دکارتی q_j، اندازه حرکت تعمیم‌یافته مربوط به آن مشابه با اندازه حرکت مکانیکی معمول نخواهد بود.

به طور مثال، در حالتی که ذرات باردار در میدان الکترومغناطیس داشته باشیم. رابطه لاگرانژی به صورت:

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^{\,2} - \sum_i q_i \phi(x_i) + \sum_i \frac{q_i}{c} \boldsymbol{A}(x_i).\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}, \qquad (۱۲-۲)$$

خواهد بود [۱۴]. q_i در (۲-۱۲) معرف بار الکتریکی ذرّه i-ام است و $\boldsymbol{A}(x_i)$ پتانسیل برداری است. اندازه حرکت تعمیم‌یافته مربوط به مولفهٔ x_i، با جایگذاری تابع لاگرانژی (۲-۱۲) در معادلهٔ (۲-۱۱) برابر با،

$$p_{ix} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i + \frac{q_i}{c} A_x, \qquad (۱۳-۲)$$

می‌شود. یعنی اندازه حرکت تعمیم‌یافته شامل اندازه حرکت مکانیکی بعلاوه یک جمله اضافی است.

با توجه به روابط (۲-۷) و (۲-۱۱) معادلات لاگرانژ برای یک سیستم پایسته را به صورت:

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \qquad (۱۴-۲)$$

می‌توان نوشت. اکنون کاملاً آشکار است که اگر لاگرانژی یک سیستم صریحاً شامل مختصهٔ q_j نباشد (اگرچه ممکن است حاوی سرعت متناظر یعنی $\dot{q}_j$ باشد). در این صورت با توجه به رابطه (۲-۱۴)، p_j ثابت است. مختصه‌ای که وجود ندارد مختصهٔ حذف شدنی می‌نامند و اندازه حرکت مزدوج آن یک ثابت حرکت است.

قضیه پایستگی دیگری که انتظار داریم از فرمول‌بندی لاگرانژی به آن برسیم، پایستگی انرژی کل سیستم است. البته در حالتی که نیروها، حاصل از پتانسیل‌هایی باشند که تنها به مکان وابسته هستند.

تابع لاگرانژی علاوه بر وابستگی به مختصه و سرعت تعمیم‌یافته ممکن است صریحاً به زمان نیز وابسته باشد. هنگامی‌که یک سیستم تحت تاثیر نیروهای خارجی که با زمان تغییر می‌کند قرار می‌گیرد، معادلات حرکت را می‌توان به صورتی نوشت که درآن تابع لاگرانژی به طور صریح به زمان بستگی داشته باشد. مانند اتمی که تحت تاثیر نیروی الکتریکی متغیری قرار می‌گیرد. همچنین، در

[1] Canonic Momentum
[2] Conjugate Momentum

مورد دستگاه‌هایی با مختصات متحرک که درآنها هر چند نیروها پایستارند، اما تابع لاگرانژی سیستم وابسته به زمان است.

اکنون تابع لاگرانژی را در نظر بگیرید که تابعی از مختصات، سرعت‌های تعمیم یافته و زمان باشد. آنگاه مشتق زمانی کل برای L برابر با،

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}, \qquad (۱۵-۲)$$

است. طبق معادلات لاگرانژی (۲-۷)، رابطهٔ (۲-۱۵) را می‌توان به صورت:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}, \qquad (۱۶-۲)$$

بازنویسی کرد و یا به شکل:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_j\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial L}{\partial t}, \qquad (۱۷-۲)$$

نوشت. بنابراین، نتیجه به صورت:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_j \dot{q}_j\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \qquad (۱۸-۲)$$

به دست می‌آید. عبارت داخل پرانتز را تابع انرژی می‌نامند و آن را با H نشان می‌دهند (تابع هامیلتون در ۲-۲-۵).

$$H(q_j, \dot{q}_j; t) = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L. \qquad (۱۹-۲)$$

رابطهٔ (۲-۱۹) را می‌توان به شکل:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \qquad (۲۰-۲)$$

نوشت که مشتق زمانی را به ما بدهد. بنابراین، اگر لاگرانژی تابع صریحی از زمان نباشد (یعنی t صریحاً در L ظاهر نشود و در تغییرات q و $\dot{q}$، زمان لحاظ شود). آنگاه از رابطهٔ (۲-۲۰) می‌توان نتیجه گرفت که H ثابت است. متداول‌ترین حالت که در مکانیک کلاسیک با آن مواجه می‌شویم، حالتی است که در آن انرژی جنبشی به شکل $m\dot{q}_i^2/2$ یا $p_i^2/2m$ بوده و انرژی پتانسیل تنها وابسته به مختصات باشند. در این شرایط، تابع انرژی که مقداری ثابت است، با انرژی کل برابر است.

حضور نیروی اصطکاک باعث می‌شود، انرژی سیستم نسبت به زمان ثابت نماند. در واقع در طی زمان، سیستم با محیط اطراف انرژی مبادله می‌کند. در شرایطی که نیروی اصطکاک از تابع اتلافی ریلی(بخش۲-۲-۴) قابل استنباط باشد، می‌توان نشان داد که تابع اتلافی با نرخ نزول H مرتبط است.

۲-۲-۴ معادلات حرکت سیستم ناپایستار با توجه به تابع اتلافی ریلی و لوری[1]

ساده‌ترین روش برای وارد کردن نیروی اتلافی (اصطکاک) در فرمول‌بندی لاگرانژی، معرفی تابع اتلافی ریلی $\mathcal{F}$ است [۸]. این تابع بگونه‌ای تعریف می‌شود که $-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}_i}$ – مولفهٔ i–ام نیروی اتلافی است. معادله حرکت در این حالت به صورت:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}_i} = 0, \qquad i = 1,2,\dots,n. \tag{۲۱-۲}$$

نوشته می‌شود. برای مثال اگر نیروی اصطکاک $\boldsymbol{F}$، تابع خطی از سرعت به شکل:

$$\boldsymbol{F} = -m\lambda \dot{\boldsymbol{r}}, \tag{۲۲-۲}$$

باشد. بنابراین $\mathcal{F}$ برابر با،

$$\mathcal{F} = \frac{m}{2}\lambda \dot{\boldsymbol{r}}^2, \tag{۲۳-۲}$$

می‌شود. در این رهیافت $2\mathcal{F}$ ، نشان‌دهنده میزان انرژی اتلافی ناشی از اصطکاک است، زیرا:

$$dw_f = -\boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{F}.\boldsymbol{v}dt = -m\lambda \dot{\boldsymbol{r}}^2\, dt. \tag{۲۴-۲}$$

لوری برای معرفی نیروی اتلافی، در تعریفی کلی‌تر از تعریف تابع اتلافی ریلی، مؤلفه‌های نیروی اتلافی را به صورت:

$$f_j = -k_j(x_1, x_2, \dots, x_N)g_j(\dot{x}_i), \tag{۲۵-۲}$$

در نظر گرفت که در آن k_jها توابعی مثبت از متغییرهای مستقل x_jها هستند و شرط:

$$\dot{x}_j g_j(\dot{x}_i) \geq 0, \tag{۲۶-۲}$$

برای آنها برقرار است. $x_j(t)$ ها مؤلفه‌های دکارتی در فضای پیکربندی N بعدی هستند،که با توجه به تبدیلات:

$$x_j = x_j(q_1, q_2, \dots, q_n). \tag{۲۷-۲-الف}$$

و

$$\dot{x}_j = \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial x_j}{\partial q_s}\dot{q}_s. \tag{۲۷-۲-ب}$$

می‌توان این مختصات را برحسب مختصات تعمیم‌یافته $q_j(t)$ها نوشت. همچنین، باتوجه به آنها می‌توان $\dot{x}_j(t)$ها را برحسب $\dot{q}_j(t)$ ها نوشت. بنابراین، نیروی تعمیم‌یافته لوری را می‌توان به صورت:

[1] Rayleigh and Lur'e Dissipative Functions

$$Q_s^L = -\sum_{j=1}^{N} k_j(x_1, x_2, \dots, x_N) g_j(\dot{x}_i) \frac{\partial x_j}{\partial q_s}, \qquad (۲-۲۸)$$

نوشت. با توجه به تبدیل (۲-۲۷-ب)، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial x_j}{\partial q_s}. \qquad (۲-۲۹)$$

با جایگذاری (۲-۲۹) در رابطهٔ (۲-۲۸)، Q_s^L را به شکل:

$$Q_s^L = -\sum_{j=1}^{N} k_j(x_1, x_2, \dots, x_N) g_j(\dot{x}_i) \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_s}, \qquad (۲-۳۰)$$

می‌توان نوشت. تابع اتلافی لوری $\mathcal{F}^L$، به شکل:

$$\mathcal{F}^L = \sum_{j=1}^{N} k_j(x_1, x_2, \dots, x_N) \int_0^{\dot{x}_j} g_j(y) dy, \qquad (۲-۳۱)$$

تعریف می‌شود. با توجه به تعریف (۲-۳۱) و رابطهٔ (۲-۳۰)، رابطهٔ بین تابع اتلافی و نیروی تعمیم‌یافته را می‌توان به صورت:

$$\frac{\partial \mathcal{F}^L}{\partial \dot{q}_s} = -Q_s^L, \qquad s = 1,2, \dots, N. \qquad (۲-۳۲)$$

در نظر گرفت.

اگر حالت خاصی از تعریف تابع اتلافی لوری (۲-۳۱) را به صورت:

$$g_j(\dot{x}_j) = \dot{x}_j, \qquad k_j = constant, \qquad (۲-۳۳)$$

در نظر بگیرید، آنگاه تابع اتلافی ریلی، (۲-۲۳) را می‌توان به دست آورد. اگر حرکت یک بعدی را در نظر بگیرید و شرایط (۲-۳۳) را در حالتی که تابع $g_j(\dot{x}_j)$، تابع مرتبه n-ام از $\dot{x}_j$ باشد (n عددی صحیح) اعمال کنید. نیروی اصطکاک باتوجه به رابطهٔ (۲-۲۲) به صورت:

$$F = -k|\dot{x}|^n, \qquad (۲-۳۴)$$

خواهد بود. به کمک روابط (۲-۳۰) و (۲-۳۱)، تابع اتلافی لوری و نیروی تعمیم‌یافته اتلافی لوری به ترتیب به صورت:

$$\mathcal{F}^L = \frac{k}{n+1} |\dot{x}|^{n+1}, \qquad (۲-۳۵)$$

$$Q^L = -k\dot{x}^n \, sgn(\dot{x}), \qquad (۲-۳۶)$$