بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

الگوریتم حل مساله برد عددی معکوس

استاد راهنما

دکتر محمود محسنی مقدم

استاد مشاور

دکتر عباس سالمی

مؤلف

مصطفی زاهد جهرمی

شهریور ماه ۱۳۹۰

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: مصطفی زاهد جهرمی — امضاء:

استاد راهنما: دکتر محمود محسنی مقدم — امضاء:

داور اول : — امضاء:

داور دوم: — امضاء:

نماینده تحصیلات تکمیلی: — امضاء:

تقدیم به

روح بزرگوار پدرم

و مادرم که با دستان گرم و پر امید خویش همچون فرشته ای

است که بر جانم سایه گسترده است

و همسرمهربانم که با همکاری و محبت خالصانه خود، مرا به

سپاس خدا مدیون می سازد.

تشکر و قدردانی

سپاس آفریدگاری را که نامش کلید گنج حکمت هاست و به انسان درکی داد تا از روح خویش به قلم جان بخشد که بنویسد. بخواند و بیش از بیش در آثار جهان آفرینش بیاندیشد و از صبح نور بخشش بنوشد تا جهان را کتابی کند از آیات مصورش. مرا تقدیری داد تا با اختیار خویش از دریای علم او جیره خواری باشم و قلم در دست بگیرم، این نوشتار را فراهم آورم تا سپاس خدای را به جا آورده باشم.

اینجانب بر خود تکلیف می دانم از زحمات و راهنمایی های استاد عزیز و گران مهر جناب آقای دکتر محمود محسنی مقدم کمال تشکر و قدردانی را بنمایم، که با وجود این معلم دلسوز پیمودن راه بر من هموار شد تا این نوشته جمع آوری شود. بدون شک نام استاد گرامی جناب آقای دکتر عباس سالمی از کلاس های جبر خطی و آنالیز ماتریسی برای این حقیر یادگاری است بس ارزشمند که از لوح کلاس درس بر لوح دلم به یادبود ماندگار خواهد ماند. سلامتی و سعادت شما را از خداوند خواستارم.

از حمایت های مالی قطب جبر خطی و بهینه سازی دانشگاه شهید باهنر کرمان تشکر و قدردانی می نمایم.

مصطفی زاهد جهرمی

شهریور ۹۰

چکیده

برد عددی ماتریس مربعی A را با $W(A)$ نشان داده و به این صورت تعریف می کنیم $W(A)=\{x^*Ax : x\in S^1\}$، که در آن S^1 گوی واحد است.

در سال **۲۰۰۹**، راسل کاردن مساله برد عددی معکوس را به این صورت مطرح کرده است:

برای نقطه $z\in W(A)$، بردار $x\in S^1$ را به گونه ای می یابیم که $z=x^*Ax$.

در این پایان نامه، الگوریتمی برای حل مساله برد عددی معکوس ارائه می دهیم.

کلمات کلیدی: *برد عددی، مساله معکوس، بردار مولد، روش توسعه نرم افزار.*

فهرست مطالب

ط

لیست تصاویر

مقدمه

مفهوم برد عددی ماتریس ها اولین بار در سال ۱۹۱۸ توسط توپلیتز [۱] و هاسدورف [۲] مطرح و در همان سال تحدب آن توسط این دو شخص ثابت شد. این نتیجه اساسی راه را برای مطرح کردن بسیاری از مسائل هموار نمود، به گونه ای که نزدیک ۷۰ سال است مساله رسم هندسی و یافتن مرزهای برد عددی مورد مطالعه قرار گرفته است.

در سال ۲۰۰۹ ، راسل کاردن [۳] استاد بخش ریاضی کاربردی و محاسبات دانشگاه رایس [۴] آمریکا، مساله ای تحت عنوان برد عددی معکوس مطرح کرد و با ارائه الگوریتمی ویژگی هندسی آن را مورد مطالعه و بررسی قرار داد. در این پایان نامه به تحلیل و توصیف این مساله می پردازیم. برای این منظور مطالب را به این گونه طبقه بندی می کنیم

در فصل اول مفاهیم اساسی جبر خطی مقدماتی و آنالیز ماتریسی را باز خوانی می کنیم. همچنین بعضی از نمادهای استفاده شده در فصل های بعد را شرح می دهیم. موضوعات مورد بحث در این فصل عبارت اند از: فضای برداری، ضرب داخلی، تبدیل خطی، مقدار ویژه و تجزیه های ماتریسی. برای جزئیات بیشتر و اثبات، می توانید به مراجع داده شده مراجعه نمایید [۱,۵].

در فصل دوم مفهوم و خواص مقدماتی برد عددی ماتریس ها را بیان می کنیم، سپس به

---

[۱] Toeplitz

[۲] Hausdorff

[۳] Russell Carden

[۴] Rice University

بررسی ویژگی های هندسی آن می پردازیم و نشان می دهیم برد عددی ماتریس های ۲×۲ بیضی است. همچنین یکی از نتایج اساسی و مشهور در ارتباط با برد عددی یعنی قضیه تحدب توپلیتز- هاسدورف را مطرح می کنیم.

سرانجام الگوریتم جانسون [۵] را که یک روش عددی برای تخمین و رسم برد عددی است، شرح می دهیم [۹, ۱۱].

در فصل سوم الگوریتم حل مساله برد عددی معکوس را معرفی می کنیم و سپس به کمک روش توسعه نرم افزار به تحلیل مساله می پردازیم. همچنین حدس یوهلیگ [۶] را که بعدا توسط کاردن ثابت شده است، بیان می کنیم .

سرانجام پیچیدگی الگوریتم را به دست می آوریم [۴, ۷].

بی شک این پایان نامه خالی از اشکال نخواهد بود. نظرات اصلاحی همه خوانندگان را به دیده منت می نهیم و با کمال سپاس و قدردانی مورد استفاده قرار خواهیم داد.

zahed.jahromi@gmail.com

---

[۵] Johnson's algorithm

[۶] Uhlig's conjeture

فصل ۱

مروری بر جبرخطی

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا مفاهیم و نتایج جبر خطی مقدماتی را به طور مختصر و بدون اثبات مرور می کنیم. موضوعات مورد بحث در این فصل عبارت اند از: فضای برداری، ضرب داخلی، تبدیل خطی، مقدار ویژه و تجزیه های ماتریسی. برای جزئیات بیشتر و اثبات، می توانید به مراجع [۲, ۱۲] مراجعه نمایید.

۲.۱ فضای برداری

فرض کنید V مجموعه ای از اشیا و F یک میدان باشد. در این نوشتار، میدان F، میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و یا میدان اعدادمختلط $\mathbb{C}$ درنظرگرفته شده است.

تعریف ۱.۲.۱. یک فضای برداری تشکیل شده است از

۱. یک میدان F از اسکالرها؛

۲. یک مجموعه V از اشیائی به نام بردارها؛

۳. یک عمل به نام جمع برداری که به هر جفت از بردارهای α و β از V بردار $\alpha+\beta$ از V را که مجموع α و β نامیده می شود وابسته می سازد با این شرایط که

(الف) جمع جابجایی است، یعنی $\alpha+\beta=\beta+\alpha$؛

(ب) جمع شرکت پذیر است، یعنی $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$؛

(ج) برداری یکتا به نام بردار صفر که با 0 نشان داده شده در V موجود است به طوری که به ازای هر α در V، $\alpha+0=\alpha$؛

(د) به ازای هر بردار α در V، برداری یکتا به نام $-\alpha$ در V موجود است به طوری که $\alpha+(-\alpha)=0$؛

۴. یک عمل به نام ضرب اسکالری که به هر اسکالر c از F و هر بردار α از V بردار αV در V را که حاصل ضرب c و α نامیده می شود وابسته می سازد با این شرایط که

(الف) به ازای هر α در V، $1\alpha=\alpha$؛

(ب) $(c_1c_2)\alpha=c_1(c_2\alpha)$؛

(ج) $c(\alpha+\beta)=c\alpha+c\beta$؛

(د) $(c_1+c_2)\alpha=c_1\alpha+c_2\alpha$.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $S=\{v_1,v_2,...,v_k\}$ زیر مجموعه ای از فضای برداری V روی یک میدان F باشد. گستره S را با $<S>$ نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$Span<S>=\{c_1v_1+c_2v_2+...+c_kv_k : k\in\mathbb{N}, c_i\in F, v_i\in S\}.$$

به وضوح دیده می شود که $<S>$ یک فضای برداری روی F است.

اگر $V=<S>$، آنگاه هر بردار V را می توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای S نوشت.

تعریف ۳.۲.۱. یک پایه از فضای برداری V، یک مجموعه مستقل خطی است که V را تولید کند.

ملاحظه ۴.۲.۱. اگر V داری پایه ای برداری مانند $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ باشد، آنگاه گوییم V از بعد n است و می نویسیم $dimV = n$.

ملاحظه ۵.۲.۱. بعد فضای برداری صفر را صفر تعریف می کنیم.

ملاحظه ۶.۲.۱. اگر هیچ مجموعه متناهی، V را تولید نکند، V دارای بعد نامتناهی است.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، یک پایه مرتب برای V دنباله ای متناهی از بردارهای مستقل خطی است که V را پدید آورند.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ یک پایه مرتب برای فضای برداری V با بعد n باشد. دراین صورت هر بردار x از V را می توان به طور منحصر به فرد یک ترکیب خطی از بردارهای پایه به فرم

$$x = x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_nu_n$$

نوشت، که در آن x_i ها اسکالر هستند. n تایی $(x_1, ..., x_n)$ مختصات بردار x نسبت به پایه نامیده می شود.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید W یک زیر مجموعه از فضای برداری V باشد. اگر W به همراه جمع برداری و ضرب اسکالری V یک فضای برداری تشکیل دهد، آنگاه W یک زیر فضای برداری از V نامیده می شود.

قضیه ۱۰.۲.۱. *فرض کنید V یک زیر فضای برداری با بعد متناهی و V_1 و V_2 زیر فضاهایی از V باشند. آنگاه*

$$dimV_1 + dimV_2 = dim(V_1 + V_2) + dim(V_1 \cap V_2).$$

۳.۱ ضرب داخلی

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ فضای برداری روی $\mathbb{C}$ باشد. در این صورت تابع $(.,.) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ را یک تابع ضرب داخلی مختلط می نامیم، هرگاه

۱. $(\alpha x + y, z) = \alpha(x, z) + (y, z)$ **برای هر** $x, y, z \in \mathcal{H}$ **و هر** $\alpha \in \mathbb{C}$،

۲. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ **برای هر** $x, y \in \mathcal{H}$،

۳. $(x, x) \geqslant ۰$ **برای هر** $x \in \mathcal{H}$ و $x = ۰$ **اگر و فقط اگر** $(x, x) = ۰$.

مثال ۲.۳.۱. فرض کنید

$$(x, y) = \sum_{i=۱}^{n} \overline{y_i} x_i, \quad \forall x = (x_۱, ..., x_n)^t, y = (y_۱, ..., y_n)^t \in \mathbb{C}^n.$$

در این صورت عمل دوتایی $(.,.)$ یک ضرب داخلی است.

تعریف ۳.۳.۱. در فضای ضرب داخلی $\mathcal{H}$ نرم بردار $x \in \mathcal{H}$ را به صورت $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ تعریف می کنیم و آن را نرم القا شده توسط ضرب داخلی می نامیم. همچنین بردار $x \in \mathcal{H}$ را بردار یکه (یا واحد) می گوییم، هر گاه $\|x\| = ۱$.

۴.۱ تبدیل خطی و مقادیر ویژه

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید V و W دو فضای برداری روی میدان F باشند. یک نگاشت $T : V \longrightarrow W$ یک تبدیل خطی از V به W نامیده می شود اگر برای هر $u, v \in V$ و $c \in F$ داشته باشیم

$$T(cu + v) = cT(u) + T(v).$$

مثال ۲.۴.۱. نگاشت $T : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ باضابطه

$$T(x, y) = (x + y, x - y)$$

یک تبدیل خطی است.

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنید T یک تبدیل از V به W باشد. زیر مجموعه

$$Im(A) = \{T(V) : v \in V\}$$

زیر فضایی از W است که تصویر یا فضای برد T و زیر مجموعه

$$ker(A) = \{v \in V : T(V) = \circ \in W\}$$

زیر فضایی از V است که هسته یا فضای پوچ T نامیده می شود.

تعریف ۴.۴.۱. فرض کنید T یک تبدیل خطی روی فضای برداری V با میدان $\mathbb{C}$ باشد. بردار ناصفر $v \in V$ را بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda \in \mathbb{C}$ می نامیم اگر

$$T(v) = \lambda v, v \neq \circ.$$

مجموعه مقادیر ویژه ماتریس A را طیف A نامیده و آن را با $\sigma(A)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۵.۴.۱. فرض کنید $A \in M_n$. اثر یا رد A را با trA نشان می دهیم و آن را صورت زیر تعریف می کنیم

$$trA = \lambda_۱ + \lambda_۲ + ... + \lambda_n.$$

در اینجا به بیان دو قضیه مهم می پردازیم، برای جزئیات بیشتر و اثبات می توانید به مرجع [۱] مراجعه نمایید.

قضیه ۶.۴.۱. *فرض کنید T یک تبدیل خطی از فضای برداری V با بعد n به فضای برداری W باشد. در این صورت*

$$dimIm(A) + dimKer(A) = n.$$

قضیه ۷.۴.۱. *بردار های ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز، مستقل خطی هستند.*

ملاحظه ۸.۴.۱. برای یافتن مقادیر ویژه، لازم است که $T(v) = \lambda v$ را تحت یک پایه به

دستگاه معادلاتی مانند $Ax = \lambda x$ تبدیل کنیم. بنابراین، مقادیر ویژه T عبارت اند از همه λ هایی از F که صفرهای چندجمله ای مشخصه

$$det(\lambda I - A) = \circ$$

هستند.

۵.۱ ماتریس

در این نوشتار مجموعه همه ماتریس های مربعی و همچنین مجموعه همه ماتریس های $m\times n$ مختلط را به ترتیب با نماد M_n و M_{mn} نشان می دهیم.

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنید $A = (a_{ij}) \in M_{mn}$. دراین صورت ترانهاده A را با A^t نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$A^t = (a_{ji}) \in M_{nm}.$$

تعریف ۲.۵.۱. فرض کنید $A = (a_{ij}) \in M_{mn}$. در این صورت مزدوج ماتریس A را با $\overline{A}$ نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}}) \in M_{mn}.$$

فرض کنید $A = (a_{ij}) \in M_{mn}$. دراین صورت ترانهاده مزدوج ماتریس A را با $\overline{A}^t$ یا با A^* نشان می دهیم.

تعریف ۳.۵.۱. فرض کنید $A = (a_{ij}) \in M_n$. دراین صورت A را به ترتیب قطری و بالا مثلثی گوییم هرگاه $a_{ij} = \circ, i \neq j$ و $a_{ij} = \circ, i > j$.

تعریف ۴.۵.۱. فرض کنید $A \in M_n$. دراین صورت A را به ترتیب متقارن و هرمیتی گوییم هرگاه $A^t = A$ و $A^* = A$.

تعریف ۵.۵.۱. اگر $A \in M_n$، $I = \{۱, ۲, ..., n\} \supseteq \{j_۱, ..., j_k\} = J$ و

$$۱ \leq j_۱ < j_۲ < ... < j_k \leq n,$$

آنگاه $A(J)$ را زیر ماتریس تشکیل شده از سطرها و ستون های $j_۱$ ام،...، j_k ام ماتریس A می گیریم.

تعریف ۶.۵.۱. فرض کنید $A \in M_{n_۱}$ و $B \in M_{n_۲}$. مجموع مستقیم A و B را با نماد $A \oplus B$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

واضح است که $A \oplus B \in M_{n_۱+n_۲}$.

قضیه ۷.۵.۱. *فرض کنید $A \in M_{mn}$. در این صورت ماتریس های $P \in M_m$ و $Q \in M_n$، از ضرب ماتریس های مقدماتی، وجود دارند به طوری که*

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}. \qquad (۱.۱)$$

ملاحظه ۸.۵.۱. ماتریس افراز شده (۱ ۰ ۱) را به صورت $I_r \bigoplus O$ می نویسیم که عبارت است از مجموع مستقیم I_r و O که توسط A به طور منحصر به فرد مشخص می شود. عدد r در ماتریس همانی I_r رتبه A نامیده می شود و با $rank(A)$ نشان می دهیم. اگر $A = O$، آنگاه $rank(A) = ۰$. همچنین به سادگی می توان نشان داد که

$$rank(A^t) = rank(\overline{A}) = rank(A^*) = rank(A).$$

تعریف ۹.۵.۱. فرض کنید $U \in M_n$. ماتریس U را یکانی گوییم هرگاه $U^*U = UU^* = I_n$.

برای هر ماتریس یکانی U، روابط،$U^* = U^{-۱}$ و $|detU| = ۱$ برقرار هستند.

قضیه ۱۰.۵.۱. (*خواص ماتریس های یکانی*). *فرض کنید $U \in M_n$ یک ماتریس یکانی*