دانشگاه زنجان

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

برخی خواص حلقه‌های تعمیم یافته‌ی توابع اندازه‌پذیر و پیوسته

نگارش:

محمود فیلو

استاد راهنما:

دکتر سعید مقصودی

استاد مشاور:

دکتر محمدعلی اسم‌خانی

مهر ۱۳۹۱

فهرست مطالب

چکیده

فرض کنید $\mathcal{M}(X,\mathcal{A})$ خانوادهٔ تمام توابع حقیقی مقدار f روی X باشد که برای هر مجموعهٔ بازU از $\mathbb{R}$، $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$. در این پایان‌نامه برخی خواص جبرهای توابع حقیقی مقدار را بررسی می کنیم و به این سوال پاسخ می دهیم که کدام زیرمجموعه‌ها و زیرحلقه‌های توابع حقیقی را می‌توان به صورت $\mathcal{M}(X,\mathcal{A})$ که $\mathcal{A}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X است، نوشت. واز طرف دیگر زیرمجموعه‌ها یا زیرحلقه‌های به شکل $\mathcal{M}(X,\mathcal{A})$را مشخص می‌نماییم. علاوه بر این‌ها برخی ویژگی‌های حلقه‌های توابع پیوسته و اندازه‌پذیر را نیز بررسی خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: *حلقهٔ توابع پیوسته ، حلقهٔ توابع اندازه‌پذیر ، حلقهٔ منظم ، حلقهٔ $\aleph_0$- خود تزریقی ، حلقهٔ $\aleph_0$- پیوسته.*

پیشگفتار

یکی از راه‌های شناخت بیشتر ویژگی‌های توابع پیوسته و اندازه‌پذیر مجهز کردن آن‌ها به ساختارهای جبری است. که این امر با اعمال جمع و ضرب نقطه‌ای روی مجموعه‌هایی از این توابع میسّر می‌شود. در زمینهٔ حلقه‌های توابع پیوسته و اندازه‌پذیر افراد مختلفی مطالعات و کارهای فراوانی انجام داده‌اند، که از جمله می‌توان به گیلمن [۱] ،هالموس [۲] و هَجر [۳] اشاره کرد. همچنین کرم‌زاده و اخیراً ممتحن و هنریکسن [۴] برخی خواص جبرهای توابع پیوسته و اندازه‌پذیر را مورد بررسی قرار داده‌اند. ما نیز در این پایان‌نامه قصد داریم برخی خواص جبرها و حلقه‌های توابع پیوسته و اندازه‌پذیر را مورد بررسی قرار دهیم.

بعد از جمع‌آوری مقدّمات لازم برای فهم این پایان‌نامه، در فصل دوم به بررسی خواص توابع پیوسته و اندازه‌پذیر می‌پردازیم. همچنین مفهوم اندازهٔ لبگ را در فصل دوم جای داده‌ایم. در فصل سوم به بررسی ویژگی‌های جبری حلقه‌های توابع پیوسته و اندازه‌پذیر می‌پردازیم. در فصل چهارم ویژگی‌های σ-جبرهای ایجاد کنندهٔ حلقه‌های توابع حقیقی-مقدار را بررسی می‌کنیم. همچنین مثال‌های مختلفی از این نوع حلقه‌ها را می‌آوریم.

---
[۱] Gillman
[۲] Halmos
[۳] Hager
[۴] Henriksen

فصل ۱

مفاهیم و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱. الف) فرض کنیم Σ یک مجموعهٔ ناتهی باشد. رابطهٔ $\leq$ روی Σ را یک رابطهٔ ترتیب جزئی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $a, b, c \in \Sigma$ شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) $a \leq a$.

(۲) اگر $a \leq b$ و $b \leq a$ آنگاه $a = b$.

(۳) اگر $a \leq b$ و $b \leq c$ آنگاه $a \leq c$.

ب) فرض کنیم S مجموعه‌ای مرتب (مجموعه‌ای که در آن ترتیب خاصی مقرر شده باشد)، $E \subseteq S$ و E از بالا کراندار باشد. همچنین عنصری مانند $\alpha \in S$ با خواص زیر موجود باشد

(۱) α یک کران بالایی E باشد،

(۲) هرگاه $\gamma < \alpha$، آنگاه γ یک کران بالایی E نباشد.

در این صورت، α را کوچکترین کران بالایی E می‌نامیم و می‌نویسیم

$$\alpha = \sup E$$

بزرگترین کران پایینی مجموعهٔ E که از پایین کراندار است به همین نحو تعریف می‌شود. عبارت $\alpha = \inf E$، یعنی α یک کران پایینی E است و هیچ βیی با شرط $\alpha < \beta$ کران پایینی E نمی‌باشد.

پ) فرض کنید (a_n) دنباله‌ای در $[-\infty, \infty]$ باشد، قرار می‌دهیم

$$b_k = \sup\{a_k, a_{k+۱}, a_{k+۲}, ...\} \quad (k = ۱, ۲, ۳, ...) \qquad (۱)$$

و

$$\beta = \inf\{b_۱, b_۲, b_۳, ...\} \qquad (۲)$$

β را حد بالایی (a_n) نامیده و می‌نویسیم

$$\beta = \limsup_{n} a_n.$$

حد پایینی به همین نحو تعریف می‌شود: کافی است در (۱) و (۲) sup و inf را با یکدیگر تعویض کنیم.

ت) مجموعهٔ جزئاً مرتب A یک شبکه نامیده می شود هرگاه برای هر aو$b \in A$، $a \wedge b$ و $a \vee b$ در A موجود باشند؛ که در آن

$$a \wedge b = \inf\{a, b\} \quad \text{و} \quad a \vee b = \sup\{a, b\} \ .$$

ث) زیرمجموعهٔ S زیرشبکه‌ای از A است هرگاه برای هر aو$b \in S$، عناصر $a \wedge b$ و $a \vee b$ از A متعلق به S باشند (این کافی نیست که a و b یک سوپریمم و اینفیمم در S داشته باشند).

۱.۱ حلقه و جبر مجموعه‌ها

تعریف ۲.۱. یک حلقه(حلقهٔبولی[۱]) از مجموعه‌ها عبارت است از یک ردهٔ غیرتهی $\mathcal{R}$ از مجموعه‌ها که اگر $E, F \in \mathcal{R}$، آنگاه $E \backslash F \in \mathcal{R}$ و $E \cup F \in \mathcal{R}$. به عبارت دیگر یک حلقه یک ردهٔ غیرتهی از مجموعه‌ها است که تحت اعمال اجتماع و تفاضل بسته باشد.

مجموعهٔ تهی عضو هر حلقه است. زیرا اگر $E \in \mathcal{R}$، آنگاه $\emptyset = E \backslash E \in \mathcal{R}$.

تعریف ۳.۱. یک جبر(جبربولی) از مجموعه‌ها عبارت است از یک ردهٔ غیرتهی $\mathcal{R}$ از مجموعه‌ها که

(الف) اگر $E, F \in \mathcal{R}$، آنگاه $E \cup F \in \mathcal{R}$.

(ب) اگر $E \in \mathcal{R}$، آنگاه $E' \in \mathcal{R}$.

چون $E \backslash F = E \cap F' = (E' \cup F)'$، بنابراین هر جبر یک حلقه نیز هست.

قضیه ۴.۱. *اگر E رده‌ای از مجموعه‌ها باشد، در این صورت حلقهٔ یکتای $\mathcal{R}_\circ$ موجود است که $E \subset \mathcal{R}_\circ$، به طوری که اگر $\mathcal{R}$ حلقهٔ دیگری باشد که شامل E است، آنگاه $\mathcal{R}_\circ \subset \mathcal{R}$. حلقهٔ $\mathcal{R}_\circ$ کوچکترین حلقهٔ شامل E است که حلقهٔ تولید شده توسط E نامیده می‌شود و آن را به $\mathcal{R}(E)$ نمایش می‌دهیم.*

برهان. قضیه ۵.۳ از [۲۴] را ببینید. □

---
[۱] Boole

قضیه ۵.۱. *اگر E رده‌ای از مجموعه‌ها باشد، در این صورت هر مجموعه در $\mathcal{R}(E)$ را می‌توان توسط یک اجتماع متناهی از مجموعه‌ها در E پوشاند.*

برهان. قضیهٔ ۸.۳ از [۲۴] را ببینید. □

قضیه ۶.۱. *اگر E یک ردهٔ شمارا از مجموعه‌ها باشد، در این صورت $\mathcal{R}(E)$ نیز شمارا است.*

برهان. به گزارهٔ ۱۲.۳ از [۲۴] رجوع کنید. □

تعریف ۷.۱. منظور از یک σ-حلقه عبارت است از ردهٔ غیرتهی $\mathcal{S}$ از مجموعه‌ها به طوری که

(الف) اگر $E \in \mathcal{S}$ و $F \in \mathcal{S}$ باشند، در این صورت $E \backslash F \in \mathcal{S}$.

(ب) اگر برای هر $i = ۱, ۲, ۳, \ldots$، $E_i \in \mathcal{S}$، آنگاه $\bigcup_{i=۱}^{\infty} E_i \in \mathcal{S}$.

به طور معادل، یک σ-حلقه ، یک حلقه است که تحت اجتماع شمارا بسته است.

اگر $\mathcal{S}$ یک σ-حلقه باشد، در این صورت تساوی $\bigcap_{i=۱}^{\infty} E_i = \mathcal{S} \backslash \bigcup_{i=۱}^{\infty} E_i$ نشان می‌دهد که $\bigcap_{i=۱}^{\infty} E_i \in \mathcal{S}$. پس یک σ-حلقه تحت عمل اشتراک شمارا بسته است.

اگر $\mathcal{S}$ یک σ-حلقه و برای $i = ۱, ۲, ۳, \ldots$، $E_i \in \mathcal{S}$ باشد، در این صورت

$$\liminf_i E_i = \cup_{j=۱}^{\infty} \cap_{i=j}^{\infty} E_i \quad \text{و} \quad \limsup_i E_i = \cap_{j=۱}^{\infty} \cup_{i=j}^{\infty} E_i$$

متعلق به $\mathcal{S}$ می‌باشند.

مشابه با حلقه‌ها برای σ-حلقه نیز اگر E رده‌ای از مجموعه‌ها باشد، در این صورت σ-حلقهٔ یکتایی شامل E وجود دارد که زیرمجموعهٔ هر σ-حلقه‌ای است که شامل E باشد. σ-حلقهٔ یکتای تولیدشده را با $\mathcal{S}(E)$ نمایش می‌دهیم که کوچکترین σ-حلقه‌ای است که شامل E است.

تعریف ۸.۱. ردهٔ غیرتهی $\mathcal{M}$ از مجموعه‌ها، یکنوا نامیده می‌شود اگر برای هر دنبالهٔ یکنوای (E_n) از مجموعه ها در $\mathcal{M}$، داشته باشیم$\lim_n E_n \in \mathcal{M}$. که در اینجا $\lim_n E_n$ حد مجموعه‌ای دنبالهٔ یکنوای (E_n) است.

با توجه به تعریف بالا، نتیجه می‌شود که ردهٔ تمام زیرمجموعه‌های X یک ردهٔ یکنواست و همچنین اشتراک هر مجموعه‌ای از رده‌های یکنوا، یکنواست.این مطلب برای حلقه‌ها و σ-حلقه‌ها نیز صادق است.

قضیه ۹.۱. *اگر E رده‌ای از مجموعه‌ها باشد، در این صورت ردهٔ یکنوای یکتای $\mathcal{M}_۰$ موجود است که $E \subset \mathcal{M}_۰$ ، به طوری که اگر $\mathcal{R}$ کلاس یکنوای دیگری باشد که شامل E است، آنگاه $\mathcal{R}_۰ \subset \mathcal{M}$. کلاس*

یکنوای $\mathcal{M}_0$ کوچکترین ردهٔ یکنوای شامل E می‌باشد که ردهٔ یکنوای تولید شده توسط E نامیده می شود و آن را به $\mathcal{M}(E)$ نمایش می‌دهیم.

برهان. به فصل ۶ از [۲۵] مراجعه کنید. □

قضیه ۱۰.۱. *هر σ-حلقه یک ردهٔ یکنواست و هر حلقهٔ یکنوا یک σ-حلقه است.*

برهان. به فصل ۶ از [۲۵] مراجعه کنید. □

۲.۱ مفاهیمی از نظریهٔ حلقه‌ها

تعریف ۱۱.۱. الف) مجموعهٔ $\mathcal{R}$ به همراه دو عمل $+$ و $\cdot$ را حلقه گوییم هرگاه $(\mathcal{R}, +)$ یک گروه و $\mathcal{R}$ نسبت به عمل $\cdot$ بسته و دارای خاصیت شرکت‌پذیری باشد و به‌علاوه برای هر $a, b \in \mathcal{R}$،

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \ , \qquad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$$

ب) گوییم حلقهٔ $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ جابجایی است هرگاه برای هر $a, b \in \mathcal{R}$، $a \cdot b = b \cdot a$ و همچنین گوییم حلقهٔ $\mathcal{R}$ یکدار است هرگاه برای هر $a \in \mathcal{R}$، $e \in \mathcal{R}$ موجود باشد به‌طوری‌که $a \cdot e = e \cdot a = a$.

در این پایان‌نامه همهٔ حلقه‌ها جابجایی و یکدار فرض شده‌اند.

تعریف ۱۲.۱. الف) هرگاه a و b دو عنصر ناصفر حلقهٔ $\mathcal{R}$ باشند به‌طوری‌که $ab = 0$، آنگاه a و b مقسوم‌علیه‌های صفر نامیده می‌شوند.

ب) حلقهٔ جابجایی $\mathcal{R}$ را یک قلمرو صحیح می‌نامند هرگاه $\mathcal{R}$ مقسوم‌علیه صفر نداشته باشد.

پ) حلقهٔ $\mathcal{R}$ حلقهٔ کاهش‌یافته نامیده می‌شود اگر عنصر پوچ‌توان نداشته باشد.

ت) حلقهٔ $\mathcal{R}$ را منظم گویند (به مفهوم فون نویمان[۲]) هرگاه برای هر $a \in \mathcal{R}$، $b \in \mathcal{R}$ وجود داشته باشد به طوری‌که $a = a^2 b$.

تعریف ۱۳.۱. الف) زیرحلقهٔ I از حلقهٔ $\mathcal{R}$ به طوری که

$$aI \subseteq I \quad \text{و} \quad Ib \subseteq I \quad \text{به ازای هر } a\text{و}b \in \mathcal{R}$$

ایده‌آل نامیده می‌شود.

[۲] Von Neumann

ب) اگر I و J ایده‌آل‌هایی در یک حلقهٔ $\mathcal{R}$ باشند، گوییم I در J اساسی است اگر $I \subseteq J$ و هر ایده‌آل غیرصفر داخل J، I را به‌طور غیربدیهی قطع کند یعنی، به ازای هر ایده‌آل K از J، $I \cap K \neq 0$. وقتی می‌گوییم I اساسی است به این معنی است که I در $\mathcal{R}$ اساسی است.

تعریف ۱.۱۴. فرض کنیم B زیرمجموعه‌ای از حلقهٔ $\mathcal{R}$ باشد، در این صورت پوچ‌ساز B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Ann(B) = \{r \in \mathcal{R} \mid rB = 0\}$$

تعریف ۱.۱۵. اگر I یک مجموعهٔ اندیس‌گذار و برای هر $i \in I$، $\mathcal{R}_i$ یک حلقه باشد، آنگاه حاصلضرب دکارتی $\prod_{i\in I} \mathcal{R}_i$ با اعمال جمع و ضرب مختصاتی

$$(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i) \ \text{و} \ (a_i).(b_i) = (a_i.b_i)$$

تشکیل یک حلقه می‌دهند. حلقهٔ حاصل، حاصلضرب مستقیم حلقه‌ها نامیده می‌شود.

حاصلضرب متناهی حلقه‌های $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, ..., \mathcal{R}_n$ به صورت $\mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \oplus ... \oplus \mathcal{R}_n$ نمایش داده می‌شود و جمع مستقیم حلقه‌های $\mathcal{R}_1$و....و$\mathcal{R}_n$ نامیده می‌شود.

اگر I ایده‌آلی در حلقهٔ کاهش‌یافتهٔ $\mathcal{R}$ باشد، در این صورت $I \oplus Ann(I)$ یک ایده‌آل اساسی در $\mathcal{R}$ است.

برای نشان دادن این موضوع فرض کنید J ایده‌آل غیرصفری در حلقهٔ $\mathcal{R}$ باشد. اگر $J.I = 0$، در این صورت $J \subseteq Ann(I)$ و در نتیجه $J \subseteq I \oplus Ann(I)$. اما اگر $J.I \neq 0$، در این صورت $J.I \subseteq I$ و $J.I \subseteq J$، در نتیجه $J.I \subseteq J \cap I$.

بنابراین I در $\mathcal{R}$ اساسی است اگر و تنها اگر $Ann(I) = 0$.

تعریف ۱.۱۶. فرض کنید $\mathcal{R}$ یک حلقه و M مجموعه‌ای ناتهی باشند. M را همراه با عمل جمع $+ : M \times M \longrightarrow M$ و ضرب در اسکالر $. : \mathcal{R} \times M \longrightarrow M$، $\mathcal{R}$-مدول چپ می‌نامند هرگاه

(۱) $(M, +)$ گروهی آبلی باشند،

(۲) به ازای هر دو عضو x و y از M و هر عضو r از $\mathcal{R}$، $r(x+y) = rx + ry$،

(۳) به ازای هر عضو x از M و هر دو عضو r و s از $\mathcal{R}$، $(r+s)x = rx + sx$،

(۴) به ازای هر عضو x از M و هر دو عضو r و s از $\mathcal{R}$، $(rs)x = r(sx)$،

(۵) به ازای هر عضو x از M، $1x = x$.

$\mathcal{R}$-مدول راست نیز به طور مشابه تعریف می‌شود. همچنین M را $\mathcal{R}$-مدول گویند هرگاه هم $\mathcal{R}$-مدول چپ و هم $\mathcal{R}$-مدول راست باشد.

تعریف ۱.۱۷. فرض کنید M و N دو $\mathcal{R}$-مدول باشند. تابع $\varphi : M \longrightarrow N$ را $\mathcal{R}$-همریختی می‌نامند هرگاه

(۱) برای هر $x, y \in M$، $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

(۲) برای هر $x \in M$ و $r \in \mathcal{R}$، $\varphi(rx) = r\varphi(x)$.

تعریف ۱.۱۸. الف) حلقهٔ $\mathcal{R}$، خود تزریقی ($\aleph_0$-خود تزریقی) نامیده می‌شود اگر هر همریختی مدولی $\varphi : I \longrightarrow \mathcal{R}$ را بتوان به همریختی مدولی $\tilde{\varphi} : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ توسیع داد، به‌طوری‌که I یک ایده‌آل (یک ایده‌آل به طور شمارا تولیدشده) در $\mathcal{R}$ است.

واضح است که هر حلقهٔ خود تزریقی، حلقهٔ $\aleph_0$-خود تزریقی است.

ب) حلقهٔ $\mathcal{R}$، $\aleph_0$-پیوسته نامیده می‌شود اگر هر ایده‌آل به طور شمارا تولیدشده از $\mathcal{R}$ در جمعوند مستقیمی از $\mathcal{R}$ اساسی باشد.

تعریف ۱.۱۹. الف) یک زیرمجموعه از حلقهٔ $\mathcal{R}$ متعامد نامیده می‌شود اگر ضرب هر دو عنصر مجزای آن صفر باشد.

ب) فرض کنید T و S زیرمجموعه‌های مجزایی از $\mathcal{R}$ باشند که اجتماع آن‌ها یک زیرمجموعهٔ متعامد از $\mathcal{R}$ باشد. گوییم عضو $a \in \mathcal{R}$، S را از T تفکیک می‌کند. هرگاه

(۱) برای هر $s \in S$، $s^2 a = s$.

(۲) $a \in Ann(T)$.

لم ۱.۲۰. *اگر $\mathcal{R}$ یک حلقهٔ کاهش‌یافته باشد، در این صورت شرایط زیر معادل‌اند.*

(۱) $\mathcal{R}$ خود تزریقی ($\aleph_0$-خود تزریقی) است.

(۲) $\mathcal{R}$ یک حلقهٔ منظم است و وقتی که S و T دو زیر مجموعهٔ مجزا از $\mathcal{R}$ باشند که اجتماع آن‌ها یک زیرمجموعهٔ متعامد (شمارا) از $\mathcal{R}$ است، در این صورت $a \in \mathcal{R}$ وجود دارد که S را از T تفکیک می کند.

برهان. قضیهٔ ۲.۲ از [۱۴] را ببینید. □

تعریف ۱.۲۱. فرض کنید V و W دو فضای برداری بر روی میدان F باشند. یک تبدیل خطی از V به W تابعی است مانند $T : V \longrightarrow W$ که به ازای هر $\alpha, \beta \in V$ و هر $c \in F$

$$T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta).$$

تعریف ۱.۲۲. الف) حلقهٔ $\mathcal{R}$ را حلقهٔ تقسیم (بخشی) می‌نامند هرگاه هر عضو غیرصفر $\mathcal{R}$ دارای معکوس ضربی باشد. در واقع هر میدان یک حلقهٔ تقسیم تعویض‌پذیر است.

ب) یک حلقهٔ خطی کامل راست، حلقه‌ای است متشکل از تمام تبدیلات خطی از هر فضای برداری روی یک حلقهٔ تقسیم. واضح است که حلقهٔ خطی کامل، جابجایی است اگر و فقط اگر با یک میدان یکریخت باشد.

قضیه ۱.۲۳. (***قضیه فایت*** [۳]) *حلقهٔ $\mathcal{R}$ با یک حاصلضرب مستقیم از حلقه‌های خطی کامل یکریخت است اگر و فقط اگر $\mathcal{R}$ یک حلقهٔ منظم و خود تزریقی باشد.*

برهان. به قضیهٔ ۹.۱۳ از [۸]مراجعه کنید. □

گزاره ۱.۲۴. *یک حلقهٔ منظم $\aleph_0$- پیوسته شامل هیچ جمع مستقیم نامتناهی از ایده‌آل‌های ناصفر دو به دو یکریخت نیست.*

برهان. گزارهٔ ۱۴.۲۰ از [۸] را ببینید. □

قضیه ۱.۲۵. *فرض کنیم $\varphi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}'$ یک همریختی حلقه‌ها با هستهٔ H باشد. در این صورت هم‌مجموعه‌های جمعی H یک حلقه مانند $\mathcal{R}/H$ تشکیل می دهند که اعمال دو تایی آن با انتخاب نماینده تعریف می‌شوند. یعنی مجموع دو هم‌مجموعه به صورت*

$$(a + H) + (b + H) = (a + b) + H$$

و حاصلضرب دو هم‌مجموعه به صورت

$$(a + H)(b + H) = (ab) + H$$

تعریف می شود. حلقهٔ حاصل حلقهٔ عاملی (خارج‌قسمتی) نامیده می‌شود. همچنین نگاشت $\mu : \mathcal{R}/H \longrightarrow Im\,\varphi$ با تعریف $\mu(a + H) = \varphi(a)$ یک یکریختی است.

---
[۳] Faith

برهان. برهان قضیهٔ ۷.۱.۶ از [۲۷] را ببینید. □

گزاره ۲۶.۱. *هر حلقهٔ عاملی از یک حلقهٔ $\aleph_0$-خود تزریقی منظم، حلقه‌ای $\aleph_0$-خود تزریقی است.*

برهان. قضیهٔ ۹.۳۱ از [۸] را ببینید. □

تعریف ۲۷.۱. (الف) ایده‌آل حقیقی M از $\mathcal{R}$ یک ایده‌آل ماکزیمال $\mathcal{R}$ است اگر تنها ایده‌آل‌های شامل M، خود M و $\mathcal{R}$ باشند.

(ب) ایده‌آل حقیقی m از $\mathcal{R}$ یک ایده‌آل مینیمال $\mathcal{R}$ است اگر تنها ایده‌آل‌های مشمول در m، خود m و ۰ باشند.

لم ۲۸.۱. (***لم برائر***[۴]) *هر ایده‌آل مینیمال در حلقهٔ تحویل‌پذیر $\mathcal{R}$ بوسیلهٔ عنصر خودتوان e تولید می شود.*

برهان. صفحهٔ ۱۷۲ از [۱۷] را ببینید. □

تعریف ۲۹.۱. ایده‌آل $N \neq \mathcal{R}$ در حلقهٔ تعویض‌پذیر $\mathcal{R}$ یک ایده‌آل اول است اگر برای هر $a, b \in \mathcal{R}$ رابطهٔ $ab \in N$ ایجاب کند $a \in N$ یا $b \in N$.

تعریف ۳۰.۱. ایده‌آل A از حلقهٔ $\mathcal{R}$ یک ایده‌آل نیمه‌اول است، هرگاه برای عدد صحیح مثبت k و x متعلق به $\mathcal{R}$ چنانچه x^k متعلق به A باشد، آنگاه x نیز متعلق به A باشد.

قضیه ۳۱.۱. *به ازای حلقهٔ تعویض‌پذیر $\mathcal{R}$ احکام زیر برقرارند:*

(۱) ایده‌آل M از $\mathcal{R}$ ماکزیمال است اگر و فقط اگر $\mathcal{R}/M$ میدان باشد.

(۲) هر ایده‌آل ماکزیمال $\mathcal{R}$ یک ایده‌آل اول است.

برهان. بخش ۲.۶ از [۲۷] را ببینید. □

[۴] Brauer

فصل ۲

توابع اندازه‌پذیر و پیوسته

در این فصل علاوه بر تعریف مفاهیم بسیار اساسی پیوستگی و اندازه‌پذیری، به بررسی برخی خواص توابع پیوسته و اندازه‌پذیر می‌پردازیم که در مطالعهٔ این نوع توابع ومشخص‌سازی آن‌ها بسیار سودمند هستند. همچنین برخی تعاریف و قضایای مورد نیاز برای فصل‌های بعد را می‌آوریم.

۱.۲ اندازه و توابع اندازه‌پذیر

تعریف ۱.۲. فرض کنیم X یك مجموعه باشد.

(الف) خانوادهٔτ از زیرمجموعه‌های X را یک توپولوژی درX گوییم هرگاه دارای خواص زیر باشد.

(۱) $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$.

(۲) اگر به ازای $i = ۱, ۲, ..., n$ ، $V_i \in \tau$، آنگاه $V_۱ \cap V_۲ \cap ... \cap V_n \in \tau$.

(۳) اگر (V_α) خانوادهٔ دلخواهی از اعضای τ باشد، آنگاه $\cup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

(ب) هرگاه τ یک توپولوژی در X باشد، آنگاه X را یک فضای توپولوژیک و اعضای τ را مجموعه‌های باز در X می‌نامند.

(پ) هرگاه X و Y دو فضای توپولوژیک بوده و f نگاشتی از X به توی Y باشد، آنگاه گوییم f پیوسته است اگر به ازای هر مجموعهٔ باز U در Y، $f^{-۱}(U)$ مجموعهٔ بازی در X باشد.

تعریف ۲.۲. فرض کنیم X یك مجموعه باشد.

(الف) خانوادهٔ $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X را یك σ-جبر در X گوییم هرگاه دارای خواص زیر باشد.

(۱) $X \in \mathcal{A}$.

(۲) اگر $A \in \mathcal{A}$، آن‌گاه $A^c \in \mathcal{A}$، که در آن A^c متمم A نسبت به X است.

(۳) اگر $A_۱, A_۲, \cdots \in \mathcal{A}$، آن‌گاه $\cup_{n=۱}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(ب) اگر $\mathcal{A}$ یك σ-جبر در X باشد، آن‌گاه $(X, \mathcal{A})$ را یك فضای اندازه‌پذیر و اعضای $\mathcal{A}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می‌نامیم.

(پ) هرگاه X یک فضای اندازه‌پذیر و Y یک فضای توپولوژیک و f نگاشتی از X به توی Y باشد، آنگاه گوییم f اندازه‌پذیر است اگر به ازای هر مجموعهٔ باز U در Y، $f^{-1}(U)$ مجموعهٔ اندازه‌پذیری در X باشد.

(ت) هرگاه E یك مجموعهٔ اندازه‌پذیر در X باشد و

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

آن‌گاه χ_E یك تابع اندازه‌پذیر است. χ_E را تابع مشخصهٔ مجموعهٔ E می‌نامیم.

قضیه ۳.۲. *فرض کنیم Y و Z فضاهای توپولوژیک بوده و $g : Y \longrightarrow Z$ پیوسته باشد.*

(الف) هرگاه X یک فضای توپولوژیک و $f : X \longrightarrow Y$ پیوسته بوده و $h = g \circ f$ آنگاه $h : X \longrightarrow Z$ پیوسته است.

(ب) هرگاه X یک فضای اندازه‌پذیر و $f : X \longrightarrow Y$ اندازه‌پذیر بوده و $h = g \circ f$ آنگاه $h : X \longrightarrow Z$ اندازه‌پذیر است.

برهان. فرض کنیم V مجموعهٔ باز دلخواهی در Z باشد، از پیوستگی g نتیجه می‌شود $g^{-1}(V)$ مجموعهٔ بازی در Y است. همچنین داریم:

$$h^{-1}(V) = (g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$$

اگر f پیوسته باشد، $h^{-1}(V)$ باز است و (الف) را اثبات می‌کند. اگر f اندازه‌پذیر باشد، $h^{-1}(V)$ اندازه‌پذیر است و (ب) را ثابت خواهد کرد. $\square$

قضیه ۴.۲. *فرض کنیم u و v توابعی اندازه‌پذیر وحقیقی-مقدار بر روی فضای اندازه‌پذیر X بوده و Φ یک نگاشت پیوسته از صفحه به توی فضای توپولوژیک Y باشد، و به ازای $x \in X$ تعریف می‌کنیم*

$$h(x) = \Phi(u(x), v(x))$$

در این صورت $h : X \longrightarrow Y$ اندازه‌پذیر است.

برهان. قرار می‌دهیم $f(x) = (u(x), v(x))$. f مجموعهٔ X را به توی صفحه می‌نگارد. چون $h = \Phi \circ f$ ، بنابر قضیه ۳.۲ کافی است اندازه‌پذیری f را ثابت کنیم.

هرگاه R یک مستطیل باز در صفحه باشد که اضلاعش موازی محور هایند. آنگاه R حاصلضرب دکارتی دو بازهٔ باز I_1 و I_2 است، و

$$f^{-1}(R) = u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2)$$

که طبق فرض ما راجع به u و v اندازه‌پذیر است. هر مجموعهٔ باز V در صفحه اجتماع شمارش‌پذیری از این مستطیل‌های R_i است، و چون

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(R_i)$$

$f^{-1}(V)$ اندازه‌پذیر است. $\square$

قضیه ۵.۲. *اگر f و g توابع اندازه‌پذیر باشند، در این صورت $f + g$ و $f.g$ نیز اندازه‌پذیرند.*

برهان. تابع پیوستهٔ $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Phi(s,t) = s + t$$

همچنین تابع $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$h(x) = \Phi(f(x), g(x)) = f(x) + g(x)$$

بنابر قضیهٔ ۴.۲، چون Φ پیوسته و f و g توابع اندازه‌پذیر هستند، $h = f + g$ نیز اندازه‌پذیر است.

برای اثبات قسمت دوم، تابع پیوستهٔ $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Psi(s,t) = s.t$$

همچنین تابع $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$h(x) = \Phi(f(x), g(x)) = f(x).g(x)$$

بنابر قضیه ۴.۲، چون Ψ پیوسته و f و g توابع اندازه پذیر هستند، $h = f.g$ نیز اندازه پذیر است. $\square$

قضیه ۶.۲. *اگر Σ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، کوچکترین σ-جبر در X مانند $\mathcal{A}^*$ موجود است به طوری که $\Sigma \subset \mathcal{A}^*$.*

برهان. فرض کنیم Ω خانوادهٔ تمام σ-جبرهای $\mathcal{A}$ در X باشد که شامل Σ اند. چون گردایهٔ تمام زیرمجموعه‌های X یک چنین σ-جبری است، Ω تهی نیست. فرض کنیم $\mathcal{A}^*$ اشتراک تمام $\mathcal{A} \in \Omega$ باشد. واضح است که $\Sigma \subseteq \mathcal{A}^*$ و $\mathcal{A}^*$ در هر σ-جبر در X که شامل Σ باشد قرار دارد. به سادگی خاصیت‌های σ-جبر برای $\mathcal{A}^*$ قابل اثبات است که برهان را تمام می‌کند. $\square$

تعریف ۷.۲. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. بنابر قضیه ۶.۲ کوچکترین σ- جبر مانند $\mathcal{B}$ در X هست به طوری که هر مجموعهٔ باز در X متعلق به $\mathcal{B}$ است. اعضای $\mathcal{B}$ را مجموعه‌های بورل [1] X می‌نامند.

چون $\mathcal{B}$ یک σ-جبر است، می‌توان X را یک فضای اندازه‌پذیر گرفت که در آن مجموعه‌های بورل نقش مجموعه‌های اندازه‌پذیر را دارند. به طور خلاصه، فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{B})$ را در نظر می‌گیریم. هرگاه $f : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت پیوسته از X بوده و Y یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه از تعاریف واضح است که به ازای هر مجموعهٔ باز V در Y، $f^{-1}(V) \in \mathcal{B}$. به عبارت دیگر، هر نگاشت پیوسته از X اندازه‌پذیر بورل است.

قضیه ۸.۲. *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک σ-جبر در X و Y یک فضای توپولوژیک باشد. f مجموعهٔ X را به توی Y بنگارد.*

(الف) هرگاه Ω گردایهٔ تمام مجموعه‌های $E \subset Y$ باشد که $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$، آنگاه Ω یک σ-جبر در Y است.

(ب) هرگاه f اندازه‌پذیر و E یک مجموعهٔ بورل در Y باشد، آنگاه $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$.

(پ) هرگاه $Y = [-\infty, \infty]$ و به ازای هر α ی حقیقی، $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{A}$، آنگاه f اندازه‌پذیر است.

(ت) هرگاه f اندازه‌پذیر و Z یک فضای توپولوژیک و $g : Y \longrightarrow Z$ یک نگاشت بورل بوده و $h = g \circ f$، آنگاه $h : X \longrightarrow Z$ اندازه‌پذیر است.

برهان. (الف) از روابط

$$f^{-1}(Y) = X$$

[1] Borel

$$f^{-1}(A_1 \cup A_2 \cup ...) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) \cup ...$$

$$f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A)$$

نتیجه می‌شود.

برای اثبات (ب) فرض کنیم Ω همانند (الف) باشد. اندازه‌پذیری f ایجاب می‌کند که Ω شامل تمام مجموعه‌های باز در Y باشد، و چون Ω یک σ - جبر است، Ω شامل تمام مجموعه‌های بورل در Y است.

برای اثبات (پ) فرض کنیم Ω گردایهٔ تمام $E \subset [-\infty, \infty]$ هایی باشد که $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. عدد حقیقی α را اختیار کرده و $\alpha_n < \alpha$ را چنان می‌گیریم که وقتی $n \to \infty$، $\alpha_n \to \alpha$. چون به ازای هر n، $(\alpha_n, \infty] \in \Omega$ و

$$[-\infty, \alpha) = \cup_{n=1}^{\infty} [-\infty, \alpha_n] = \cup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \infty]^c$$

و نیز (الف) σ - جبر بودن Ω را نشان می‌دهد، معلوم می‌شود که $[-\infty, \alpha) \in \Omega$. همین امر در مورد

$$(\alpha, \beta) = [-\infty, \beta) \cap (\alpha, \infty]$$

برقرار است. چون هر مجموعهٔ باز در $[-\infty, \infty]$ اجتماع شمارش‌پذیری از بازه‌های از نوع فوق است، Ω شامل همهٔ مجموعه‌های باز است. لذا f اندازه‌پذیر می باشد.

برای اثبات (ت) فرض کنیم $V \subset Z$ باز باشد. در این صورت $g^{-1}(V)$ یک مجموعهٔ بورل از Y است، و چون

$$h^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)),$$

قسمت (ب) نشان می‌دهد که $h^{-1}(V) \in \mathcal{A}$.

□

قضیه ۹.۲. *عدد اصلی مجموعه‌های بورل اندازه‌پذیر $\mathbb{R}$ برابر $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ است.*

برهان. صفحهٔ ۱۱۰ از [۲۲] را ببینید. □

فرض کنیم X یک مجموعهٔ ناتهی و $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی مقدار روی X باشد، مجموعه نقاط x از X که $f(x) \neq 0$ را با $Coz(f)$ نمایش می‌دهیم؛ در واقع $Coz(f) = X \backslash f^{-1}(\{0\})$.

قضیه ۲.۱۰. *تابع حقیقی-مقدار f روی فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{A})$ اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر برای هر عدد حقیقی c ، مجموعهٔ $Coz(f) \cap \{x : \ f(x) < c\}$ اندازه‌پذیر باشد.*

برهان. فصل ۱۸ از [۱۰] را ببینید. □

قضیه ۲.۱۱. *فرض کنیم f تابعی حقیقی روی فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{A})$ باشد، در این صورت احکام زیر برقرارند.*

(الف) *اگر f اندازه‌پذیر و c یک عدد حقیقی باشد آنگاه cf نیز اندازه‌پذیر است.*

(ب) *اگر f تابع اندازه‌پذیر غیر صفر باشد آنگاه $\frac{1}{f}$ نیز اندازه‌پذیر است.*

(پ) *اگر X خط حقیقی و f یک تابع صعودی باشد آنگاه f بورل اندازه‌پذیر است.*

(ت) *اگر f اندازه‌پذیر باشد، آنگاه برای هر عدد حقیقی c، مجموعهٔ*

$$Coz(f) \cap \{x : \ f(x) = c\}$$

اندازه‌پذیر است.

(ث) *فرض کنید $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد، در این صورت f بورل اندازه‌پذیر است.*

برهان. فصل ۱۸ از [۱۰] را ببینید. □

قضیه ۲.۱۲. *اگر f و g با مقادیر در اعداد حقیقی توسعه‌یافته روی فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{A})$ و c عددی حقیقی باشد آنگاه هر سه مجموعهٔ*

$$A = \Big\{x : \ f(x) < g(x) + c\Big\}$$

$$B = \Big\{x : \ f(x) \leq g(x) + c\Big\}$$

$$C = \Big\{x : \ f(x) = g(x) + c\Big\}$$

اندازه‌پذیرند.

برهان. فرض کنیم $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا روی خط اعداد حقیقی باشد، با توجه به این که

$$A = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} [\{x : \ f(x) < r\} \cap \{x : \ r - c < g(x)\}]$$

نتیجه می‌شود که A دارای خاصیت مورد نظر است. نتیجه برای B و C از به ترتیب از روابط زیر به دست می‌آید.

$$B = X - \{x:\ g(x) < f(x) - c\} \quad \text{و} \quad C = B - A$$

□

قضیه ۱۳.۲. *اگر Φ تابع توسعه یافتهٔ حقیقی مقدار بورل اندازه‌پذیر روی خط حقیقی توسعه یافته باشد به طوری که $\Phi(0) = 0$ و f تابع توسعه یافتهٔ حقیقی مقدار اندازه‌پذیر روی فضای اندازه‌پذیر X باشد. آنگاه $\tilde{f}$ ، با تعریف $\tilde{f}(x) = \Phi\big(f(x)\big)$ یک تابع اندازه‌پذیر روی X است.*

برهان. در اینجا راه مناسب استفاده کردن از تعریف اندازه‌پذیری است. اگر M یک مجموعهٔ بورل روی خط حقیقی توسعه یافته باشد، آنگاه

$$Coz(\tilde{f}) \cap \tilde{f}^{-1}(M) = \big\{x\ :\ \Phi(f(x)) \in M\backslash\{0\}\big\} = \big\{x\ :\ f(x) \in \Phi^{-1}(M\backslash\{0\})\big\}$$

چون $\Phi(0) = 0$، داریم

$$\Phi^{-1}(M\backslash\{0\}) = \Phi^{-1}(M\backslash\{0\}) - \{0\}$$

چون Φ بورل اندازه‌پذیر است، $\Phi^{-1}(M\backslash\{0\})$ یک مجموعهٔ بورل است. و اندازه‌پذیری مجموعهٔ

$$Coz(\tilde{f}) \cap \tilde{f}^{-1}(M) = Coz(f) \cap f^{-1}(\Phi^{-1}(M\backslash\{0\}))$$

از اندازه‌پذیری f نتیجه می‌شود.

□

قضیه ۱۴.۲. *اگر f و g توابع اندازه‌پذیر حقیقی- مقدار توسعه یافته روی فضای اندازه‌پذیر X باشند، در این صورت $f+g$ و $f.g$ نیز چنین‌اند.*

برهان. نظر به این که رفتار $f+g$ و fg در نقاط x که حداقل یکی از دو مقدار، $f(x)$ یا $g(x)$ بی‌نهایت است ، به سادگی قابل فهم است، بعد از آزمون چند مورد محدود توجه خود را روی توابع متناهی مقدار محدود می‌کنیم.(یادآوری می‌کنیم که اگر $f(x) = \pm\infty$ و $g(x) = \pm\infty$ آنگاه $f(x) + g(x)$ قابل تعریف نیست.)

از اینکه f و g متناهی هستند و اگر c یک عدد حقیقی باشد آنگاه

$$\{x:\ f(x)+g(x)<c\}=\{x:\ f(x)<c-g(x)\}$$

از قضیهٔ ۱۲.۱ با جانشینی $-g$ به جای g اندازه پذیری $f+g$ نتیجه می‌شود. همچنین اندازه‌پذیری $f.g$ از اتحاد زیر به دست می‌آید.

$$fg=\frac{۱}{۴}[(f+g)^{۲}-(f-g)^{۲}]$$

□

قضیه ۱۵.۲. *اگر $\{f_n\}$ دنبالهٔ توابع اندازه پذیر حقیقی مقدار توسعه یافته روی فضای اندازه‌پذیر X باشد آنگاه هر چهار تابع h و g و f^* و f_* تعریف شده با*

$$h(x)=\sup\{f_n(x):\ \ n=۱,۲,...\}$$

$$g(x)=\inf\{f_n(x):\ \ n=۱,۲,...\}$$

$$f^*(x)=\limsup_n f_n(x)$$

$$f^*(x)=\liminf_n f_n(x)$$

اندازه‌پذیر هستند.

برهان. کاستن عمومیت موضوع به توابع حقیقی مقدار متناهی آسان است. معادلهٔ

$$\{x:\ g(x)<c\}=\cup_{n=۱}^{\infty}\{x:\ f_n(x)<c\}$$

اندازه‌پذیری g را تضمین می‌کند. همچنین رابطهٔ زیر اندازه‌پذیری h را نشان می‌دهد.

$$h(x)=-\inf\{-f_n(x):\ n=۱,۲,...\}$$

اندازه‌پذیری f^* و f_* به تر تیب از روابط زیر به دست می‌آید.

$$f^*(x)=\inf_{n\geq ۱}\sup_{m\geq n}f_m(x) \quad \text{و} \quad f_*(x)=\sup_{n\geq ۱}\inf_{m\geq n}f_m(x)$$

□