٥٥٥.٥١

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی فیزیک گرایش نظریه میدان های کوانتومی

تحت عنوان:

کوانتش به روش حالت های همدوس

استاد راهنما:

دکتر اردشیر رابعی

نام دانشجو:

زینب جلیلیان

دی ۱۳۸۸

چکیده

یکی از مباحثی که در شاخه های مختلف فیزیک از جمله فیزیک نظری مطرح می شود کوانتش مشاهده پذیرهای کلاسیکی است. موضوع این پایان نامه نیز کوانتش به روش حالت های همدوس می باشد. روش های متفاوتی برای تعیین حالت های همدوس وجود دارد که ما در اینجا از روش ویژه برداری استفاده می کنیم. بر اساس این روش حالت های همدوس ویژه بردارهای عملگر نابودی هستند.

هدف اصلی ما کوانتش مشاهده پذیرهای کلاسیکی با استفاده از روش برزین – گلوبر – گزو بر روی منیفلدهایی است که قسمت فضایی مربوط به فضای فاز آن ها حلقه و کره می باشد.

در این پایان نامه ما به کمک هسته گرمایی (**heat kernel**) مربوط به معادله گرما روی کره مختلط که توسط برایان هال مطرح شده، حالت های همدوس مربوط به فضاهای فازی که ایزومورف با حلقه و کره مختلط می باشد را تعیین می نماییم و نشان می دهیم که هسته گرمایی که توسط برایان هال در مورد کره مختلط به دست آورده شده بایستی تصحیح شود.

همچنین با انتخاب مقیاس مناسب برای کره مختلط که بر حسب مختصات حقیقی بیان می شود عملگرهای کوانتومی زاویه و فوریه را برای کره مختلط تعیین می نماییم.

علاوه بر آن نشان می دهیم که ضرب عملگرهای متناظر با مؤلفه های شعاعی کره مختلط و مزدوج آن ها از جبر ویژه ای به نام جبر ترتیبی تبعیت می کند. در پایان نیز به کمک این جبر توابع وابسته به اندازه حرکت خطی را کوانتیزه نموده و درستی جبر ترتیبی در مورد کره مختلط را تأیید می کنیم.

معرفی نماد ها و سمبل های به کار رفته در پایان نامه

مجموعه اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
مجموعه اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$
مجموعه اعداد مختلط	$\mathbb{C}$
ایزومورفیزم	$\cong$
معادل، هم ارز	$\equiv$
ضرب خارجی	$\otimes$
ضرب نیم مستقیم	$\propto$
تعریف	$:=$
نرم	$\|\ \ \|$
متعلق است به	$\in$
زیر مجموعه	$\subset$
کت	$\|\ \rangle$
برا	$\langle\ \|$
براکت پواسون	$\{\ ,\ \}$
رابطه جابجایی	$[\ ,\ ]$
عملگر کوانتومی	O
عملگر یکه	I_d
فضای هیلبرت	$\mathbf{H}$
فضای فوک $-$ برگمن	$\mathbf{FB}$
کره d بعدی	S^d
کره مختلط d بعدی	$S^d_{\mathbb{C}}$
تابع تتا ژاکوبی	$\vartheta(\nu,q)$

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه

یکی از مباحثی که در شاخه های مختلف فیزیک مطرح می گردد کوانتش [1] مشاهده پذیرهای کلاسیکی است ، روش های مختلفی برای کوانتش وجود دارد که هر کدام مزیت های خاص خود را دارند. در این پایان نامه ما روش کوانتش به کمک حالت های همدوس [2] را انتخاب می نماییم، در این روش تنها به تعیین زیر فضای هیلبرت [3] و مقیاس مناسب [4] نیاز داریم.(البته لازم به ذکر است که تعیین این دو مورد بسیار مشکل می باشد)

در مکانیک کلاسیک یک سیستم توسط نقاط فضای فاز[5] توصیف می شود، در مکانیک کوانتوم سیستم به وسیله ویژه بردارهای مربوط به فضای هیلبرت تعیین می گردد. اما حالتی نیز وجود دارد که حاصل بر همنهش حالت های کوانتومی است طوری که به حالت های کلاسیک خیلی نزدیک است، این حالت ها، حالت های همدوس نامیده می شوند. کوانتش به روش حالت های همدوس با روش های دیگر تفاوت دارد که به منظور بررسی این مطلب لازم است که ابتدا مقدمه ای بر تاریخچه حالت های همدوس ارائه گردد.

ایده حالت های همدوس ریشه در فیزیک کوانتومی و ارتباط آن با فیزیک کلاسیک دارد. واژه همدوس از اپتیک می آید و به صورت ویژه توسط گلوبر[6] [۱] در اواخر دهه ٦٠ میلادی و در ارتباط با مسأله گسیل لیزر مطرح گردید. پس از آن نیز توسط کلودر[7] ([۲] و [۳]) و سادرشان[8] [۴] توسعه یافت. از آن زمان بحث حالت های همدوس در شاخه های مختلف فیزیک از قبیل فیزیک هسته ای ، فیزیک اتمی ، فیزیک حالت جامد و از جمله در فیزیک نظری گسترش یافت طوری که کلودر در این باره می گوید: "

[1] Quantization
[2] Coherent state
[3] Hilbert space
[4] Suitable measure
[5] Phase space
[6] Glauber
[7] Klauder
[8] Sudarshan

حالت های همدوس زبان طبیعی تئوری کوانتومی می باشند."

حالت همدوس علمی است که شکاف بین فیزیک کلاسیک و فیزیک کوانتومی را پر کرده و این دو را به هم پیوند می دهد. روش های متفاوتی برای تعیین حالت های همدوس وجود دارد که ما در این پایان نامه از روش ویژه برداری استفاده می کنیم. در این روش حالت های همدوس ویژه بردارهای عملگر نابودی [۹]هستند. به کمک این حالت های همدوس می توان کوانتش مشاهده پذیر های کلاسیکی برای فضاهای مختلف را مورد بررسی قرار داد. هدف اصلی ما تعیین حالت های همدوس برای حرکت جسمی است که قسمت فضایی مربوط به فضای فاز آن یک حلقه و یا یک کره می باشد. سپس با استفاده از این حالت های همدوس مشاهده پذیر های کلاسیکی را کوانتیزه می کنیم.

در فصل دوم به منظور آشنایی خوانندگان به صورت مختصر روش ویژه برداری در مورد نوسانگر هماهنگ ساده را معرفی می کنیم، به این منظور ابتدا فضای هیلبرت را معرفی کرده و نمایش های مختلف آن را مورد بررسی قرار می دهیم. سپس از تشابه نوسانگر هماهنگ کوانتومی و کلاسیکی به منظور بررسی انتقال از کلاسیک به کوانتوم بهره می بریم. در ادامه با معرفی عملگر های خلق [۱۰] و نابودی نشان می دهیم که حالت های همدوس ویژه بردار عملگر نابودی هستند. همچنین اشاره می کنیم که حالت های همدوس می توانند یک ابزار مفید در راستای فهم حرکت تناوبی یک ذره کوانتومی باشند.

در فصل سوم ما ساده ترین مورد حرکت تناوبی یعنی حرکت ذره کوانتومی بر روی منیفلدی [۱۱] را در نظر می گیریم که قسمت فضایی مربوط به فضای فاز آن یک حلقه است. اصولاً حالت های همدوس استاندارد بر اساس نقاط فضای فاز کلاسیکی بر چسب گذاری می شوند. در این فصل به بررسی مکانیک کوانتومی روی حلقه بر اساس روش کو والسکی [۱۲] می پردازیم سپس حالت های همدوس را معرفی کرده و نشان می دهیم که این حالت ها ویژه توابع عملگر نابودی هستند. همچنین نشان می دهیم که پارامترهای به کار رفته در حالت های همدوس معرفی شده مطابق با مختصات فضای فاز کلاسیکی می باشند.

یک نتیجه جالب توجه در این بررسی ظهور جبر تغییر شکل یافته ویل – هایزنبرگ است. با تعریف عملگرهای مکان و تکانه بر حسب عملگر های خلق و نابودی نشان می دهیم که بر پایه حالت های همدوس حداقل عدم یقین هایزنبرگ برآورده می شود. به علاوه در این فصل به بررسی نمایش برگمن [۱۳] و اثر عملگرها در این نمایش برای ذره متحرک روی حلقه می پردازیم.

---

[۹] Annihilation operator

[۱۰] Creating operator

[۱۱] Manifold

[۱۲] Kowalski

[۱۳] Bargmann representation

فصل چهارم اختصاص دارد به بررسی حرکت ذره کوانتومی بر روی منیفلدی که قسمت فضایی مربوط به فضای فاز آن کره است. در این فصل حالت های همدوس را بر اساس روش برایان هال[۱۴] [۵] مورد بررسی قرار می دهیم. در این روش به دست آوردن حالت های همدوس معادل با حل معادله گرما می باشد. فضای فاز مورد استفاده فضای کتانژانت[۱۵] $T^{\star}(S^d)$ است که بر اساس روش تیمن [۱۶] ([٦] ، [۷] و [۸]) می توان نشان داد که با کره مختلط $S^d_{\mathbb{C}}$ ایزومورف [۱۷] می باشد. بنابراین ابتدا مؤلفه های بردار شعاعی کره مختلط $S^d_{\mathbb{C}}$ که توابع مختلط a_k می باشند را معرفی کرده، سپس همتای کوانتومی این توابع را محاسبه نموده و نشان می دهیم که این همتاهای کوانتومی معادل با عملگرهای نابودی هستند. ویژه توابع این عملگرها حالت های همدوس می باشند که ضرب داخلی این حالت ها در بردار مکان معرف هسته گرمایی [۱۸] است که جواب معادله گرما می باشد. در این فصل تلاش خود را روی تعیین حالت های همدوس متناظر با حرکت ذره روی حلقه $(d=۱)$ و کره $(d=۲)$ متمرکز می نماییم. همچنین مقیاس مناسب مربوط به حرکت ذره روی این فضاها را نیز محاسبه می کنیم که در فصل پنجم برای کوانتش مشاهده پذیر ها مورد استفاده قرار می گیرد.

کوانتش در واقع جایگزین کردن مشاهده پذیرهای کلاسیکی با عملگرهایی است که روی فضای هیلبرت مربوطه اثر می کنند. در فصل پنجم با استفاده از حالت های همدوس به کوانتش برخی از مشاهده پذیرها برای ذره متحرک روی حلقه و کره بر اساس روش برزین [۱۹] می پردازیم.

روش کار ما به این صورت است که با در نظر گرفتن حالت های همدوسی که در فصل چهارم برای حلقه و کره به دست آوردیم ($|\chi\rangle$) می توان هر مشاهده پذیر کلاسیکی $f(\chi)$ که در واقع یک تابع در فضای فاز می باشد را به صورت زیر کوانتیزه نمود:

$$O_f = \int_X \; f(\chi)|\;\chi\rangle\langle\chi\;|\nu(d\chi) \quad , \qquad (۱.۱)$$

که O_f مشاهده پذیر کوانتومی، $\nu(d\chi)$ مقیاس مناسب روی فضای فاز X و χ یک نقطه روی فضای فاز می باشد.

همچنین به کمک این رابطه عملگرهای متناظر با توابع مختلط a_i $(i=۱,۲,۳)$ و مزدوج آن ها یعنی $\bar{a}_i$ ها را روی کره محاسبه نموده و نشان می دهیم که ضرب این عملگرها از جبر ویژه ای به نام جبر ترتیبی [۲۰]

[۱۴] Brian C. Hall

[۱۵] Cotanjant space

[۱۶] Thiemann

[۱۷] Isomorph

[۱۸] Heat kernel

[۱۹] Berezin

[۲۰] Ordering algebra

پیروی می کنند. در بخش پایانی این فصل به کمک جبر ترتیبی به کوانتش برخی از مشاهده پذیرهای وابسته به توابع مربوط به حرکت ذره روی کره می پردازیم.

فصل ۲

مقدمه ای بر حالت های همدوس

مقدمه

در فیزیک کلاسیک به منظور معرفی یک سیستم ابتد ا فضای فاز را تعریف کرده و یک نقطه در فضای فاز در واقع معرف سیستم در آن وضعیت می باشد. در فیزیک کوانتوم یک سیستم توسط ویژه بردارهای مربوط به فضای هیلبرت آن سیستم تعریف می شود، برهم کنشی از این حالت های کوانتومی وجود دارد که به حالت های کلاسیک خیلی نزدیک است، این حالت ها، حالت های همدوس نامیده می شود که قبلاً توسط شرودینگر[۱] [۹] درسال ۱۹۲۶ میلادی مطالعه گردید و سپس توسط گلوبر[۱] وکلودر ([۲] و [۳]) در اواخر دهه ٦۰ میلادی دوباره مورد توجه قرار گرفت. روش های مختلفی برای تعیین حالت های همدوس وجود دارد که ما در این فصل برای آشنایی خوانندگان به صورت خیلی مختصر روش ویژه برداری در مورد نوسانگر هماهنگ ساده را معرفی می کنیم. دراین روش حالت های همدوس ویژه بردار (حالت) عملگر نابودی می با شد.

بر این اساس این فصل اختصاص دارد به معرفی :

- فضای هیلبرت و نمایش های امکان پذیر آن
- نوسانگر هماهنگ و عملگر های خلق و نابودی
- حالت های همدوس.

۲. ۱ فضای هیلبرت و نمایش های امکان پذیر آن

نخستین نظریات مهم که بیانگر فضای هیلبرت هستند توسط بسل [۲] و فوریه [۳] در قرن نوزدهم و در ارتباط با توابع پریودیک یک متغیره حقیقی مطرح شده است. اما نتایج اصلی در قرن بیستم به دست آمد.
نام فضای هیلبرت برگرفته از نام ریاضیدان آلمانی دیوید هیلبرت [۴] است. ایشان فضای هیلبرت را به

[۱] Schordinger
[۲] Friedrich Bessel
[۳] Joseph Fourier
[۴] David Hilbert

عنوان یک مفهوم ریاضی از فضای اقلیدسی که در بر گیرنده روش های گسترده جبر برداری است معرفی کرده اند.
بنابر یکی از اصول موضوعه مکانیک کوانتومی به هر مشاهده پذیر کلاسیکی یک عملگر هرمیتی نسبت داده می شود که این عملگر در واقع نگاشتی از فضای هیلبرت به فضای هیلبرت است که به صورت زیر بیان می شود:

$$O\ |\alpha\rangle = |\beta\rangle \quad , \quad |\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathbf{H} \quad . \tag{۱.۲}$$

همچنین هر حالت یک سیستم می تواند توسط یک بردار (ویژه تابع) از فضای هیلبرت نمایش داده شود که عملگر روی آن اثر می کند. مجموعه تمام ویژه توابع یک عملگر، یک مجموعه کامل می باشد یعنی می توان هر تابع دلخواه را به صورت بسطی از این ویژه توابع نوشت.
دربیشتر نظریه ها فضای هیلبرت حقیقی (مختلط) به عنوان یک فضای حاصلضرب داخلی حقیقی (مختلط) تعریف می شود، تعریف نرم[۵] به وسیله ضرب داخلی توسط برا و کت و به صورت زیر نمایش داده می شود :

$$||\ \overrightarrow{x}\ ||\ =\ \sqrt{\langle\ x\ |\ x\ \rangle} \quad , \tag{۲.۲}$$

که بهنجار و کامل است [۱۰] .
فضای هیلبرت در ریاضیات، فیزیک و مهندسی نوعاً به صورت فضای توابع با ابعاد نامحدود مطرح می شود به این معنا که فضای هیلبرت در مقایسه با مختصات کارتزین می تواند بر حسب یک سری نا محدود جمع پذیر و انتگرال پذیر مجذوری تصور شود.
اهمیت فضای هیلبرت به واسطه عرضه بهترین فرمولبندی ریاضی در مکانیک کوانتومی است بخش های قابل ملاحظه ای از سیستم مکانیک کوانتومی توسط بردارهای فضای هیلبرت معین شرح داده می شوند. مشاهده پذیرها نیز به وسیله عملگرهای خطی بیان می گردند و روش های محاسبات کوانتومی به نمایش های متعامد مربوط می شوند.
علاوه بر آن تقارن سیستم مکانیک کوانتومی می تواند به عنوان یک نمایش منحصر به فرد از یک گروه مناسب تفسیر شود، به این ترتیب یک انگیزه برای توسعه نمایش های یونیتاری به وجود می آید.
فضای هیلبرت مفاهیم هندسی ساده شامل تصویر کردن و تغییر پایه را بیان می کند که از فضاهای با ابعاد محدود به فضاهای با ابعاد نامحدود گسترده می شوند و در نخستین جایگاه فضای توابع هستند.
اکنون چهار نمایش امکان پذیر برای نوسانگر هماهنگ ساده را مورد ارزیابی قرار می دهیم:

[۵] Norm

– نمایش مکان[6] : فضای کار ما فضای مکان است،

– نمایش تکانه [7] : فضای کار ما فضای تکانه‌است،

– نمایش انرژی (فوک) [8] : فضای کار ما فضای انرژی است،

– نمایش تحلیلی(فوک–برگمن)[9] : فضای کار ما فضای فاز است.

۲. ۱.۱ نمایش مکان

در این فضا عملگرهای مکان (O_Q) و تکانه (O_P) به‌صورت عملگرهای ضرب[10] ومشتقی [11] ظاهر می شوند یعنی:

$$O_Q\, \psi(x\ ,\ t\ )\ \ =\ \ x\, \psi(x\ ,\ t\ ) \quad , \tag{۳.۲}$$

$$O_P\ \Psi(x\ ,\ t\ )\ \ =\ \ -i\hbar\, \frac{\partial}{\partial x}\, \psi(x\ ,\ t\ ) \quad , \tag{۴.۲}$$

که $\psi(x\ ,\ t\ )$ تابع موج یک ذره به جرم m است که روی مسیر مستقیم حرکت می کند و متعلق به فضای توابع $\mathbf{H}$ می باشد. یادآوری می شود که $\mathbf{H} \cong \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ و $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ فضای هیلبرت با فیلد $\mathbb{R}$ است که یک فضای انتگرال پذیر می باشد. در این فضا می توان تحول زمانی را بر اساس معادله شرودینگر به صورت زیر نوشت:

$$O_H\psi(x\ ,\ t\ )\ =\ i\hbar\, \frac{\partial}{\partial t}\, \psi(x\ ,\ t\ ) \quad . \tag{۵.۲}$$

جواب حالت پایدار مربوط به این معادله را می توان به راحتی نوشت :

$$\psi(x\ ,\ t\ )\ =\ e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\, \psi_n(x\ ) \quad , \tag{۶.۲}$$

که $\psi_n(x\ )$ معرف حالت مکانی n ام می باشد. یعنی تابع موج حالت پایدار از دو قسمت فضائی $\psi_n(x\ )$ و زمانی $e^{-\frac{i}{\hbar}\ E_n t}$ ساخته شده است. در این رابطه E_n ویژه مقادیر انرژی بوده:

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{۱}{۲}) \quad , \quad n = ۰, ۱, ۲, ... \tag{۷.۲}$$

---

[6] Position representation

[7] Momentume representation

[8] Energy or Fock represention

[9] Analytic or Fock-Bargmann representation

[10] Multiplication operator

[11] Derivation operator

که $E_\circ = \frac{\hbar\omega}{۲}$ معرف انرژی خلأ[۱۲] است $(E_\circ \neq \circ)$ و $\psi_n(\ x\ )$ ها ویژه حالت های فضایی نوسانگر هماهنگ ساده به صورت زیر می باشند:

$$\psi_n(x) \ = \ \sqrt[۴]{\frac{۱}{۲\pi l_c^۲}}\ \frac{۱}{\sqrt{۲^n\ n!}}\ e^{-\frac{x^۲}{۴\ l_c^۲}}\ H_n(\frac{x}{\sqrt{۲}\ l_c}) \quad , \tag{۸.۲}$$

که H_n ها چند جمله ای های هرمیت [۱۳] و l_c معرف طول ویژه کوانتومی می باشد:

$$l_c \ = \ \sqrt{\langle\psi_\circ|\ O_Q{}^۲\ |\ \psi_\circ\rangle} \quad , \tag{۹.۲}$$

$$= \ \sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}} \quad . \tag{۱۰.۲}$$

۲. ۱. ۲ نمایش تکانه

در این فضا (O_P) معرف عملگر ضرب و (O_Q) معرف عملگر مشتقی می باشند :

$$O_P\hat{\psi}(\ p\ ,\ t\ ) \ = \ p\ \hat{\psi}(\ p\ ,\ t\ ) \quad , \tag{۱۱.۲}$$

$$O_Q\hat{\psi}(\ p\ ,\ t\ ) \ = \ i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\ \hat{\psi}(\ p\ ,\ t\ ) \quad . \tag{۱۲.۲}$$

لازم به ذکر است که ارتباط بین توابع موج $\hat{\psi}(\ p\ ,\ t\ )$ و $\psi(\ x\ ,\ t\ )$ بر اساس تبدیل فوریه[۱۴] به صورت زیر بوده :

$$\hat{\psi}(p) \ = \ \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}px}\ \psi(\ x\ )\ dx \quad ,$$

$$\psi(\ x\ ) \ = \ \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}px}\ \hat{\psi}(p)\ dp \quad .$$

فضای هیلبرت نیز از جنس $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ است و پایه های متعامد این فضا به‌صورت :

$$\hat{\psi}_n(p) \ = \ \sqrt[۴]{\frac{۱}{۲\pi p_c^۲}}\ \frac{۱}{\sqrt{۲^n\ n!}}\ e^{-\frac{p^۲}{۴p_c^۲}}\ H_n(\frac{p}{\sqrt{۲}p_c}) \quad , \tag{۱۳.۲}$$

نمایش داده می شوند که p_c مقدار متوسط مربع تکانه می باشد:

$$p_c \ = \ \sqrt{\langle\psi_\circ|\ O_p{}^۲\ |\psi_\circ\rangle} \quad , \tag{۱۴.۲}$$

$$= \ \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{۲}} \quad . \tag{۱۵.۲}$$

---

[۱۲] Vacuum

[۱۳] $H_n(\xi) \ = \ (-۱)^n\ e^{\xi^۲}\ \frac{d^n}{d\xi^n}\ e^{-\xi^۲} \quad . \quad (\ Hermit\ polynomial\ )$

[۱۴] Fourier transform

۲. ۱.۳ نمایش انرژی (فوک)

در این فضا توابع موج توسط کت های حالت نمایش داده می شوند [۱۵]:

$$\psi_n \equiv |\, n\, \rangle \;, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{۱۶.۲}$$

همچنین در این فضا از عملگرهای نردبانی [۱۶] (پایین آورنده [۱۷] O_a وبالا برنده [۱۸] $O_{a^\dagger}$):

$$O_a = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(\, m\omega O_Q + iO_P\,) \;, \tag{۱۷.۲}$$

$$O_{a^\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(\, m\omega O_Q - iO_P\,) \;, \tag{۱۸.۲}$$

استفاده می کنیم که اثر O_a و $Oa^\dagger$ روی کت های حالت به صورت :

$$O_a|\, n\rangle = \sqrt{n}|\, n-1\,\rangle \;, \tag{۱۹.۲}$$

$$O_{a^\dagger}|\, n\rangle = \sqrt{\,n+1\,}\;|\, n+1\rangle \;, \tag{۲۰.۲}$$

است و برای حالت پایه داریم :

$$O_a|0\rangle = 0 \;. \tag{۲۱.۲}$$

در این نمایش عملگر هامیلتونی بر اساس عملگرهای نردبانی به صورت:

$$O_H = \frac{1}{2}\,\hbar\omega\,(O_{a^\dagger}\, O_a + O_a\, O_{a^\dagger}) \;, \tag{۲۲.۲}$$

$$= \hbar\omega(O_N + \frac{1}{2}) \;, \tag{۲۳.۲}$$

نوشته می شود. در این رابطه O_N ، عملگر تعداد [۱۹] بر پایه $\{|n\rangle \;,\; n \in \mathbb{N}\}$ است و به صورت زیر تعریف می گردد:

$$O_N = O_{a^\dagger}\, O_a \;. \tag{۲۴.۲}$$

به سادگی می توان نشان داد که:

$$O_N : \qquad O_N|n\rangle = n|n\rangle \;, \tag{۲۵.۲}$$

---

[۱۵] $\mathbb{N}$ به مجموعه اعداد طبیعی اشاره دارد.

[۱۶] Ladder operator

[۱۷] Lowering (Annihilation) operator

[۱۸] Raising (Creation) operator

[۱۹] Number operator

یعنی عملگر تعداد در نمایش ماتریسی به صورت یک ماتریس قطری است که عناصر قطر اصلی معرف ویژه مقادیر مربوط به آن می باشد.
متناظر با رابطه جابجایی کانونیک :

$$[\ O_P\ ,\ O_Q\ ]\ =\ i\ \hbar I_d\ \ , \qquad (۲۶.۲)$$

برای عملگر های نردبانی نیز می توانیم بنویسیم :

$$[\ O_a\ ,\ O_{a^\dagger}\ ]\ =\ I_d\ \ . \qquad (۲۷.۲)$$

پس هر مجموعه سه تایی $\{\ O_P\ ,\ O_Q\ ,i\ I_d\ \}$ و $\{\ O_a\ ,\ O_{a^\dagger}, I_d\ \}$ تحلیل یک جبر را می دهند که به جبر ویل – هایزنبرگ [۲۰] معروف می باشد.

۲. ۱. ۴ نمایش تحلیلی (فوک ـ برگمن)

این فضا بر مبنای نگاشت از فضای حقیقی x به فضای مختلط z عبارتست از :

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} K(x,z)\psi(x)dx \quad , \qquad (۲۸.۲)$$

که $\psi \in \mathbf{H}$ است. K معرف کرنل [۲۱] (رابط بین مختصه حقیقی x و مختصه مختلط z) به صورت زیر پایه گذاری شده [۱۱] :

$$K(\ x\ ,\ z\ )\ =\ \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{\psi_n(\ x\ )}\ \frac{(\frac{z}{\sqrt{\hbar}})^n}{\sqrt{n!}} \quad . \qquad (۲۹.۲)$$

متناظر با $\psi_n(x)$ به عنوان توابع موج مکانی، پایه های این فضا توسط:

$$\begin{aligned} f(z) \ &=\ \int_{\mathbb{R}} K(\ x\ ,\ z\ )\ \psi(\ x\ )\ dx \equiv \langle \overline{z}|n\rangle \quad , && (۳۰.۲)\\ &=\ \frac{1}{\sqrt{n!}}\ (\frac{z}{\sqrt{\hbar}})^n \quad , && (۳۱.۲)\end{aligned}$$

تعریف می شود. تبدیل معکوس را نیز می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\psi(x)\ =\ \int_{\mathbb{C}} \overline{K(\ x\ ,\ z\ )}\ f(z)\ \mu_s(dz) \quad , \qquad (۳۲.۲)$$

---

[۲۰] Wyel-Heisenberg algebra

[۲۱] Kernel

که $\mu_s(dz)$ مقیاس برگمن [۲۲] می باشد :

$$\mu_s(dz) = \frac{۱}{\pi\hbar}\, e^{-\frac{|z|^۲}{\hbar}}\, dx\, dy \quad , \qquad (۳۳.۲)$$

$$= \frac{i}{۲\pi\hbar}\, e^{-\frac{|z|^۲}{\hbar}} dz \wedge d\bar{z} \quad . \qquad (۳۴.۲)$$

که $z = x + i\, y$. در واقع با قبول مقیاس $\mu_s(dz)$ ، فضای هیلبرت $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ به فضای کامل انتگرال پذیر مجذوری فوک $-$ برگمن $\mathbf{FB}$ تبدیل می گردد. دراین فضا ضرب اسکالر به صورت :

$$\langle f_۱ \mid f_۲ \rangle = \int_{\mathbb{C}} \overline{f_۱(z)} f_۲(z)\, \mu_s(dz) \quad , \qquad (۳۵.۲)$$

و پایه های متعامد بهنجار این فضا توسط :

$$f_n = \frac{۱}{\sqrt{n!}} \left(\frac{z}{\sqrt{\hbar}}\right)^n \quad , \qquad (۳۶.۲)$$

تعریف می شوند. همچنین عملگرهای نردبانی $O_{a^\dagger}$ و O_a به عنوان عملگرهای ضرب و مشتقی عبارتند از :

$$O_{a^\dagger} f(z) = \frac{z}{\sqrt{\hbar}}\, f(z) \quad , \qquad (۳۷.۲)$$

$$O_a f(z) = \sqrt{\hbar}\, \frac{d}{dz} f(z) \quad . \qquad (۳۸.۲)$$

در این فضا عملگر تعداد به صورت عملگراتساع [۲۳] و عملگر هامیلتونی به صورت عملگر دیفرانسیل خطی بیان می گردد:

$$O_N = z\, \frac{d}{dz} \quad , \qquad (۳۹.۲)$$

$$O_H = \hbar\omega\left(z\, \frac{d}{dz} + \frac{۱}{۲}\right) \quad . \qquad (۴۰.۲)$$

همچنین می توان با استفاده از عملگرهای نردبانی، عملگرهای مکان و تکانه را محاسبه نمود:

$$O_Q = l_c\left(\sqrt{\hbar}\, \frac{d}{dz} + \frac{۱}{\sqrt{\hbar}}\, z\right) \quad , \qquad (۴۱.۲)$$

$$O_P = -i\, p_c\left(\sqrt{\hbar}\, \frac{d}{dz} - \frac{۱}{\sqrt{\hbar}}\, z\right) \quad . \qquad (۴۲.۲)$$

---

[۲۲] Bargmann measure

[۲۳] Dilation(Euler) operator