







دانشگاه شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه کارشناسی ارشد

گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

نقاط ثابت نگاشت‌های انقباضی تعمیم یافته تک مقداری و

مجموعه مقدار

استاد راهنما

دکتر علیرضا امینی هرنندی

استاد مشاور

دکتر حمید شایان پور

پژوهشگر

آسیه صادقی هفشجانی

تیر ۱۳۹۲

کلیه حقوق مادی حاصله از نتایج مطالعات، ابتکارات  
و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه  
متعلق به دانشگاه شهرکرد است.

تقدیم به

## پدر و مادر عزیزم

که از نگاهشان صلابت، از رفتارشان محبت و از صبرشان ایستادگی را آموختم. آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند.

و تقدیم به او که آموخت مرا تا بیا موزم، استاد گرامی و فریخته جناب آقای دکتر علیرضا امینی هرنندی که با نکته‌های دلاویز و گفته‌های بلند، صحیفه‌های سخن را علم پرور نمودند و گلشن سمرای علم و دانش را با راه‌نمایی‌های کارساز و سازنده بارور ساختند و همواره راه‌نما و راه‌گشای نگارنده در اتمام و اكمال پایان نامه بودند.  
حال این برگ سبزی است تحفه درویش تقدیم آنان...

سپاس گزارمی ...

سپاس بی کران پروردگاریکتارا که هستی مان، تخذیب و به طریق علم و دانش، نمونه‌مان شد و به همیشگی رهروان علم و دانش  
مفخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و دهای علم را بر ما گشود  
و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.

بر خود لازم می دانم از همه عزیزانی که در جهت به سرانجام رساندن این پایان نامه مرایاری نمودند، قدر دانی نمایم.

از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تأمین می کند و سلامت امانت بانی که  
به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه از استاد با کالات و وسایته، جناب آقای دکتر علیرضا اینی هرنزی که در کمال سع  
صدر، با حسن خلق و فروتنی، از بیچ گلی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهبانی این پایان نامه را بر عهده گرفتند،  
صمیمانه تشکر و قدر دانی می نمایم.

از استاد بصور و بزرگوار، جناب آقای دکتر حمید شایان پور، که زحمت مشاوره این پایان نامه را بر عهده گرفتند و از راهبانی های  
ارزشمندشان مرابره مند ساخته و با تکررات به جای خویش بر کمال این پایان نامه افزودند، کمال تشکر و قدر دانی را دارم. همچنین  
از اساتید فرزانه سرکار خانم ها دکتر نها فتحاری و دکتر مریم شمس که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند، کمال تشکر  
را دارم.

در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، تائیس می کنم وجود مقدس شان  
را، که همواره بر کوتاهی و درستی من، قلم عنو کشیدند و گریانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاور  
بی چشم داشت برای من بوده اند و تشکر می کنم از برادران و خواهران عزیزم که همواره در طول تحصیل متحمل زحمتم بودند و  
تکیه گاه من در مواجهه با مشکلات.

باشد که این خردترین، بنحشی از زحمات آنان را پاس گوید.

با آرزوی موفقیت برای تمام عزیزان  
آیة صادقی، بهنجانی  
تیر ۱۳۹۲

# چکیده

در این پایان‌نامه، ما نخست مفاهیم  $MT$ -تابع،  $\tau$ -تابع و  $\tau^\circ$ -متر را معرفی نموده، سپس با به کارگیری این مفاهیم، قضایای نقطه ثابت جدیدی برای نگاشت‌های انقباضی مجموعه-مقدار غیرخطی اثبات می‌کنیم.

سپس رده‌ی نگاشت‌های مستعد مجموعه-مقدار را معرفی نموده و قضایای نقطه ثابت جدیدی، که گسترش‌هایی از قضیه نقطه ثابت کنان<sup>۱</sup> و قضیه نقطه ثابت چاترجی<sup>۲</sup> برای نگاشت‌های انقباضی مجموعه-مقدار غیرخطی در فضاهاى مترى کامل هستند، برای چنین نگاشت‌هایی اثبات می‌کنیم. همچنین، مفهوم انقباض‌های جهت پنهان در فضاهاى مترى را که در واقع گسترشی از نگاشت‌های انقباضی کلاسیک است، معرفی می‌کنیم. وجود خاصیت نقطه ثابت تقریبی تعمیم یافته برای انواع مختلف نگاشت‌های انقباضی غیرخطی نیز نشان داده می‌شود.

سپس با اثبات قضایای نقطه ثابت جدید برای نگاشت‌های انقباضی جهت پنهان، نشان می‌دهیم نتایج شناخته شده‌ی قبلی را می‌توان بهبود بخشید و گسترش داد. نتایج جدید ما، پاسخی جزئی به مسئله‌ی باز رایش<sup>۳</sup> می‌دهد و گسترش‌هایی جدید از قضیه نقطه ثابت براینند-براینند<sup>۴</sup> و قضیه نقطه ثابت میزوگوچی-تاکاهاشی<sup>۵</sup> به دست می‌دهد.

در نهایت چند قضیه برای وجود نقطه انطباق و نقطه ثابت برای نگاشت‌های مجموعه-مقدار در فضاهاى مترى کامل اثبات می‌کنیم.

**کلمات کلیدی:** نقطه ثابت،  $MT$ -تابع،  $\tau$ -تابع،  $\tau^\circ$ -متر، قضیه نقطه ثابت کنان، قضیه نقطه ثابت چاترجی، انقباض جهت پنهان، خاصیت نقطه ثابت تقریبی، قضیه نقطه ثابت میزوگوچی-تاکاهاشی تعمیم یافته، قضیه نقطه ثابت براینند-براینند تعمیم یافته، نقطه انطباق.

---

1. Kannan  
2. Chatterjea  
3. Reich  
4. Berinde-Berinde  
5. Mizoguchi-Takahashi



# فهرست مطالب

۳	مقدمه
۵	فهرست نمادها
۷	۱ مفاهیم و تعاریف اولیه
۷	۱.۱ فضاهای متری
۹	۲.۱ نگاشت‌های مجموعه-مقدار
۱۵	۲ $MT$ -توابع و چند گسترش از مفهوم متر
۱۵	۱.۲ $MT$ -توابع
۱۸	۲.۲ قضایای نقطه ثابت کلاسیک در فضاهای متری کامل
۲۰	۳.۲ گسترش‌های جدید از مفهوم متر
۳۱	۳ نقاط ثابت نگاشت‌های مجموعه-مقدار غیرخطی
۳۱	۱.۳ نگاشت‌های مستعد
۳۵	۲.۳ گسترش قضیه نقطه ثابت چاترژ
۴۳	۳.۳ گسترش قضیه نقطه ثابت کنان
۵۴	۴ نگاشت‌های تعمیم یافته جهت ضعیف و خاصیت نقطه ثابت تقریبی
۵۵	۱.۴ انقباض‌های جهت پنهان
۶۲	۲.۴ شرایط غیرخطی برای خاصیت نقطه ثابت $p$ -تقریبی
۷۲	۳.۴ کاربردهایی در نظریه نقطه ثابت
۸۰	۵ نقاط انطباق نگاشت‌های غیرخطی
۸۰	۱.۵ نقاط انطباق نگاشت‌های غیرخطی
۸۹	مراجع



## مقدمه

نظریه نقطه ثابت، یکی از شاخه‌های میان رشته‌ای در ریاضیات است و به عنوان یک موضوع مناسب در ریاضی محض و کاربردی، یک شاخه‌ی رشد یافته از آنالیز غیرخطی محسوب می‌شود که در جهات مختلفی گسترش یافته و کاربردهای فراوانی در خود ریاضیات و همچنین سایر علوم دارد. این نظریه دارای سه مسئله‌ی عمده می‌باشد که عبارتند از: وجود نقطه ثابت، پیدا کردن آن در صورت وجود و ساختار مجموعه‌ی نقاط ثابت. این نظریه همچنین دارای سه زیر شاخه در فضاهای توپولوژیک، فضاهای متری و گسسته است.

قضیه نقطه ثابت براور<sup>۱</sup>، اصل انقباضی باناخ<sup>۲</sup> و قضیه نقطه ثابت تارسکی<sup>۳</sup> به ترتیب قضیه‌های بنیادی و نقطه‌ی آغاز هر یک از این شاخه‌ها محسوب می‌شوند. موضوع این پایان‌نامه بر مبحث نظریه نقطه ثابت، برای نگاشت‌های انقباضی در فضاهای متری متمرکز است.

این پایان‌نامه در پنج فصل تدوین شده است.

در فصل اول به بیان تعاریف مقدماتی، لم و قضیه‌های پیش نیاز پرداخته‌ایم. در فصل دوم نخست تعریف  $MT$ -تابع و خصوصیات آن را بیان می‌کنیم. سپس مفاهیم  $T$ -تابع و  $T^\circ$ -متر را به عنوان گسترش‌های جدیدی از مفهوم متر معرفی می‌کنیم. با به کارگیری این مفاهیم، گسترش‌های جدیدی از قضایای نقطه ثابت برابند-برابند، میزوگوچی-تاکاهاشی، نادلر<sup>۴</sup>، کنان و چاترجی برای نگاشت‌های انقباضی مجموعه-مقدار غیرخطی در فضاهای متری کامل، به دست می‌آوریم. در فصل سوم، که برگرفته از مرجع [۱۴] است، ابتدا رده‌ی نگاشت‌های مستعد مجموعه-مقدار را معرفی نموده و سپس قضایای نقطه ثابت جدیدی که گسترش‌هایی از قضایای نقطه ثابت کنان و چاترجی برای نگاشت‌های مجموعه-مقدار غیرخطی در فضاهای متری کامل هستند، برای چنین نگاشت‌هایی اثبات می‌کنیم.

در فصل چهارم، که مطالب آن از مرجع [۱۲] گرفته شده‌اند، به منظور گسترش نظریه نقطه ثابت متری، نخست مفهوم نگاشت‌های انقباضی جهت پنهان در فضاهای متری، که در واقع گسترشی از نگاشت‌های انقباضی نوع کلاسیک است، معرفی می‌کنیم و با اثبات قضایای نقطه ثابت جدید برای

---

1. Brouwer  
2. Banach  
3. Tarski  
4. Nadler

چنین نگاهت‌هایی، گسترش‌هایی از قضیه نقطه ثابت برابند- برابند و میز و کوچی- تاکاهاشی ارائه می‌کنیم. همچنین خاصیت نقطه ثابت تقریبی تعمیم یافته برای انواع مختلف نگاهت‌های انقباضی غیرخطی نیز نشان داده شده است. نتایج ما وجود خاصیت نقطه ثابت تقریبی را برای نگاهت‌های نوع رایش اثبات می‌کند و پاسخی جزئی به مسئله‌ی باز رایش می‌دهد.

در فصل پنجم اثبات چند قضیه برای وجود نقطه انطباق و نقطه ثابت برای نگاهت‌های مجموعه- مقدار در فضاها‌ی متری کامل در [۱۱] مورد مطالعه قرار گرفته است.

# فهرست نمادها

۷	..... تهی	$\emptyset$
۷	..... فاصله بین $x$ و $y$	$d(x, y)$
۷	..... فضای متری	$(X, d)$
۷	..... متعلق است به	$\in$
۷	..... مجموعه‌ی اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
۷	..... مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های $X$	$\mathfrak{P}(X)$
۸	..... اشتراک	$\cap$
۸	..... رابطه‌ی شمول	$\subseteq$
۸	..... فاصله از $x$ تا $A$	$d(x, A)$
۸	..... فضای نرم‌دار	$(X, \ \cdot\ )$
۸	..... نرم $x$	$\ x\ $
۹	..... بی‌نهایت‌ها	$\infty, +\infty, -\infty$
۹	..... حد	$\lim$
۹	..... حد بالایی	$\limsup$
۹	..... حد پایینی	$\liminf$
۹	..... کوچکترین کران بالایی	$\sup$
۹	..... بزرگترین کران پایینی	$\inf$
۱۰	..... ماکزیمم	$\max$
۱۰	..... متر هاوسدورف	$\mathcal{H}(A, B)$
۱۰	..... مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های ناتهی $X$	$\mathfrak{N}(X)$
۱۰	..... مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های ناتهی و بسته‌ی $X$	$\mathfrak{C}(X)$
۱۰	..... مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های ناتهی، بسته و کراندار $X$	$\mathfrak{CB}(X)$
۱۰	..... مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی	$\mathbb{R}^+$
۱۱	..... گوی باز به مرکز $x$ و شعاع $r$	$\mathcal{B}(x, r)$
۱۱	..... مجموعه‌ی نقاط ثابت $T$	$\mathcal{F}(T)$

۱۲	اجتماع	$\cup$
۱۲	مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبت	$\mathbb{N}$
۱۲	فضای باناخ دنباله‌ها	$l^\infty$
۱۲	$\tau_n$ همگرا به صفر	$\tau_n \rightarrow 0$
۲۵	مجموعه‌ی اعداد گویا	$\mathbb{Q}$
۳۱	گراف $T$	$Gr(T)$
۳۳	متعلق نیست به	$\notin$
۳۴	معادل	$\equiv$
۳۷	مجموع	$\sum$
۴۶	مینیمم	$\min$
۵۵	مجموعه‌ی $X$ بجز $x$	$X \setminus \{x\}$
۶۳	گوی بسته به مرکز $x$ و شعاع $r$	$\mathfrak{B}(x, r)$
۸۰	مجموعه‌ی نقاط انطباق $(g, T)$	$COP(g, T)$

# فصل ۱

## مفاهیم و تعاریف اولیه

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی که پیش نیازی برای فصل‌های بعدی است، می‌پردازیم.

### ۱.۱ فضاهای متر

**تعریف ۱.۱.۱ [۲۰]** فرض کنید  $X$  یک مجموعه‌ی ناتهی و  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع باشد.  $d$  را یک

متر روی  $X$  نامیم هرگاه به ازای هر  $x, y, z \in X$

(الف)  $d(x, y) > 0$  و  $d(x, y) = 0$  اگر و تنها اگر  $x = y$ .

(ب)  $d(x, y) = d(y, x)$ .

(ج)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (نامساوی مثلثی)

اگر  $d$  یک متر روی  $X$  باشد، آن‌گاه  $(X, d)$  را یک فضای متر نامیم.

توجه به این امر مهم است که هر زیر مجموعه‌ی  $L$  از فضای متر  $X$ ، خود فضایی متر با همان تابع متر می‌باشد.

دنباله‌ی  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  در فضای متر  $(X, d)$  را یک دنباله‌ی کوشی نامیم هرگاه به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $N \in \mathbb{N}$

موجود باشد که به ازای هر  $m, n \geq N$  داشته باشیم  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

$(X, d)$  را یک فضای متر کامل نامیم هرگاه هر دنباله‌ی کوشی، در  $X$  همگرا باشد.

**تعریف ۲.۱.۱ [۲۰]** فرض کنید  $X$  یک مجموعه و  $\mathfrak{F}(X)$  مجموعه‌ی شامل همه‌ی زیر مجموعه‌های

$X$  باشد.  $\tau \subseteq \mathfrak{F}(X)$  را یک توپولوژی روی  $X$  نامیم هرگاه خواص زیر برقرار باشد:

(الف)  $\emptyset, X \in \tau$ .

(ب) اجتماع هر زیر گردایه از عناصر  $\tau$ ، عضوی از  $\tau$  باشد.

(ج) اشتراک هر گردایه متناهی از عناصر  $\tau$ ، عضوی از  $\tau$  باشد.

مجموعه‌ی  $X$  با توپولوژی  $\tau$  یک فضای توپولوژیک نامیده می‌شود. اعضای  $\tau$  را مجموعه‌های باز نامیم.

فرض کنید  $X$  یک فضای متری باشد. اگر توپولوژی  $\tau$  روی  $X$  را گردایه همه‌ی اجتماع‌های گوی‌های باز  $X$  در نظر بگیریم، آن‌گاه  $\tau$  توپولوژی معمولی روی فضای متری نامیده می‌شود و گوییم که این مجموعه‌ها، مجموعه‌های باز تولید شده توسط متر روی فضا می‌باشند. در واقع، هر فضای متری یک فضای توپولوژیک می‌باشد.

**تعریف ۳.۱.۱.** [۲۹] فضای توپولوژیک  $X$  که هاوسدورف نیز می‌باشد، یعنی هر جفت نقاط مجزای داده شده همسایگی‌هایی مجزا داشته باشند، را یک فضای نرمال گویند در صورتی که برای دو زیر مجموعه‌ی بسته و جدا از هم  $A$  و  $B$ ، مجموعه‌های باز جدا از هم مانند  $U$  و  $V$  موجود باشند به قسمی که  $B \subseteq V$  و  $A \subseteq U$ .

**قضیه ۴.۱.۱.** [۲۹] هر فضای متری یک فضای نرمال است.

**لم ۵.۱.۱.** [۲۵] فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متری،  $A \subseteq X$  و  $U \subseteq X$  باز باشد. در این صورت

$$U \cap \bar{A} \subseteq \overline{U \cap A},$$

بنابراین، اگر  $U \cap A = \emptyset$ ، آن‌گاه  $U \cap \bar{A} = \emptyset$ .

**لم ۶.۱.۱.** [۲۵] اگر  $(X, d)$  یک فضای متری باشد، آن‌گاه تابع  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه‌ی  $f(x) = d(x, A)$  پیوسته است. در حالت خاص، اگر  $a \in A$  نقطه‌ای از  $A$  باشد، آن‌گاه تابع  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه‌ی  $f(x) = d(x, a)$  پیوسته است.

**تعریف ۷.۱.۱.** [۲۰] فضای برداری  $X$  را یک فضای نرم‌دار گویند هرگاه به هر  $x \in X$ ، یک عدد حقیقی  $\|x\|$  به نام نرم  $x$  نسبت داده شود به قسمی که

(الف)  $\|x\| \geq 0$  و  $\|x\| = 0$  اگر و تنها اگر  $x = 0$ .

(ب) به ازای هر  $x \in X$  و هر اسکالر  $\alpha$ ،  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ .

(ج) به ازای هر  $x, y \in X$ ،  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

دقت شود که با قرار دادن  $d(x, y) := \|x - y\|$ ، زوج  $(X, d)$  یک فضای متری خواهد بود که متر  $d$  را متر تولید شده توسط نرم گوییم.

**تعریف ۸.۱.۱.** [۲۰] فرض کنید  $X$  یک فضای برداری و  $\|\cdot\|$  یک نرم روی  $X$  باشد. اگر  $X$  با متر تولید شده توسط نرم یک فضای کامل باشد، آن‌گاه  $(X, \|\cdot\|)$  را یک فضای باناخ گویند.



**تعریف ۹.۱.۱.** فرض کنید  $f$  یک تابع حقیقی مقدار، تعریف شده روی  $\mathbb{R}$  باشد در این صورت

$$\limsup_{x \rightarrow c} f(x) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{0 < |x-c| < \varepsilon} f(x),$$

$$\limsup_{x \rightarrow c^+} f(x) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{0 < x-c < \varepsilon} f(x),$$

به همین ترتیب

$$\liminf_{x \rightarrow c} f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{0 < |x-c| < \varepsilon} f(x),$$

$$\liminf_{x \rightarrow c^+} f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{0 < x-c < \varepsilon} f(x).$$

اگر دنباله‌ی  $\{x_n\}$  یک دنباله‌ی کراندار در  $\mathbb{R}$  باشد، آن‌گاه

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_n \sup_{k \geq n} x_k,$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_n \inf_{k \geq n} x_k.$$

**تعریف ۱۰.۱.۱.** [۲۹] فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متری باشد. تابع  $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  را روی  $X$  نیم پیوسته پایینی نامیم هرگاه برای هر عدد حقیقی  $a$ ، مجموعه‌ی  $\{x \in X : f(x) \leq a\}$  در  $X$  بسته باشد.

**قضیه ۱۱.۱.۱.** [۲۹] فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متری باشد. تابع  $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  روی  $X$  نیم پیوسته پایینی است اگر و تنها اگر برای دنباله‌ی  $\{x_n\}$  و برای هر  $x_0 \in X$ ، اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ، آن‌گاه

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

**قضیه ۱۲.۱.۱.** [۲۹] فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متری، توابع  $f, g : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  نیم پیوسته پایینی و  $\alpha$  یک عدد نامنفی باشد. در این صورت توابع  $f + g$  و  $\alpha f$  که برای هر  $x \in X$ ، به صورت

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

تعریف می‌شوند نیز، نیم پیوسته پایینی می‌باشند.

**تعریف ۱۳.۱.۱.** [۲۰] تابع  $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  را نیم پیوسته پایینی از راست گویند هرگاه برای دنباله‌ی نزولی  $\{r_j\}$  به طوری که  $r_j \downarrow r \geq 0$ ، داشته باشیم

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \phi(r_j) \geq \phi(r).$$

## ۲.۱ نگاشت‌های مجموعه-مقدار

بررسی نگاشت‌های مجموعه-مقدار دارای اهمیت فراوانی در نظریه نقطه ثابت و کاربردهای آن از جمله نظریه تعادل و نابرابری‌های تغییراتی است. در این بخش، ضمن معرفی یک متر روی مجموعه‌ها و تعریف یک نگاشت مجموعه-مقدار، دسته‌های مختلف نگاشت‌های انقباضی مجموعه-مقدار را بررسی کرده و مقایسه می‌کنیم.

**تعریف ۱.۲.۱.** [۲۰] فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متری باشد. نگاشت  $T : X \rightarrow X$  را لیپ شیتس

گویند هرگاه ثابت  $k \geq 0$  موجود باشد به قسمی که برای هر  $x, y \in X$ ,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y),$$

کوچکترین  $k$  موجود، که به ازای آن رابطه‌ی فوق برقرار باشد را ثابت لیپ شیتس  $T$  گویند.

**تعریف ۲.۲.۱.** [۲۰] نگاشت لیپ شیتس  $T : X \rightarrow X$  را یک انقباض گویند در صورتی که  $0 \leq k < 1$

باشد.

**تعریف ۳.۲.۱.** [۲۰] خود-نگاشت  $T : X \rightarrow X$  را کاهنده گویند هرگاه برای هر  $x, y \in X$ ,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y).$$

**تعریف ۴.۲.۱.** [۱۳] خود-نگاشت  $T : X \rightarrow X$  را در نظر بگیرید. در این صورت

(الف) نگاشت  $T$  را از نوع کنان گویند، هرگاه  $\gamma \in [0, \frac{1}{2})$  موجود باشد به قسمی که برای هر  $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq \gamma\{d(x, Tx) + d(y, Ty)\},$$

(ب) نگاشت  $T$  را از نوع چاترجی گویند، هرگاه  $\gamma \in [0, \frac{1}{2})$  موجود باشد به قسمی که برای هر  $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq \gamma\{d(x, Ty) + d(y, Tx)\}.$$

**تعریف ۵.۲.۱.** تابع  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$  را یک  $MT$ -تابع گویند هرگاه در شرط میزگوچی-تاکاهاشی

صدق کند. یعنی برای هر  $t \in [0, \infty)$

$$\limsup_{s \rightarrow t^+} \varphi(s) < 1.$$

**تعریف ۶.۲.۱.** فرض کنید  $X$  یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های ناتهی  $X$

را با  $\mathfrak{N}(X)$ ، خانواده‌ی زیر مجموعه‌های ناتهی و بسته‌ی  $X$  را با  $\mathfrak{C}(X)$  و خانواده‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های

ناتهی، بسته و کراندار  $X$  را با  $\mathfrak{CB}(X)$  نمایش می‌دهیم.

هرگاه نگاشت  $T$  از مجموعه‌ی  $X$  به هر یک از خانواده‌های فوق، تعریف شود در این صورت

$T$  را یک نگاشت مجموعه-مقدار گوئیم.

برای معرفی نگاشت‌های انقباضی مجموعه-مقدار، لازم است ابتدا متر هاوسدورف را معرفی کنیم.

**تعریف ۷.۲.۱.** [۲۰] فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متری باشد. تابع  $\mathcal{H} : \mathfrak{CB}(X) \times \mathfrak{CB}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$

را متر هاوسدورف روی  $\mathfrak{CB}(X)$  القا شده توسط متر  $d$  روی  $X$  گویند، هرگاه برای هر جفت عناصر

$A, B \in \mathfrak{CB}(X)$  داشته باشیم:

$$\mathcal{H}(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{x \in B} d(x, A)\},$$

که  $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$

**تعریف ۸.۲.۱ [۲۰]** نگاشت مجموعه-مقدار  $T : X \rightarrow \mathfrak{N}(X)$  را یک انقباض گویند هرگاه  $0 \leq k < 1$  موجود باشد به قسمی که برای هر  $x, y \in X$

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$

**تعریف ۹.۲.۱** نقطه‌ی  $v$  در  $X$  یک نقطه ثابت نگاشت  $T$  است هرگاه  $v = Tv$ ، وقتی  $T : X \rightarrow X$  نگاشتی تک-مقداری باشد و  $v \in Tv$ ، وقتی  $T : X \rightarrow 2^X$  نگاشتی مجموعه-مقدار باشد. نقاط ثابت  $T$  را با  $\mathcal{F}(T)$  نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۱۰.۲.۱ [۱۳]** فرض کنید  $X$  یک فضای توپولوژیک باشد. نگاشت مجموعه-مقدار  $T : X \rightarrow 2^X$  را در  $X$  نیم پیوسته بالایی گویند هرگاه برای هر مجموعه‌ی باز  $V$  شامل  $Tx$   $(Tx \subset V)$ ، همسایگی باز  $U(x)$  از  $x$  موجود باشد به قسمی که برای هر  $x_0 \in U(x)$ ،  $Tx_0 \subset V$ . نگاشت  $T$  روی  $X$  نیم پیوسته بالایی است هرگاه در هر نقطه‌ی آن نیم پیوسته بالایی باشد.

**تعریف ۱۱.۲.۱ [۲۶]** فرض کنید  $L$  یک زیر مجموعه‌ی ناتهی و بسته از فضای متری  $(X, d)$  باشد. نگاشت مجموعه-مقدار  $T : L \rightarrow \mathcal{CB}(X)$  را  $H$ -نیم پیوسته بالایی گویند هرگاه برای هر  $\varepsilon > 0$  و هر  $x \in L$

$$r = r(x, \varepsilon) > 0$$

موجود باشد به قسمی که برای هر  $x_0 \in B(x, r)$

$$\sup_{y \in Tx_0} d(y, Tx) < \varepsilon,$$

که در اینجا  $B(x, r)$  گوی باز به مرکز  $x \in X$  و شعاع  $r > 0$  می‌باشد.

**تذکر:** تعریف فوق برای نگاشت‌های تک-مقداری، معادل پیوستگی می‌باشد. حال به معرفی دسته‌های مختلف از نگاشت‌های انقباضی مجموعه-مقدار می‌پردازیم.

**تعریف ۱۲.۲.۱** نگاشت مجموعه-مقدار  $T : X \rightarrow \mathfrak{N}(X)$  را در نظر بگیرید. در این صورت

(الف)  $T$  را انقباض نوع نادلر (یا یک  $k$ -انقباض مجموعه-مقدار) گویند هرگاه ثابت  $0 < k < 1$  موجود باشد به قسمی که برای هر  $x, y \in X$

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$

(ب)  $T$  را انقباض نوع میزگوچی-تاکاهاشی گویند هرگاه یک  $MT$ -تابع  $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$  موجود باشد به قسمی که برای هر  $x, y \in X$

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq \alpha(d(x, y))d(x, y).$$

(ج)  $T$  را یک  $(\theta, L)$ -انقباض تقریبی مجموعه-مقدار گویند هرگاه ثابت‌های  $\theta \in (0, 1)$  و  $L \geq 0$  موجود باشند به قسمی که برای هر  $x, y \in X$

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y) + Ld(y, Tx).$$

(د)  $T$  را انقباض نوع برآیند-برآیند (یا یک انقباض تقریبی مجموعه-مقدار تعمیم یافته) گویند هرگاه

$MT$ -تابع  $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$  و ثابت  $L \geq 0$  موجود باشند به قسمی که برای هر  $x, y \in X$ ,

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq \alpha(d(x, y))d(x, y) + Ld(y, Tx).$$

انقباض های نوع میزوگوچی-تاکاهاشی و برآیند-برآیند از انواع مطرح، در تحقیقات اخیر روی نظریه نقطه ثابت متری برای نگاشت های انقباضی می باشد.

کاملاً واضح است که هر انقباض نوع میزوگوچی-تاکاهاشی از نوع برآیند-برآیند نیز می باشد ( $L = 0$ ). مثال زیر نشان می دهد که یک انقباض نوع برآیند-برآیند در حالت کلی یک انقباض از نوع میزوگوچی-تاکاهاشی نیست.

مثال ۱۳.۲.۱. فرض کنید  $l^\infty$  فضای باناخ شامل همه ی دنباله های حقیقی و کراندار با سوپرنرم  $d_\infty$  و پایه ی کانونی  $\{e_n\}$  باشد. فرض کنید  $\{\tau_n\}$  دنباله ی اعداد حقیقی مثبت باشد که  $\tau_0 = \tau_1$  و برای  $n \geq 1$   $\tau_{n+1} < \tau_n$ . (دنباله ی  $\{\tau_n\}$  را به گونه ای اختیار می کنیم که  $\tau_n \rightarrow 0$  و  $\frac{\tau_{n+2}}{\tau_n} \rightarrow 0$  باشد. به عنوان مثال، فرض می کنیم  $\tau_0 = \tau_1 = 1$  و برای هر  $n \in \mathbb{N}$  که  $n \geq 1$   $\tau_n = \frac{1}{n!}$ ). دنباله ی نزولی  $\{\tau_n\}$  از اعداد حقیقی مثبت، کراندار و در نتیجه همگراست. برای هر  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$   $v_n = \tau_n e_n$  در نظر می گیریم (فرض می کنیم  $v_0 = 0$ ).

اگر  $X = \{v_n\}_{n=0}^\infty$  در نظر بگیریم، آن گاه  $X$  یک زیر مجموعه ی کامل و کراندار از  $l^\infty$  خواهد بود. در واقع، چون  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = 0$  و  $\{e_n\}$  کراندار، پس  $v_n = \tau_n e_n \rightarrow 0$  و در نتیجه  $\|v_n\| = \tau_n \rightarrow 0$ . پس وقتی  $0 \in X$ ، در این حالت  $X$  بسته خواهد بود. (همان طور که ما در اینجا این فرض را در نظر گرفتیم که  $X = \{v_0, v_1, v_2, \dots\}$  و  $v_0 = 0$ ).

بنابراین  $(X, d_\infty)$  یک فضای متری کامل است که وقتی  $m > n$   $d_\infty(v_n, v_m) = \tau_n$  در نظر می گیریم.

نگاشت مجموعه-مقدار  $T : X \rightarrow \mathcal{CB}(X)$  را به صورت

$$Tv_n = \begin{cases} \{v_0, v_1\} & n \in \{0, 1\}, \\ X \setminus \{v_1, \dots, v_{n+1}\} & n \geq 2. \end{cases}$$

و تابع  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$  را به صورت

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\tau_{n+2}}{\tau_n} & t = \tau_n, \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف می کنیم. در این صورت شرایط زیر برقرارند:

(الف)  $T$  انقباض نوع برآیند-برآیند است.

(ب)  $T$  انقباض نوع میزوگوچی-تاکاهاشی نیست.

ابتدا ملاحظه می کنید که برای هر  $t \in [0, \infty)$

$$\limsup_{s \rightarrow t^+} \varphi(s) = \limsup_{s \rightarrow \tau^+} \varphi(s) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_{n+2}}{\tau_n} = 0 < 1,$$