وزارت علوم تحقیقات وفناوری
دانشگاه تفرش

پایان نامه کارشناسی ارشد

نقطهٔ ثابت نگاشت های چند مقداری لیپ شیتز یکنواخت در فضاهای متریک و باناخ

استاد راهنما : دکتر نظری

دانشجو : نسرین اسدی

شهریور 1390

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تفرش

دانشکده ریاضی

رساله کارشناسی ارشد

نقطهٔ ثابت نگاشت های چند مقداری لیپ شیتز یکنواخت در فضاهای متریک و باناخ

دانشجو : نسرین اسدی

استاد راهنما : دکتر نظری

امضاء

تقدیم به :

پدر و مادر گرامی

همسر دلسوز

وفرزند دلبندم.

فهرست مطالب

" چکیده"

در این پایان نامه به مطالعه و تحقیق دربارهٔ فضاهای متریک ژئودزیک پرداخته ، دراین راستا فضاهای متریک ژئودزیک با خاصیت $CAT(k)$ را معرفی کرده و به بررسی ویژگی های خاص این فضاها می پردازیم و بویژه درمورد ویژگی های فضاهای $CAT(0)$ و $CAT(1)$ مطالعه می کنیم ، و نشان می دهیم که این فضاها دارای خواص مشابه به فضای هیلبرت می باشند و آن را به عنوان تعمیم متریک فضاهای هیلبرت می شناسیم .

در ادامه نگاشت های چند مقداری لیپ شیتز یکنواخت را روی چنین فضاهایی تعریف کرده و به بررسی وجود نقطهٔ ثابت برای این نگاشت ها می پردازیم ، همچنین وجود نقاط ثابت این نگاشت ها را روی فضاهای کامل و فضاهای با ناخ محدب یکنواخت بررسی می کنیم .

«مقدمه»

در این پایان نامه به معرفی نگاشت های لیپ شیتز یکنواخت پرداخته و نقطهٔ ثابت این نگا شتها را در شرایط متفاوت بررسی می کنیم . نقطهٔ ثابت ابتدا توسط کیرک و گئوبل در [6] مورد مطالعه قرار گرفت و دانشمندانی چون لیپ شیتز و بایولون به مطالعهٔ بیشتری در این مورد پرداختند .

در ادامه فضاهای CAT(K) را مطالعه می کنیم ، این فضاها دستهٔ خاصی از فضاهای متری ژئودزیک هستند که از شرایط خاصی برخوردارند ، امروزه این فضاها از اهمیت زیادی در علم هندسه برخوردارند و در سالهای اخیر توجه محققان زیادی را به خود جلب کرده اند ، اصطلاح CAT(K) اولین بار توسط گرومو برای نشان دادن دسته خاصی از فضاهای ژئودزیک به کار رفت ، بریدجون و هیفلیگر در [1] به مطالعه بیشتر در این فضاها پرداختند و بحث های مهمی را مطرح کردند .

در این کار به مطالعه این فضاها میپردازیم و ویژگیهایی از آنها را مورد بررسی قرار می دهیم و همچنین با تعریف نگاشتهای لیپ شیتز یکنواخت و نگاشتهای غیر انبساطی ، شرایطی را بررسی می کنیم که تحت آن این نگاشتها در فضاهای CAT(K) و بخصوص CAT(0) نقطه ثابت دارند . در ادامه با مفهوم تحدب یکنواخت و ویژگی کاداک-کلی آشنا می شویم و با استفاده از این مفاهیم ، به بررسی نقطه ثابت نگاشتهای لیپ شیتز یکنواخت می پردازیم. همچنین دو نوع خاصی از همگرایی را مطرح میکنیم و از آنهابرای اثبات قضیه های مربوط به نقطه ثابت نگاشتهای مختلف در فضاهای CAT(K) استفاده خواهیم کرد .

فصل اول

مفاهیم مقدماتی

در این بخش با مفاهیم جدید آشنا می شویم و تعاریف پایه را مطالعه می کنیم که در بخش های بعدی مورد استفاده قرارخواهد گرفت.

تعریف 2.1 : نگاشت $T: X \to X$ غیر انبساطی نامیده میشود،هرگاه برای هر xو$y \in X$ ، داشته باشیم :

$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$

فرض

کنید X فضای متریک باشد ، مجموعهٔ تمام زیر مجموعه های نا تهی از X را با N(X) و مجموعهٔ تمام زیرمجموعه های بسته و نا تهی از X را با $\mathcal{C}$(X) و مجموعهٔ تمام زیرمجموعه های بسته و نا تهی و کراندار از X را با CB(X) نشان می دهیم .

در این صورت برای $A, B \in \mathcal{C}(X)$ داریم :

$H\ (A, B) = max\ \{Sup_{b\epsilon B}\ d(b. A), Sup_{a\epsilon A}\ d(a. B)\}$

این جمله به عنوان فاصلهٔ هاسدورف تعمیم یافتهٔ تولید شده توسط d شناخته شده است ،که :

$d(x, a) = \inf_{a\epsilon A} d(x, a)$

در واقع با توجه به این مفهوم می توان نگاشت های غیر انبساطی را چنین تعریف کرد :
تعریف3.1 : نگاشت $T: X \to \mathcal{C}(X)$ (که T نگاشت چند مقداری است) را نگاشت غیر انبساطی نامیم هرگاه برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم : $H(T(x), T(y)) \leq d(x, y)$

یکی از مشکلاتی که در بعضی از نگاشت ها با آن برخورد می کنیم مفهوم تکراراست ،در واقع تکرار نگاشت های تک مقداری، طبیعی است اما برای نگاشت های چند مقداری کار دشواری است ، در این مقاله ما از مفهوم مدار تعمیم یافته برای تعریف این نگاشت ها استفاده می کنیم .

تعریف 4.1 : فرض کنید $T: X \to N(X)$ یک نگاشت چند مقداری باشد ، برای هر $x\epsilon X$ دنبالهٔ $\{x_n\}$، یک مدار تعمیم یافته از $x\epsilon X$ نامیده می شود اگر برای هر $n \geq 1$ داشته باشیم :

$$x_1 = x \quad , \quad x_{n+1} \epsilon\, T(x_n)$$

برای نمایش این دنباله ،از نماد $\mathcal{V}(x)$ استفاده می کنیم.

درادامه مفهوم نگاشت های چند مقداری لیپ شیتز یکنواخت را از طریق مدار تعمیم یافته ،تعریف می کنیم.

تعریف 5.1 : فرض کنید (X,d) فضای متریک باشد ، یک نگاشت چند مقداری $T: X \to N(X)$ یک نگاشتِ $k-$لیپ شیتز یکنواخت نامیده می شود اگر و فقط اگر برای هر $x,y \epsilon X$ و هر مدار تعمیم یافتهٔ $\{x_n\}$ از X ، یک مدار تعمیم یافتهٔ $\{y_n\}$ از Y وجود داشته باشد بطوریکه : $d(x_{n+h},y_n) \leq kd(x_h,y)$

تعریف 6.1 : فرض کنید $T: X \to N(X)$ یک نگاشت چند مقداری باشد گوییم $x\epsilon X$ نقطهٔ ثابت این نگاشت است ، هرگاه $x \epsilon T(x)$ باشد .

تعریف 7.1 :به فضای متریک (X,d) فضای طولی گفته میشود ، هر گاه هر دو نقطه از آن توسط یک مسیر به هم متصل شوند .

تعریف 8.1 : یک مسیر ژئودزیک که x را به y وصل می کند یک نگاشت از بازهٔ بستهٔ $[0,l] \subset R$ به X است بطوریکه :

$$C: [0,l] \to X : \begin{cases} c(l) = y, c(0) = x \\ d\big(c(t),c(\acute{t})\big) = |t - t'| \quad \forall\, t,t' \epsilon [0,l] \end{cases}$$

تصویر α از C یک قطعه ژئودزیک نام دارد که x را به y وصل می کند ،که آن را با $[x\ ,y\ ]$ نشان می دهیم .

تعریف 9.1 : (X,d) فضای ژئودزیک نامیده می شود هرگاه هردو نقطه از X بوسیلهٔ یک مسیر ژئودزیک به هم وصل شده باشند .

تعریف 10.1 :یک مثلث ژئودزیک $\Delta(x_1,x_2,x_3)$ در فضای ژئودزیک (X,d) شامل 3 نقطه در X و یک قطعه ژئودزیک میان هر جفت از رئوس می باشد .

فرض

کنید (X, d) فضای متریک باشد ، دراین صورت برای $D, E \subseteq X$ که نا تهی بوده و $x \epsilon X$ میباشد، روابط زیر را تعریف می کنیم :

$\mathrm{R_x}(D) = sup\{d(x,y): y\epsilon D\}$

$rad_E(D) = inf\{\mathrm{r_x}(\mathrm{D}): \mathrm{x}\epsilon E\}$

$diam(D) = \ sup\{d(x,y): x,y\epsilon D\}$

$cov(D) = \cap \left\{B: \text{گوی بسته است } B, B \supset D\right\}$

تعریف 11.1: یک زیرمجموعه A از X، پذیرفتنی نامیده می شود اگر $A = cov(A)$**.**

$\mathrm{rad_E(D)}$ شعاع های چبیشف از D در E است. (اگر $E = X$ دراین صورت آنرا با $rad(D)$ می نویسیم) و $cov(D)$ یک غلاف پذیرفتنی (قابل قبول) از D در X است .

$\widetilde{N}\ (X) = sup\left\{\frac{rad_A(A)}{diam(A)}\right\}$ ضریب ساختار نرمال از X نامیده می شودکه sup روی تمام زیرمجموعه های A از X گرفته می شودکه پذیرفتنی وکراندار و نا تهی هستند و $diam(A) > 0$ می باشد.

تعریف 12.1 : اگر ثابت $c < 1$ وجود داشته باشد که $\widetilde{N}\ (X) \leq c$ باشد ،گوئیم X ساختار نرمال یکنواخت دارد .

برای زیرمجموعه های D, E فاصله را به این صورت تعریف می کنیم :

$dist(D,E) = inf\{d(x,y): x\epsilon D\ , y\epsilon B\}$

درادامه

نکاتی در مورد فضاهای باناخ را مطالعه می کنیم که در فصل چهار مورد استفاده قرار خواهند گرفت .

فرض کنید X یک فضای باناخ باشد ، مدول تحدب یکنواخت $\delta_X(\varepsilon)$ را با شرط $\varepsilon\ \epsilon[0,2]$ به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\delta_X(\varepsilon) = inf\ \left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|, \|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| \geq \varepsilon\right\} \quad \varepsilon\ \epsilon[0,2]$$

ومشخّصۀ تحدب X را با $\varepsilon_0(X)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\varepsilon_0(X) = sup\{ \varepsilon, \delta_X(\varepsilon) = 0 \}$$

در [9] ثابت شدکه $P > 1$ و $\lambda > 0$ بطوری وجود دارد که $\lambda\, \varepsilon^P \leq \delta_X(\varepsilon)$ باشد، اگر و فقط اگر $c > 0$ و $\alpha \in [0,1]$ وجود داشته باشد که :

$$\| \alpha x + (1-\alpha) y \|^P + c\, w_P(\alpha) \| x - y \|^P \leq \alpha \| x \|^P + (1-\alpha) \| y \|^P \qquad (2)$$

که :

$$w_P(\alpha) = \alpha^P (1-\alpha) + \alpha (1-\alpha)^P$$

هرگاه یک فضای با ناخ محدبِ یکنواخت در نامساوی فوق صدق کند ، گوئیم X محدبِ P- یکنواخت است . و هرگاه X محدبِ P- یکنواخت باشد ، سوپریمم تمام c هایی که درنامساوی (2) صدق می کنند را با c_X نشان می دهیم . این مفهوم به فضاهای ژئودزیک توسعه می دهد .

فصل دوم

فضاهای CAT(k) وویژگیهای آن

1.2 : مقدمه

دراین فصل به معرفی فضاهای CAT(k) می پردازیم و ویژگی های فضاهای CAT(0) را مورد بررسی قرارمی دهیم، فضاهای CAT(k) درابتدا توسط کرومو معرفی شدند ودرسال های اخیرفضاهای CAT(k) توجه بسیاری ازمؤلفان را به خاطرمهم بودن دربسیاری ازجوانب هندسه به خود جلب کرده اند، توضیحات بیشتر و بحث های مهم ازاین فضاها که نقش مهم درهندسه دارند را ازکتاب بریدجان و [1] هیفلیگر وهمچنین در[5] و [2] می توان یافت وهمچنین کیرک در [10,11] به مطالعهٔ این فضاها پرداخته و ادامهٔ کار توسط مؤلفان مختلف در [3,4,6,7,8] دنبال شده است .

زافیرسکو در [9] به بررسی ویژگی های خاصی از فضاهای CAT(0) پرداخته ،که در ادامهٔ این فصل به مطالعهٔ این ویژگی ها می پردازد .

در فصل اول فضای ژئودزیک را تعریف کردیم ، حال به مطالعه بیشتر این فضاها میپردازیم .

اگر فقط یک قطعهٔ ژئودزیک بین هر دو نقطه از X باشد به X فضای ژئودزیک یکتا گوئیم . همچنین فضای (X,d) را یک فضای D- ژئودزیک می نامیم ، اگر هر دو نقطه از X که فاصلهٔ آنها از D کمترباشد بوسیله ژئودزیکی به هم وصل شوند .

اگر فقط یک ژئودزیک بین دو نقطه از X وجود داشته باشد X را فضای D - ژئودزیک یکتا گوئیم. فرض کنید $Y \subset X$ باشد، اجتماع تمام قطعه های ژئودزیک که نقطهٔ پایانی آنها در Y است را با $G_1(Y)$ نشان می دهیم دراین صورت گوئیم Y محدب است اگر $G_1(Y) = Y$ ، یا به طور معادل ، اگرهر جفت از نقاط $x, y \epsilon Y$ بتوانند بوسیلهٔ یک ژئودزیک در X به هم وصل شوند و تصویر هر ژئودزیک در Y قرار بگیرد. Y، D- محدب نامیده می شود اگر این شرط برای همهٔ نقاط $x, y \epsilon Y$ با $d(x,y) < D$ برقرار باشد .

در ادامه فضاهای M_k^n را معرفی می کنیم ، برای این منظور باید فضاهای E^n و S^n و H^n را مطالعه کنیم .

2.2 : فضاهای $M_{\mathrm{k}}^{\mathrm{n}}$

فرض کنید E^n نشان دهنده فضای متریک R^n باشد به طوری که دو بردار $x = (x_1, x_2, \dots x_{\mathrm{n}})$ و $\mathrm{y} = (\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \dots \mathrm{y}_{\mathrm{n}})$را با ضرب اسکالر زیر به یکدیگر مربوط میسازد $(x|\mathrm{y}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} x_{\mathrm{i}}\mathrm{y}_{\mathrm{i}}$. به عبارت دیگر E^n نشان دهنده R^n همراه با نرم اقلیدسی است .

گوی n بعدی به صورت زیر تعریف می شود :

$$S^n = \{x = (x_1, x_2, \dots x_{\mathrm{n+1}}) \in \mathrm{R}^{\mathrm{n+1}} : (x|x) = 1\}$$

گزاره2.2 : فرض کنید $\mathrm{d} : \mathrm{S^n} \times \mathrm{S^n} \to \mathrm{R}$ تابعی باشدکه به هرجفت $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{S^n} \times \mathrm{S^n}$ عدد حقیقی یکتای $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in [0, \pi)$ را اختصاص می دهد بطوریکه $\cos \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = (\mathrm{A}|\mathrm{B})$. دراین صورت $(\mathrm{S^n}, \mathrm{d})$یک فضای متریک است ، چون در شرایط زیر صدق می کند :

1) $d(A, A) = Arc\cos(A | A) = 0$ و $d(A, B) = Arc\cos(A | B) > 0$

2) $d(A, B) = Arc\cos(A | B) = Arc\cos(B | A) = d(B, A)$

3) $d(A, B) \le d(A, C) + d(C, B)$

$d(A, B)$ زاویه بین قطعه $[0, A]$ و$[0, B]$ میباشد، در گزاره 14.2 نامساوی فوق برای زاویه ها اثبات شده است. در اینصورت رابطه 3 نیز به راحتی اثبات میشود .

می توان گفت یک دایره بزرگ در$\mathrm{S^n}$ ، از تقاطع $\mathrm{S^n}$ با زیرفضای برداری 2-بعدی از $E^{\mathrm{n+1}}$ بدست میاید .

یک راه طبیعی برای پارامتری کردن قوس های کوچک از این دایره های بزرگ، با مراجعه به طول قوس وجود دارد که به این صورت است :

برای نقطهٔ $A \in S^n$ داده شده و بردار واحد $U \in E^n$ با $(U|A) = 0$ و یک عدد $a \in [0, \pi)$ ،
مسیر $C: [0, a] \to S^n$ که به صورت زیر تعریف می شود : $C(t) = (\cos t)A + (\sin t)U$

یک ژئودزیک است ، توجه کنید که برای هر $t, t' \in [0, a]$ ، $d\left(c(t), c\left(t'\right)\right) = \left|t - t'\right|$ میباشد . تصویر C در دایره بزرگی مشمول میشود که از تقاطع S^n با زیر فضای برداری تولید شده توسط A و U بوجود میاید ، در واقع تصویر C قوس بزرگی است با بردار ابتدایی U که توسط C(a) به A متصل میشود . اگر $a = \pi$ باشد در اینصورت برای هر انتخاب از U ، $C(\pi) = -A$ خواهد بود ، از سوی دیگر اگر $d(A, B) < \pi$ باشد در اینصورت یک قوس کوچک یکتا وجود دارد که A را به B متصل میسازد. و اگر $A \neq B$ باشد در اینصورت بردار آغازی U از این قوس ، بردار واحدی است که در جهت $B - (A|B)$ میباشد . بنابراین برای فضای (S^n, d) میتوان ویژگی های زیر را بیان نمود :

گزاره3.2 : فرض کنید (S^n, d) فضای ذکر شده دربالا و $A, B \in S^n$ باشد ، در این صورت :

1) اگر $d(A, B) < \pi$ در این صورت فقط یک قطعهٔ ژئودزیک وجود دارد که هر دو نقطه را به هم وصل می کند .
2) اگر $B \neq A$ در این صورت بردارآغازی U از این ژئودزیک، بردار واحد است درجهت $B - (A|B)A$.
3) گوی ها از شعاع کمتراز $\frac{\pi}{2}$ ، مجموعه های محدب می باشند .

اثبات : اثبات تحدب گوی ها ، از این حقیقت پیروی میکند که اگر $d(A, B) < \pi$ باشد در اینصورت فقط یک ژئودزیک وجود دارد که A را به B پیوند میدهد . این قطعه یا قوس ، اشتراک S^n با مخروطی از E^{n+1} است که توسط A و B پیموده میشود . از اینرو شامل نقاطی به فرم $\lambda A + \mu B$ میباشد . ($\lambda A + \mu B \geq 1$) فرض کنید A و B دو نقطه در گوی بسته $\bar{B}(p, r) \subseteq S^n$ باشند ، که $r < \frac{\pi}{2}$ است ، با توجه به تعریف $C \in \bar{B}(p, r)$ میباشد اگر و فقط اگر $(c|p) \geq \cos r$. اما اگر $\mu + \mu \geq 1$ باشد در اینصورت

$$(\mu B + \mu A \;|p) = \lambda(A|p) + \mu(B|p) \geq (\lambda + \mu) \cos r \geq \cos r$$

از اینرو قطعه ای که A را به B وصل میکند در $\bar{B}(p\,,r)$ مشمول میشود . پس گوی ها با شعاع کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ محدب میباشند . □

با توجه به تعریف ، زاویهٔ کروی میان دو ژئودزیک ، از یک نقطه در S^n ، با بردارهای اولیه u, v عدد واحد $\alpha \in [0, \pi]$ است به گونه ای که $\cos\alpha = (u|v)$. برای مثلث داده شدهٔ $\Delta(A, B, C)$ در S^n زاویهٔ رأس در C تعریف می شود با زاویهٔ کروی میان آن طرف مثلث که C را به A و C را به B وصل می کند در این صورت قانون کروی کسینوس به صورت زیر شرح داده شده است :

گزاره 4.2 : فرض کنید Δ یک مثلث کروی باشد با رئوس C و B و A و $a = d(B, C)$ و $b = d(C, A)$ و $c = d(A, B)$. فرض کنید γ نشان دهندهٔ زاویهٔ رأس در C باشد دراین صورت:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$$

اثبات : فرض کنید u و v بردارهای اولیه ضلعهایی از Δ باشند که C را به A و B پیوند میدهد . با توجه به تعریف $\cos\gamma = (u|v)$ و

$\cos c = (($

$$= \cos a \cos b \ (C|C) + \sin a \sin b \ (u|v)$$

$$= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma \qquad \square$$

حال به منظور معرفی فضای هیپربولیک H^n ، فرض کنید $E^{n,1}$ نشان دهندهٔ فضای برداری R^{n+1} باشد که دارندهٔ صورت دو خطی متقارن است و بردارهای $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$ و $v = (v_1, v_2, \dots, v_{n+1})$ را با عدد حقیقی $\langle u, v\rangle$ به هم مرتبط می سازد :

$$\langle u, v\rangle = -u_{n+1}v_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

در این صورت فضای هیپربولیک H^n به صورت زیر تعریف می شود :

$$H^n = \left\{u \in E^{n,1} : < u\,, u >= -1\,, u_{n+1} \geq 1\right\}$$

گزاره 5.2 : فرض کنید $d: H^n \times H^n \to R$ تابعی باشد که به هر جفت $(A,B) \epsilon H^n \times H^n$ یک عدد نامنفی ویکتای $d(A,B)$ را اختصاص می دهدکه $\cosh d(A,B) = -\langle A,B\rangle$. دراین صورت (H^n, d) یک فضای متریک ژئودزیک یکتا می باشد .

گزاره6.2 : فرض کنید (H^n, d) فضای بالایی باشد و $(A,B) \epsilon H^n$ باشد ، در این صورت :

1) اگر u بردار واحد در جهت $B + \langle A|B\rangle A$ باشد، در این صورت قطعه ژئودزیک که AوB را به هم پیوندمی دهد (با شروع از A) به صورت زیر داده می شود :

$$c(t) = (\cosh t)A + (\sinh t)U$$

2) گوی ها مجموعه های محدب هستند .

3) قانون هیپربولیک ازکسینوس : طبق همان علامت گذاری در گزاره 4.2 داریم :

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$$

اثبات : 1) فرض کنید $A \epsilon H^n$ داده شده باشد و u بردار واحدی باشد که $u \epsilon A^{\perp} \subseteq E^{n,1}$. ($\langle A,u\rangle = 0$ و $\langle u,u\rangle = 1$) حال مسیر $c : R \to H^n$ تعریف شده با $t \to (\cosh t)A + (\sinh t)U$ را بررسی میکنیم . توجه کنید که برای هر $t , t' \epsilon R$ ، $d\left(c(t), c\left(t'\right)\right) = \left|t - t'\right|$ خواهد بود . برای $a \geq 0$ داده شده ، تصویر تحت c را تعریف میکنیم از بازه $[0 , a]$ به قطعه ای که A را به $c(a)$ پیوند میدهد و آنرا با

$[A\,,c(a)\,]$ نشان میدهیم . اگر $B \in H^n$ و متمایز از A باشد و فرض کنید u بردار واحد در جهت $B + \langle A|B\rangle$ بوده و واحد یکتا و $u \in A^{\perp}$ باشد در اینصورت خواهیم داشت :

$$B = (\cosh a)A + (\sinh a)U$$

2) محدب بودن گوی ها از این واقعیت پیروی میکند که اگر C را از قطعه $[A\,,B]$ انتخاب کنیم ، بفرم $\lambda A + \mu B$ خواهد بود . ($\lambda + \mu \le 1$ و $\lambda\,,\mu \ge 0$)

3) حال فرض کنید $u\,,v$ بردارهای ابتدایی از قطعات هیپربولیک که C را به A و B پیوند میدهد باشند ، با استفاده از تعریف $\cos\gamma = \langle u|v\rangle$ و

cos

$$= -\ \cosh a \cosh b\,\langle C\,|\,C\rangle - \sinh a \sinh b\,\langle u|v\rangle$$

$$= \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos\gamma \qquad \square$$

حال با استفاده از فضاهای H^n و S^n ، فضاهای M_k^n را معرفی می کنیم .

تعریف 7.2 : فضای M_k^n را به صورت زیر تعریف می کنیم :

1) اگر $k = 0$ باشد ، در این صورت M_0^n فضای اقلیدسی E^n است .

2) اگر $k > 0$ باشد ، دراین صورت M_k^n ازفضای کروی S^n بدست می آید با ضرب تابع فاصله در ثابت $\frac{1}{\sqrt{k}}$. یعنی متر آن برای A, B عضو S^n به این صورت است :

$$d(A,B) = \frac{1}{\sqrt{k}} Arc\cos(A|B)$$

3) اگر $k < 0$ باشد ، دراین صورت M_k^n از فضای هیپربولیک H^n بدست می آید با ضرب تابع فاصله در ثابت $\frac{1}{\sqrt{-k}}$. یعنی متر آن برای A, B عضو H^n به این صورت است :

$$d(A,B) = \frac{1}{\sqrt{-k}} Arc\cosh(-\langle A,B\rangle)$$