بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید بهشتی
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد ریاضی

گراف ناجابجایی یک گروه

نگارش
علی باندری

استاد راهنما
دکتر نگار شهنی کرمزاده

استاد مشاور
دکتر علیرضا سالمکار

شهریور ۱۳۸۹

دانشگاه شهید بهشتی

تاریخ ....

شماره ....

پیوست ....

«بسمه تعالی»

صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین

تلفن: ۲۹۹۰۱

بازگشت به مجوز دفاع شماره ۲۰۰/۲۵۰۹/د مورخ ۸۹/۶/۶ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه **آقای علی باندری** به شماره شناسنامه: **۷۱** صادره از : **ایذه** متولد: **۱۳۶۲** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته: **ریاضی**

با عنوان:

گراف ناجابه‌جایی یک گروه

به راهنمایی: خانم دکتر نگار شهنی کرمزاده

طبق دعوت قبلی در تاریخ **۸۹/۶/۲۴** تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه دکتری مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمره **۱۸/۷۵ (هیجده و هفتاد و پنج صدم)** و درجه **عالی** مورد تصویب قرار گرفت.

	مرتبه علمی	نام دانشگاه	امضاء
۱. **استاد راهنما:** خانم دکتر نگار شهنی کرمزاده	استادیار	شهید بهشتی	ازیلی
۲. **استاد مشاور:** آقای دکتر علیرضا سالمکار	دانشیار	شهید بهشتی	
۳. **استاد داور:** آقای دکتر محمدرضا درفشه	استاد	تهران	
۴. **استاد داور:** آقای دکتر مسعود طوسی	استاد	شهید بهشتی	طوسی
۵. **مدیر گروه:** آقای دکتر سهرابعلی یوسفی	دانشیار	شهید بهشتی	

تقدیم به:

پدر و مادر عزیز و مهربانم

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس گزاری...

-حمد و سپاس ایزد قادر یگانه را سزاست که بندگان را به گوهر فکرت مزین گردانیده و به رحمت و حکمتش جان آنان را پذیرای انوار تابناکش نموده است.

-بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای عزیز و محترم خود خانم دکتر کرمزاده به خاطر راهنمایی‌های سودمند و زحمات زیادی که در طول انجام این پایان‌نامه متقبل شدند، صمیمانه سپاسگذاری کنم.

-از آقای دکتر سالمکار به خاطر قبول زحمت مشاوره‌ی این پایان‌نامه نیز سپاسگذاری می‌کنم.

-همچنین از آقایان دکتر طوسی و دکتر درفشه که داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند قدردانی می‌کنم.

-از تمامی اعضای خانواده‌ی محترمم که در طول مدت تحصیل با صبر و بردباری باعث تشویق و دلگرمی من بوده‌اند، بسیار متشکر و سپاسگذارم و بقای عمر و عزت آنان را از خداوند متعال خواهانم.

-در پایان از تمامی دوستان و همکلاسی‌های عزیز که در انجام این پایان‌نامه ما را یاری نمودند تشکر می‌کنم.

چکیده

فرض کنید G یک گروه غیرآبلی و $Z(G)$ مرکز آن باشد. به گروه G گراف Γ_G را طوری نسبت می‌دهیم که $G - Z(G)$ مجموعه‌ی رئوس و همچنین دو عضو x و y به هم متصل می‌باشند اگر وتنها اگر $xy \neq yx$. در این پایان‌نامه، چگونگی تاثیر خواص گراف Γ_G بر گروه G را مورد بررسی قرار می‌دهیم و درستی حدسی مبنی بر اینکه، اگر G و H دو گروه غیرآبلی متناهی باشند، به طوری که $\Gamma_G \cong \Gamma_H$ ، آن‌گاه $|G| = |H|$ را برای برخی از گروه‌ها بررسی می‌کنیم. یکی از نتایجی که نشان می‌دهیم این است که اگر G یک گروه غیرآبلی متناهی و پوچتوان باشد و H گروهی باشد که $\Gamma_G \cong \Gamma_H$ و $|G| = |H|$ آن گاه H نیز پوچتوان می باشد.

کلمات کلیدی: گراف ناجابجایی، گروه متناهی، گروه غیرآبلی، $AC-$گروه.

پیشگفتار

مطالعه‌ی ساختارهای جبری با استفاده از خواص گراف‌ها، یکی از موضوعات تحقیقاتی جذاب در بیست سال اخیر می‌باشد و منجر به مطرح شدن نتایج بسیار جالب و سوالات زیادی شده است. مقالات زیادی نوشته شده‌اند که در آنها به یک ساختار جبری مانند گروه یا حلقه گرافی خاص را نسبت داده‌اند و به کمک خواص این گراف نتایج ارزشمندی را در مورد ویژگی‌های جبری آن ساختار پیدا کرده‌اند. مراجع [۲، ۳، ۴، ۶، ۷، ۸، ۱۲، ۲۸، ۳۵] بیانگر این مطلب می‌باشند.

نخستین بار این نظریه توسط پاول اردوش و در مورد گروه‌ها به این صورت مطرح شد که به هر گروه غیرآبلی یک گراف ناجابجایی نسبت داد و راس‌های آن را عضوهای نامرکزی گروه در نظر گرفت و دو عضو به هم متصل‌اند اگر و تنها اگر با هم جابجا نشوند. به یک گروه دلخواه به روش‌های مختلفی می‌توان یک گراف را نسبت داد.

در این پایان‌نامه که بر اساس [۱] نگارش شده است به مطالعه‌ی گراف ناجابجایی یک گروه غیرآبلی خواهیم پرداخت و فصل دوم تا پنجم را در بر می‌گیرد.

در فصل اول به بیان تعاریف و قضایایی خواهیم پرداخت که در فصل‌های بعد لازم می‌شوند. بیشتر این قضایا بدون اثبات آورده شده‌اند و در مقابل هر یک مرجع مناسبی معرفی شده تا در صورت لزوم به آن مراجعه شود.

در فصل دوم گراف ناجابجایی را تعریف کرده و بعضی از خواص آن را بیان می‌کنیم. در این فصل نشان خواهیم داد که گراف فوق همواره همبند می‌باشد و قطر آن ۲ و کمر آن ۳ می‌باشد. همچنین این گراف مسطح می‌باشد اگر وتنها اگر گروه آن مرتبه ۶ یا ۸ باشد. در پایان این فصل نشان خواهیم داد که اگر G یک گروه و H زیر گروه دلخواهی از آن با اندیس متناهی باشد و عدد احاطه‌گر گراف

H متناهی باشد آن‌گاه عدد احاطه‌گر گراف G نیز متناهی می‌باشد.

در فصل سوم حدسی به این صورت مطرح خواهد شد که آیا دو گروه غیرآبلی متناهی که دارای گراف‌های ناجابجایی یکسان هستند، هم مرتبه خواهند بود. در اینجا لزوما دو گروه یکریخت نیستند. $AC-$گروه‌ها را تعریف می‌کنیم و نشان خواهیم داد که اگر این حدس در مورد $AC-$گروه‌ها صادق باشد آن‌گاه در مورد همه‌ی گروه‌ها صدق می کند. همچنین نشان خواهیم داد در صورتی که گراف‌های مربوط به دو گروه غیرآبلی یکریخت باشند، کدام یک از خواص گروه‌ها به دیگری منتقل خواهد شد.

در فصل چهارم به بیان رابطه‌ی بین عدد رنگی و عدد خوشه می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که عدد رنگی یک گروه متناهی برابر مینیمم تعداد زیر گروه‌های آبلی آن می‌باشد که گروه را می‌پوشانند و اندیس مرکز گروه یک کران بالا برای عدد رنگی می‌باشد.

در فصل پنجم گروه‌هایی را که توسط گرافشان مشخص می‌شوند معرفی می‌کنیم. این مطلب را در مورد چند گروه از جمله گروه سوزوکی، گروه $PSL(۲, ۲^n)$ که $n > ۲$ و... بررسی خواهیم کرد.

در این پایان‌نامه منظور از یک در گروه‌ها، عضو همانی می‌باشد.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

مقدمه

در این فصل به بیان تعاریف اولیه و قضایای معروفی که به آنها استناد خواهیم کرد می‌پردازیم. اکثر این قضایا بدون اثبات آورده شده‌اند و در مقابل هر یک مرجعی مناسب معرفی شده است که خواننده در صورت نیاز می تواند به آنها مراجعه کند.

۱.۱ تعاریف و قضایای مربوط به نظریه‌ی گراف

تعریف ۱.۱.۱. گراف بدون یال جهت‌دار و بدون طوقه را گراف ساده می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. گرافی که مجموعه‌ی راس‌ها و یال‌های آن متناهی باشند گراف متناهی نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم Γ گرافی ساده باشد، مجموعه‌ی راس‌های Γ را با $V(\Gamma)$ و مجموعه‌ی یال‌های Γ را با $E(\Gamma)$ نشان می‌دهیم. مرتبه‌ی Γ را $|V(\Gamma)|$ تعریف می‌کنیم. همچنین برای هر $\nu \in V(\Gamma)$ ، درجه‌ی ν را با $d(\nu)$ نمایش داده و برابر تعداد یال‌هایی است که به ν وصل می‌شود.
دو راس v و ν را مجاور گوییم هرگاه بین آن‌ها یال وجود داشته باشد. یال $\{v,\nu\}$ را با $v\nu$ نشان می‌دهیم.

ماکسیمم و مینیمم درجه‌ی راس‌های گراف Γ را به ترتیب با $\Delta(\Gamma)$ و $\delta(\Gamma)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۴. گراف Γ منظم نامیده می‌شود هرگاه درجه‌ی همه‌ی راس‌های آن با هم برابر باشند.

تعریف ۱.۱.۵. تابع ψ_Γ که به هر یال از گراف Γ یک جفت نامرتب از راس‌های Γ را نسبت می‌دهد، تابع وقوع Γ گوییم.

اگر e یک یال و ν و v راس‌هایی باشند که $\psi_\Gamma(e) = \nu v$ آن گاه می‌گویند e، ν و v را به هم وصل می‌کند.

تعریف ۱.۱.۶. گراف Λ زیرگراف Γ می‌باشد هرگاه $V(\Lambda) \subseteq V(\Gamma)$ و $E(\Lambda) \subseteq E(\Gamma)$ و ψ_Λ تحدید ψ_Γ به $E(\Lambda)$ باشد.

فرض کنیم V زیرمجموعه‌ای ناتهی از راس‌های Γ باشد، زیرگرافی از Γ را که مجموعه‌ی رئوسش مجموعه‌ی V باشد و یال‌هایش مجموعه‌ای از یال‌هایی از Γ باشد که هر دو انتهای آن‌ها در V واقع شود، زیر گراف القایی روی V گوییم.

تعریف ۱.۱.۷. گرافی را که بین هر دو راس متمایز آن یال وجود داشته باشد گراف کامل گوییم.

تعریف ۱.۱.۸. زیرمجموعه‌ی X از راس‌های Γ خوشه نامیده می‌شود هرگاه زیرگراف القایی روی X گرافی کامل باشد.

ماکزیمم اندازه‌ی یک خوشه در گراف Γ را عدد خوشه گوییم و آن را با $\omega(\Gamma)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۹. زیرمجموعه‌ی X از راس‌های گراف Γ را یک مجموعه‌ی مستقل گوییم هرگاه زیرگراف القایی روی X یال نداشته باشد.

ماکزیمم اندازه‌ی یک مجموعه‌ی مستقل در گراف Γ را عدد استقلال نامیده و آن را با $\alpha(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. k-رنگ آمیزی راسی از گراف Γ تخصیص k رنگ به راس‌های Γ می‌باشد که هیچ دو راس مجاور رنگ یکسان نداشته باشند.

مینیمم اندازه k که Γ، k-رنگ پذیر باشد را عدد رنگی راسی گراف نامیده و با $\chi(\Gamma)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید Γ یک گراف ساده باشد. یک مسیر مانند P در Γ دنباله‌ای مانند $\nu_0 e_1 \nu_1 e_2 \ldots \nu_{k-1} e_k \nu_k$ می‌باشد که جملات آن از رئوس و یال‌های متمایز تشکیل شده است. در این صورت P یک مسیر بین ν_0 و ν_k نامیده می‌شود و طول آن برابر k تعریف می‌شود. اگر ν_0 و ν_k با یال e_{k+1} مجاور باشند آنگاه $P \bigcup \{e_{k+1}\}$ یک دور نامیده می‌شود. طول دور تعداد یال‌های آن می‌باشد.

برای هر دو راس ν و ω در Γ منظور از $d(\nu, \omega)$ طول کوتاه‌ترین مسیر بین ν و ω است. اگر بین دو راس ν و ω مسیری موجود نباشد آنگاه قرار می‌دهیم $d(\nu, \omega) = \infty$.

قطر گراف Γ با نماد $diam(\Gamma)$ نمایش داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$diam(\Gamma) = sup\left\{d(\nu, \omega) : \nu, \omega \in V(\Gamma)\right\}$$

طول کوتاه‌ترین دور در گراف را کمر گراف گوییم و آن را با $girth(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم. اگر Γ دارای هیچ دوری نباشد کمر Γ را بینهایت تعریف می‌کنیم.

دوری که شامل همه ی راس‌های Γ باشد را دور همیلتنی گوییم. اگر Γ شامل یک دور همیلتنی باشد، آن گاه Γ را گراف همیلتنی می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. گراف ساده Γ را همبند می‌نامیم، هر گاه بین هر دو راس آن یک مسیر وجود داشته باشد و در غیر این صورت آن را ناهمبند می‌نامیم.

هر زیر گراف همبند ماکسیمال از Γ را یک مولفه‌ی همبندی می‌نامیم.

همبندی راسی گراف Γ را با نماد $\kappa(\Gamma)$ نمایش داده و آن را برابر مینیمم تعداد رئوس از Γ تعریف می‌کنیم که با حذف آنها، گراف فوق ناهمبند شود.

یک زیرمجموعه مانند S از رئوس گراف همبند Γ را مجموعه برش گوییم هرگاه $G-S$ گرافی ناهمبند باشد.

تعریف ۱.۱.۱۳. برای گراف Γ و زیرمجموعه‌ی S از رئوس $V(\Gamma)$، $N_\Gamma[S]$ مجموعه‌ی رئوسی در Γ است که یا در S هستند یا با راس‌های S مجاورند.

اگر $N_\Gamma[S] = V(G)$ آن‌گاه S را مجموعه‌ی احاطه گر (از راس‌های Γ)می‌نامیم. عدد احاطه‌گر گراف Γ را با $\gamma(\Gamma)$ نشان می‌دهیم و آن را برابر مینیمم اندازه‌ی مجموعه احاطه‌گر از راس‌های Γ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱۴. گراف مسطح گرافی است که بتوان آن را در یک صفحه نشانید به طوری که هیچ دو یالی از آن به جز در راس ها همدیگر را قطع نکنند.

تعریف ۱.۱.۱۵. دو گراف Γ و Λ را یکسان گوییم هرگاه $V(\Gamma) = V(\Lambda)$، $E(\Gamma) = E(\Lambda)$ و $\psi_\Gamma = \psi_\Lambda$. اگر دو گراف یکسان باشند، آن‌گاه می توان آن‌ها را بوسیله‌ی نمودارهای همانند نشان داد. اما ممکن است گراف‌هایی یکسان نباشند و یک نمودار داشته باشند .

دو گراف Γ و Λ را یکریخت گوییم هرگاه زوج (θ, ϕ) ،

$$\theta : V(\Gamma) \longrightarrow V(\Lambda)$$

$$\phi : E(\Gamma) \longrightarrow E(\Lambda)$$

تناظر دوسویی باشند به طوری که، $\psi_\Gamma(e) = \nu v \Longleftrightarrow \psi_\Lambda(\phi(e)) = \theta(\nu)\theta(v)$.

قضیه ۱.۱.۱۶. (دیراک) *اگر Γ گرافی ساده با $\nu \geq ۳$ و $\delta \geq \nu/۲$ باشد که ν تعداد راس‌ها و δ مینیمم درجه‌ی راس‌های گراف باشد آن‌گاه Γ همیلتنی است.*

برهان. قضیه ۳.۴ [۹]. □

تعریف ۱.۱.۱۷. هر فضای محصور بین یال‌های یک گراف مسطح یک ناحیه نامیده می‌شود.

قضیه ۱.۱.۱۸. (اویلر) *فرض کنید ν تعداد رئوس و ϵ تعداد یال‌ها و τ تعداد نواحی یک گراف مسطح همبند باشند. در این صورت*

$$\nu + \tau - \varepsilon = ۲$$

برهان. قضیه ۹.۵ [۹]. □

قضیه ۱.۱.۱۹. *مجموع درجات راس‌های یک گراف دو برابر تعداد یال‌ها می‌باشد.*

برهان. قضیه ۱.۱ [۹]. □

نتیجه ۱.۱.۲۰. *فرض کنید Γ گرافی مسطح و ساده باشد و ν تعداد رئوس و ε تعداد یال‌های گراف باشد که $\nu \geq ۳$. در این صورت $\varepsilon \leq ۳\nu - ۶$.*

برهان. نتیجه ۹.۵.۲ [۹]. □

نتیجه ۱.۱.۲۱. *اگر گراف مسطح Γ ساده باشد، آن‌گاه $\delta \leq ۵$.*

برهان. نتیجه ۹.۵.۳ [۹]. □

لم ۱.۱.۲۲. *اگر Γ مسطح باشد آن‌گاه هر زیر گراف آن مسطح می‌باشد.*

برهان. لم ۲.۱۰.۹ [۹]. □

نتیجه ۲۳.۱.۱. *گراف کامل از مرتبه‌ی ۵ مسطح نیست.*

برهان. نتیجه ۴.۵.۹ [۹]. □

تعریف ۲۴.۱.۱. گراف Γ را گراف دو بخشی گوییم هرگاه بتوانیم مجموعه‌ی رئوس را به دو زیرمجموعه افراز کنیم به طوری که هر یال Γ شامل یک راس در یک مجموعه و راس دیگرش در مجموعه‌ی دیگر باشد.

گراف دوبخشی Γ را کامل گوییم هرگاه M و N افراز رئوس باشند و هر راس M با همه‌ی راس‌های N مجاورباشد و بالعکس. اگر تعداد رئوس مجموعه‌ی M برابر m و تعداد رئوس مجموعه‌ی N برابر n باشد آنگاه گراف کامل دوبخشی را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم.

نتیجه ۲۵.۱.۱. $K_{3,3}$ *مسطح نیست.*

برهان. نتیجه ۵.۵.۹ [۹]. □

۲.۱ تعاریف و قضایای مربوط به نظریه‌ی گروه‌ها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم G گروه و H زیرگروهی ناتهی از آن باشد. در این صورت

(الف) مرکزساز H در G را با $C_G(H)$ نشان داده وبه صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_G(H) = \{a \in G : \forall x \in H, ax = xa\}$$

اگر $H = \{x\}$ آنگاه مرکزساز H در G را به صورت $C_G(H)$ نشان می‌دهیم.

(ب) هرگاه G یک گروه باشد، آن گاه مرکز G را با $Z(G)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z(G) = \{a \in G : \forall x \in G, ax = xa\}$$

(ج) هرگاه G یک گروه و H زیرگروهی نابدیهی از آن باشد آن گاه نرمالساز H در G را با $N_G(H)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N_G(H) = \{g \in G : g^{-1}Hg = H\}$$

لم ۲.۲.۱. *فرض کنید G یک گروه و H زیر گروه آن باشد. در این صورت H در G نرمال است اگر و تنها اگر $N_G(H) = G$.*

برهان. فرض کنیم $H \trianglelefteq G$. در این صورت برای هر $g \in G$ داریم $g^{-1}Hg = H$. بنابراین برای هر $g \in G$، $g \in N_G(H)$ و در نتیجه $N_G(H) = G$. بالعکس اگر $N_G(H) = G$ آن گاه برای هر $g \in G$ داریم $g \in N_G(H)$. بنابراین برای هر $g \in G$، $g^{-1}Hg = H$ و درنتیجه $H \trianglelefteq G$. □

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید G یک گروه و x و g دو عضو از G باشند. در این صورت $g^{-1}xg$ مزدوج x با g نام دارد و با علامت x^g نشان داده می‌شود.

رابطه‌ی تزویج یک رابطه‌ی هم ارزی است. هر کلاس هم ارزی نسبت به این رابطه را یک رده‌ی تزویج می گویند. اگر A یک رده‌ی تزویجی باشد به طوری که $a \in A$ آن‌گاه

$$A = \{g^{-1}ag : g \in G\}.$$

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید G یک گروه و X یک زیر مجموعه‌ی آن باشد. در این صورت مغز X در G که آن را با $Core_G(X)$ نشان می‌دهیم عبارت است از زیر گروه نرمال تولید شده با همه‌ی زیر گروه‌های نرمال G که در X قرار می‌گیرند. اگر $H \leq G$ باشد آن‌گاه $Core_G(H)$ بزرگترین زیر گروه نرمال G است که در H قرار می‌گیرد.

تعریف ۵.۲.۱. گروه G را ساده گوییم هرگاه جز $\{1\}$ و G زیرگروه نرمال دیگری نداشته باشد.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم X زیرمجموعه‌ای از گروه G باشد. زیرگروه تولید شده با X را که با $\langle X\rangle$ نشان می‌دهیم اشتراک همه‌ی زیرگروههای G است که شامل Xاند.

گروه G را متناهی مولد گوییم در صورتی که زیرمجموعه‌ی متناهی مانند X وجود داشته باشد که $G = \langle X\rangle$. در این صورت هر یک از اعضای X را یک مولد می‌نامیم.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید F یک گروه، X یک مجموعه و $\theta : X \longrightarrow F$ یک تابع باشد. در این صورت F را بر X آزاد گوییم هرگاه به ازای هر گروه مانند G و هر تابع مانند $\alpha : X \longrightarrow G$ یک همریختی منحصربه فرد مانند $\beta : F \longrightarrow G$ موجود باشد به طوری که $\alpha = \theta\beta$. گروه F را یک گروه آزاد گوییم هرگاه بر مجموعه‌ای آزاد باشد. اعضای گروه آزاد F به صورت دنباله $x_1^{\varepsilon_1}\dots x_n^{\varepsilon_n}$ می‌باشند که $x_i \in X$ و $\varepsilon_i \in Z$.