بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه آمار

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
آمار ریاضی

ترتیب‌های تصادفی و وابستگی در مدل‌های شکنندگی

استاد راهنما: دکتر علی دولتی

استاد مشاور: دکترحمزه ترابی

پژوهش و نگارش: فاطمه سخایی‌فر

مهر ماه ۱۳۸۹

تقدیم به

یگانه‌ی زندگیم

مهدی

سپاس و ستایش خدا را که به من نعمت بندگی و آموختن عطا کرد.

سپاس از دانشمند فرزانه، استاد عزیز «دکتر علی دولتی» که با راهنمایی این پایان نامه توفیق آموختن را به من ارزانی داشتند و بدون کلام روشنگر ایشان جد و جهد اینجانب به ثمر نمی رسید.

سپاس از استاد ارجمندم «دکتر حمزه ترابی» که مشاوره این پایان نامه را پذیرفتند.

سپاس فراوان از دوستان خوبم «اعظم دهقانی»، «فاطمه باقری»، «نرگس منظری»، «مرضیه ترکی»، «معصومه فروغی» و «نرگس یگدانه» که همواره یاریگر من بودند.

سپاس از نور چشمانم، پدر و مادر دلسوز و مهربانم که دعای خیرشان همواره بدرقه ی راهم بود.

و سپاس از همسر مهربان و صبورم که تکیه بر حضورش قدم هایم را در این راه استوارتر ساخت.

چکیده

مدل‌های نرخ شکست متناسب به طور گسترده‌ای در آنالیز بقا و قابلیت اطمینان استفاده می‌شوند. برای این مدل‌ها موارد زیادی پیش می‌آید که برخی از عوامل (یا متغیرهای مستقل) نامعلوم هستند و در نتیجه نمی‌توانند به طور صریح در تجزیه و تحلیل وارد شوند. در این گونه موارد مدل‌های نرخ شکست متناسب، کارایی لازم را ندارند. یک جایگزین مناسب در این حالت‌ها استفاده از مدل‌های شکنندگی است که عوامل در نظر گرفته نشده را در قالب متغیرهای غیر قابل مشاهده که متغیرهای شکنندگی نامیده می‌شوند، وارد تجزیه و تحلیل می‌کنند. مدل‌های شکنندگی به دو صورت یک‌متغیره و چندمتغیره تعریف می‌شوند. در حالت کلی روشی مناسب برای انتخاب توزیع متغیر شکنندگی وجود ندارد و این موضوع که توزیع در نظر گرفته شده برای متغیر شکنندگی چه اثری روی متغیرهای جمعیت دارد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. هدف اصلی این پایان‌نامه، بررسی این موضوع است که چگونه ترتیب‌های تصادفی معروف مانند ترتیب نرخ شکست، ترتیب نسبت درستنمایی، ترتیب پراکندگی، ترتیب تبدیل لاپلاس و ترتیب تبدیلات محدب مربوط به متغیرهای شکنندگی، به ترتیب‌های مربوط به متغیرهای جمعیت منتقل می‌شوند. موضوع جالب دیگری که در این پایان‌نامه به آن می‌پردازیم، وابستگی بین متغیرهای شکنندگی و متغیرهای جمعیت است. این مسائل را در حالت یک‌متغیره برای مدل شکنندگی کلاسیک ضربی، مدل شکنندگی جمعی و مدل شکنندگی تعمیم‌یافته دنبال خواهیم کرد. برای حالت چندمتغیره نیز نتایجی را به‌دست خواهیم آورد.

فهرست مطالب

۱ مفاهیم مورد نیاز ۱

۱.۱ مقدمه ۲

۲.۱ مفاهیم طول عمر ۲

۳.۱ ترتیب‌هاي تصادفي ۳

۴.۱ مفاهیم و ترتیب‌هاي وابستگي دو متغیره ۶

۵.۱ مفاهیم و ترتیب‌هاي وابستگي چندمتغیره ۹

۶.۱ ترتیب‌هاي تصادفي چندمتغیره ۱۲

۲ معرفی مدل‌هاي شکنندگي ۱۵

۱.۲ مقدمه ۱۶

۲.۲ مدل کاکس ۱۶

۳.۲ انواع مدل‌های شکنندگی ۱۸

۱.۳.۲ مدل شکنندگي خوشه‌اي ۲۲

۲.۳.۲ مدل شکنندگي کلاسیك ۲۳

۳.۳.۲ مدل شکنندگي جمعي ۳۲

۴.۳.۲ مدل شکنندگي تعمیم‌یافته ۳۴

۳ مقایسه‌ی مدل‌هاي شکنندگي با استفاده از ترتیب‌هاي تصادفي ۳۹

۱.۳ مقدمه ۴۰

۲.۳ مدل شکنندگي کلاسیك ۴۰

۳.۳ مدل شکنندگي تعميم‌يافته ۴۹

۴ مقايسه‌هاي تصادفي در مدل‌هاي شکنندگي چندمتغيره ۵۹

۱.۴ مقدمه ۶۰

۲.۴ معرفي مدل‌هاي شکنندگي چندمتغيره ۶۰

۳.۴ ترتيب‌هاي تصادفي چندمتغيره ۶۱

۴.۴ ترتیب‌های تصادفی باقیمانده‌ی طول عمر ۷۰

۵ نتیجه‌گیری ۷۹

۱.۵ مقدمه ۸۰

۲.۵ تفسیر نتایج ۸۰

الف واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی ۸۵

ب واژه نامه‌ی انگلیسی به فارسی ۸۹

مراجع ۹۳

فهرست جدول‌ها

۱.۲ برآورد ضرائب رگرسیونی در مدل شکست متناسب وایبل بدون شکنندگی . . . ۲۱

۲.۲ برآورد ضرائب رگرسیونی در مدل شکست متناسب وایبل با شکنندگی ۲۱

فصل ۱

مفاهیم مورد نیاز

۱.۱ مقدمه

در این فصل تعاریف و قضایایي از بحث ترتیب‌هاي تصادفي و مفاهیم طول عمر را که در این پایان‌نامه به آن‌ها نیاز داریم، بدون اثبات بیان می‌کنیم. براي جزئیات بیشتر مربوط به ترتیب‌هاي تصادفي می‌توان به مرجع [۴۰] و برای مفاهیم طول عمر مي‌توان به مرجع [۳] مراجعه کرد.

۲.۱ مفاهیم طول عمر

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته‌ی غیر منفی با تابع توزیع تجمعی $F(x)$، تابع بقای $\bar{F}(x) = ۱ - F(x)$، تابع چگالی $f(x)$، تابع نرخ شکست $\lambda(x) = f(x)/\bar{F}(x)$، تابع نرخ شکست وارون $r(x) = f(x)/F(x)$، تابع متوسط نرخ شکست $\bar{\Lambda}(t) = \frac{۱}{t}\int_{۰}^{t} \lambda(x)dx$، تابع میانگین باقیمانده‌ی طول عمر $m(t) = E[X-t|X>t]$ و تبدیل لاپلاس $L_X(t) = E(e^{-tX})$ باشد.

تعریف ۱.۲.۱. *متغیر تصادفي X را داراي*

(الف) نرخ شکست صعودي (IFR) می‌گوییم اگر تابع نرخ شکست آن صعودی یا به‌طور معادل $\bar{F}(x)$ يك تابع لگ کاو (لگ مقعر) باشد، یعني:

$$\frac{d^۲}{dx^۲}\ln \bar{F}(x) \leq ۰.$$

(ب) نرخ شکست نزولي (DFR) مي‌گوييم اگر تابع نرخ شکست آن نزولی یا به‌طور معادل $\bar{F}(x)$ يك تابع لگ کوژ (لگ محدب) باشد، یعني:

$$\frac{d^۲}{dx^۲}\ln \bar{F}(x) \geq ۰.$$

(پ) نرخ شکست صعودي در میانگین (IFRA) مي‌گوييم اگر تابع میانگین نرخ شکست آن صعودی یا به‌طور معادل $-\frac{\ln \bar{F}(t)}{t}$ نسبت به $t \geq ۰$ صعودي باشد.

(ت) نرخ شکست نزولي در میانگین (DFRA) مي‌گوييم اگر تابع میانگین نرخ شکست آن نزولی یا به‌طور معادل $-\frac{\ln \bar{F}(t)}{t}$ نسبت به $t \geq ۰$ نزولي باشد.

(ث) نرخ شکست وارون صعودي (IRFR) مي‌گوييم اگر $F(x)$ يك تابع لگ کوژ باشد، یعني:

$$\frac{d^۲}{dx^۲}\ln F(x) \geq ۰.$$

(ج) نرخ شکست وارون نزولي (DRFR) مي‌گوييم اگر $F(x)$ يك تابع لگ کاو باشد، يعني:

$$\frac{d^۲}{dx^۲}\ln F(x) \leq ۰.$$

(چ) نسبت درستنمايي نزولي (DLR) مي‌گوييم اگر به ازاي $t \geq ۰$ نسبت $\frac{f(x+t)}{f(x)}$ در $t \geq ۰$ صعودي باشد.

(ح) ميانگين باقيمانده‌ی طول عمر نزولي (DMRL) مي‌گوييم اگر $\frac{\int_t^\infty \bar{F}(s)\ ds}{\bar{F}(t)}$ نزولي باشد.

(خ) نو به از کهنه (NBU) مي‌گوييم اگر $\bar{F}(x+y) \leq \bar{F}(x)\bar{F}(y)$.

(د) کهنه به از نو (NWU) مي‌گوييم اگر $\bar{F}(x+y) \geq \bar{F}(x)\bar{F}(y)$.

(ذ) نو به از کهنه در ميانگين هارموني (HNBUE) می‌گوييم اگر:

$$\int_۰^\infty e^{-\alpha x}P(X>x)\ dx \geq \frac{E(X)}{۱+\alpha E(X)}.$$

(ر) کهنه به از نو در ميانگين هارموني (HNWUE) می‌گوييم اگر:

$$\int_۰^\infty e^{-\alpha x}P(X>x)\ dx \leq \frac{E(X)}{۱+\alpha E(X)}.$$

بين مفاهيم بيان شده در تعريف ۱.۲.۱ روابط زير برقرار است:

IFR $\Rightarrow$ IFRA $\Rightarrow$ NBU $\Rightarrow$ NBUE $\Rightarrow$ HNBUE.

قضيه ۲.۲.۱ . *آميخته‌ای از توزيع‌های دارای ويژگی DFR، مجددا DFR است، اما برای توزيع‌های دارای ويژگی IFR اين موضوع لزوما درست نيست.*

۳.۱ ترتيب‌هاي تصادفي

فرض کنيد X و Y دو متغير تصادفي و غيرمنفي با تابع توزيع تجمعي F و G، توابع بقاي $\bar{F}$ و $\bar{G}$ ، توابع چگالي f و g، توابع نرخ شکست λ_X و λ_Y، توابع نرخ شکست وارون با r_X و r_Y، توابع ميانگين باقيمانده‌ی طول عمر $m_X(t)$ و $m_Y(t)$ و تبديل‌هاي لاپلاس $L_X(t)$ و $L_Y(t)$ باشند. تعريف زير ترتيب‌هاي تصادفي معروف بين دو متغير تصادفي شامل ترتيب نرخ شکست، ترتيب

نرخ شکست وارون، ترتیب تصادفي معمولي، ترتیب نسبت درستنمايي، ترتیب میانگین باقیماندهی طول عمر، ترتیب میانگین هارموني باقیماندهی طول عمر، ترتیب محدب، ترتیب محدب صعودي، ترتیب محدب نزولي، ترتیب تبدیل لاپلاس، ترتیب نسبت تبدیل لاپلاس، ترتیب نسبت تبدیل لاپلاس وارون، ترتیب نسبت تبدیل لاپلاس مشتق گرفته شده، ترتیب نسبت تبدیل لاپلاس مرتبهی n و ترتیب پراکندگي را یادآوري ميکند.

تعریف ۱.۳.۱.

(الف) X *را کمتر از* Y *در ترتیب تصادفي معمولي ميگوییم* $(X \leq_{st} Y)$ *هرگاه* $\bar{F}(x) \leq \bar{G}(x)$.

(ب) X *را کمتر از* Y *در ترتیب نرخ شکست ميگوییم* $(X \leq_{hr} Y)$ *هرگاه* $\lambda_X(t) \geq \lambda_Y(t)$ *یا بهطور معادل* $\frac{\bar{G}(t)}{\bar{F}(t)}$ *در* t *صعودي باشد. همچنین ميتوان گفت* $X \leq_{hr} Y$ *اگر و تنها اگر به ازاي همهی مقادیر* $t \geq 0$

$$[X|X > t] \leq_{st} [Y|Y > t],$$

باشد یا بهطور معادل

$$P\{X - t > s|X > t\} \leq P\{Y - t > s|Y > t\}.$$

(پ) X *را کمتر از* Y *در ترتیب نرخ شکست وارون ميگوییم* $(X \leq_{rh} Y)$ *هرگاه* $r_X(t) \leq r_Y(t)$، *یا بهطور معادل* $\frac{G(t)}{F(t)}$ *در* $t \geq 0$ *صعودي باشد. همچنین ميتوان گفت* $X \leq_{rh} Y$ *اگر و تنها اگر به ازاي همهی مقادیر* $t \geq 0$

$$[X|X \leq t] \leq_{st} [Y|Y \leq t].$$

(ت) X *را کمتر از* Y *در ترتیب نسبت درستنمايي ميگوییم* $(X \leq_{lr} Y)$ *هرگاه* $\frac{g(t)}{f(t)}$ *در* t *صعودي باشد.*

(ث) X *را کمتر از* Y *در میانگین باقیماندهی طول عمر ميگوییم* $(X \leq_{mrl} Y)$ *هرگاه براي هر* $t \geq 0$ *داشته باشیم* $m_X(t) \leq m_Y(t)$ *یا بهطور معادل نسبت* $\frac{\int_t^\infty \bar{G}(u)\ du}{\int_0^\infty \bar{F}(u)\ du}$ *در* t *صعودي باشد. همچنین داریم* $X \leq_{mrl} Y$ *اگر و تنها اگر به ازاي هر* $t \leq s$

$$\frac{\bar{F}(s)}{\int_t^\infty \bar{F}(u)\ du} \geq \frac{\bar{G}(s)}{\int_t^\infty \bar{G}(u)\ du}.$$

(ج) X را کمتر از Y در میانگین هارموني باقیمانده‌ی طول عمر مي‌گوییم ($X \leq_{Hmrl} Y$) اگر به ازاي هر $x > ۰$ داشته باشیم:

$$\left[\frac{۱}{x}\int_{۰}^{x}\frac{۱}{m_X(u)}\,du\right]^{-۱} \leq \left[\frac{۱}{x}\int_{۰}^{x}\frac{۱}{m_Y(u)}\,du\right]^{-۱}.$$

(چ) X را کمتر از Y در ترتیب محدب گوییم ($X \leq_{cx} Y$) هرگاه به ازاي همه‌ی توابع محدب $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$E[\Phi(X)] \leq E[\Phi(Y)].$$

(ح) X راکمتر از Y در ترتیب مقعرگوییم($X \leq_{cv} Y$) هرگاه به ازاي همه‌ی توابع مقعر$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$E[\Phi(X)] \leq E[\Phi(Y)].$$

(خ) X را کمتر از Y در ترتیب محدب صعودي گوییم ($X \leq_{icx} Y$) هرگاه به ازاي همه‌ی توابع محدب صعودي$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$E[\Phi(X)] \leq E[\Phi(Y)].$$

(د) X راکمتر از Y در ترتیب مقعر صعودي مي‌گوییم ($X \leq_{icv} Y$) هرگاه به ازاي همه‌ی توابع مقعر صعودي$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$E[\Phi(X)] \leq E[\Phi(Y)].$$

(ذ) X راکمتر از Y در ترتیب تبدیل لاپلاس مي‌گوییم ($X \leq_{lt} Y$) هرگاه $L_X(t) \geq L_Y(t)$ باشد.

(ر) X راکمتر از Y در ترتیب نسبت تبدیل لاپلاس مي‌گوییم ($X \leq_{lt-r} Y$) اگر نسبت $\frac{L_Y(t)}{L_X(t)}$ در $t > ۰$ نزولي باشد.

(ز) X راکمتر ازY در ترتیب نسبت تبدیل لاپلاس وارون مي‌گوییم ($X \leq_{r-lt-r} Y$) اگر نسبت $\frac{۱-L_Y(t)}{۱-L_X(t)}$ در $t > ۰$ نزولي باشد.

(س) X راکمتر از Y در ترتیب نسبت تبدیل لاپلاس مشتق گرفته شده مي‌گوییم ($X \leq_{d-lt-r} Y$) اگر نسبت $\frac{L'_Y(t)}{L'_X(t)}$ بر حسب $t > ۰$ نزولي باشد.

(ش) X راکمتر از Y در ترتیب نسبت تبدیل لاپلاس مرتبه‌ی n مي‌گوییم ($X \leq_{n-lt-r} Y$) اگر و تنها اگر $\frac{E[Y^{n-۱}\exp(-tY)]}{E[X^{n-۱}\exp-(tX)]}$ بر حسب $t > ۰$ نزولي باشد.

(ص) X راکمتر از Y در ترتیب پراکندگي مي‌گوییم ($X \leq_{disp} Y$) هرگاه برای $۰ < \alpha \leq \beta < ۱$

داشته باشیم:

$$F^{-1}(\beta) - F^{-1}(\alpha) \leq G^{-1}(\beta) - G^{-1}(\alpha).$$

قضیه‌ی زیر برخی نتایج مربوط به ترتیب‌های تصادفی تعریف بالا را بیان می‌کند.

قضیه ۲.۳.۱ . *برای دو متغیر تصادفی نامنفی X و Y*

(الف) اگر $X \leq_{disp} Y$ آنگاه $Var(X) \leq Var(Y)$.

(ب) اگر $X \leq_{hr} Y$، آنگاه $X \leq_{st} Y$.

(پ) اگر $X \leq_{rh} Y$، آنگاه $X \leq_{st} Y$.

(ت) اگر $X \leq_{lr} Y$، آنگاه $X \leq_{rh} Y$ و $X \leq_{hr} Y$، آنگاه $X \leq_{st} Y$.

(ث) اگر $X \leq_{hr} Y$ آنگاه $X \leq_{mrl} Y$.

(ج) اگر $X \leq_{mrl} Y$، آنگاه $X \leq_{hmrl} Y$.

(چ) اگر $X \leq_{rh} Y$، آنگاه $X \leq_{lt-r} Y$.

(ح) اگر $X \leq_{hr} Y$، آنگاه $X \leq_{r-lt-r} Y$.

قضیه ۳.۳.۱ . *فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفي نامنفی باشند. اگر $X \leq_{hr} Y$ و یکی از X یا Y دارای ویژگی DFR باشد آنگاه:*

$$X \leq_{disp} Y.$$

قضیه ۴.۳.۱ . *فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفي نامنفی باشند. اگر $X \leq_{disp} Y$ و یکی از X یا Y دارای ویژگی IFR باشد آنگاه:*

$$X \leq_{hr} Y.$$

۴.۱ مفاهیم و ترتیب‌هاي وابستگي دو متغیره

فرض کنید (X,Y) یك متغیر تصادفي دو بعدي با تابع توزیع تجمعي $H(x,y)$، تابع چگالي $h(x,y)$، توابع توزیع حاشیه‌اي $F(x)$ و $G(y)$، توابع چگالي $f(x)$ و $g(y)$ و تابع بقاي توام $\bar{H}(x,y)$ باشند

که

$$\begin{aligned}\bar{H}(x,y) &= P(X>x, Y>y)\\ &= 1 - F(x) - G(y) + H(x,y).\end{aligned}$$

فرض کنید

$$H_y^L(x) = P(Y \leq y | X \leq x),$$
$$H_y^R(x) = P(Y > y | X > x),$$
$$H_y(x) = P(Y > y | X = x).$$

تعریف زیر مفاهیم وابستگي دو متغیره شامل وابستگي مربعي مثبت (PQD)، وابستگي مربعي منفي (NQD)، نزولي بودن در دم چپ (LTD)، صعودي بودن در دم راست (RTI)، به‌طور تصادفي صعودي (SI)، نزولي در ناحیه‌ی چپ (LCSD)، صعودي در ناحیه‌ی راست (RCSI)، تماماً مثبت از مرتبه‌ی دو(TP_2)، مثبت بودن مرتبه‌ی دو دترمینان (DP_2) و قاعده‌ی وارون مرتبه‌ی دو(RR_2) را یادآوري مي‌کند.

تعریف ۱.۴.۱.

(الف) بردار تصادفي (X,Y) را PQD (NQD) مي‌گوییم اگر $H(x,y) \geq (\leq) F(x)G(y)$.

(ب) Y را نسبت به X دردم چپ نزولي مي‌گوییم و با $LTD(Y|X)$ نمایش مي‌دهیم اگر براي تمام مقادیر y، $H_y^L(x)$ تابعي نزولي از x باشد. مفهوم $LTD(X|Y)$ به‌طور مشابه تعریف مي‌شود. اگر داشته باشیم $LTD(X|Y)$ و $LTD(Y|X)$، آن را با $LTD(X,Y)$ نشان مي‌دهیم.

(پ) Y را نسبت به X دردم راست صعودي مي‌گوییم و با $RTI(Y|X)$ نشان مي‌دهیم اگر براي تمام مقادیر y، $H_y^R(x)$ تابعي صعودي از x باشد. مفهوم $RTI(X|Y)$ به‌طور مشابه تعریف مي‌شود. اگر داشته باشیم $RTI(X|Y)$ و $RTI(Y|X)$، آن را با $RTI(X,Y)$ نشان مي‌دهیم.

(ت) Y را در X به‌طور تصادفي صعودي مي‌گوییم و با $SI(Y|X)$ نشان مي‌دهیم اگر براي تمام مقادیر y، $H_y(x)$ تابعي صعودي از x باشد. مفهوم $SI(X|Y)$ به‌طور مشابه تعریف مي‌شود. اگر داشته باشیم $SI(X|Y)$ و $SI(Y|X)$، آن را با $SI(X,Y)$ نشان مي‌دهیم.

(ث) (X,Y) را نزولي در ناحیه‌ی چپ مي‌گوییم و با $LCSD(X,Y)$ نمایش مي‌دهیم اگر به ازاي

هر x و y، $P(X \leq x, Y \leq y | X \leq \acute{x}, Y \leq \acute{y})$ نسبت به x' و همچنین نسبت به y' تابعي نزولي باشد.

(ج) (X,Y) را در ناحیه‌ی راست صعودي مي‌گوییم و با $RCSI(X,Y)$ نشان مي‌دهیم اگر به ازاي تمام مقادیر x و y، $P(X > x, Y > y | X > \acute{x}, Y > \acute{y})$ نسبت به x' و نسبت به y' تابعي صعودي باشد.

(چ) (X,Y) را تماماً مثبت از مرتبه‌ی دو (TP_2) مي‌گوییم اگر برای هر $0 < x < \acute{x}$ و $0 < y < \acute{y}$، تابع چگالي توأم (X,Y) در شرط زیر صدق کند:

$$h(x,y)h(\acute{x},\acute{y}) \geq h(\acute{x},y)h(x,\acute{y}).$$

(ح) (X,Y) را داراي قاعده‌ی وارون مرتبه‌ی دو (RR_2) مي‌گوییم اگر جهت نامساوي بالا عوض شود.

(خ) توابع (g_1, g_2) را داراي ویژگی DP_2 مي‌نامیم اگر وقتي که g_2 مقادیر منفي را به خود مي‌گیرد، g_1 غیرمنفي باشد و به ازاي هر $x_1 \leq x_2$ داشته باشیم:

$$g_1(x_1)g_2(x_2) \geq g_1(x_2)g_2(x_1).$$

تعریف ۱.۴.۲. اگر تابع چگالي توأم (X,Y) داراي ویژگي TP_2 باشد، آنگاه (X,Y) را وابسته‌ی مثبت در نسبت درستنمایي (PLR) مي‌گوییم. به‌طور مشابه، (X,Y) را وابسته‌ی منفي در نسبت درستنمایي مي‌گوییم اگر تابع چگالي توأم آن‌ها RR_2 باشد.

قضیه ۱.۴.۳ . عبارت‌هاي زیر با هم معادل‌اند:

(الف) تابع حقیقي مقدار $h(x,y)$ روي ناحیه $[0,\infty) \times [0,\infty)$، داراي ویژگی $RR_2(TP_2)$ است.

(ب) $\frac{h(x,y_1)}{h(x,y_2)}$ با شرط $0 < y_1 < y_2$ در $x > 0$ صعودي (نزولي) است.

(پ) $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} lnf(x,y) < (>) 0$

(ت) $h(x|y)$ یا $h(y|x)$ داراي ویژگی $RR_2(TP_2)$ است.

بین مفاهیم وابستگي تعاریف ۱.۴.۱ و ۱.۴.۲ روابط زیر برقرار است. براي جزئیات بیشتر مي‌توان به مرجع [۳۷] مراجعه کرد.