بسم الله الرحمن الرحیم

٤١٩١٢

دانشگاه الزهرا(س)
دانشکدهٔ علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
رشتهٔ ریاضی کاربردی

عنوان

چندجمله‌ای‌های رنگی

استاد راهنما
دکتر نسرین سلطانخواه

استاد مشاور
دکتر سید عبادا... محمودیان

دانشجو
فهیمه سادات شاه‌صاحبی

بهمن ۱۳۸۰

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم، دو خورشید درخشان زندگیم که همواره در پرتو فروغ مهرشان و در دامن امن حمایت‌شان، لحظه لحظهٔ زندگی را با امید به سوی هدف طی کرده‌ام.

و برادران و خواهران مهربانم که همیشه مرهون محبت‌هایشان بوده‌ام.

تشکر و قدردانی

اکنون که به یاری پروردگار این پژوهش به اتمام رسیده‌است، بر خود لازم می‌دانم که از همهٔ بزرگوارانی که در نگارش این پایان‌نامه مرا مساعدت نمودند، سپاسگزاری نمایم.

از استاد گرامی سرکار خانم دکتر سلطانخواه، که با راهنمایی‌های جامع و بی‌دریغ خود، قدم به قدم مرا در انجام این پروژه یاری کردند.

از جناب آقای دکتر محمودیان به خاطر مساعدتها و دلالت‌های روشنگرانه ایشان.

همچنین از اساتید ارجمند آقایان دکتر حسین حاج ابوالحسن، دکتر کامران دیوانی آذر و دکتر داریوش بهمردی که به ترتیب به عنوان داور خارجی، داور داخلی و ناظر در جلسهٔ دفاعیه شرکت داشته‌اند کمال تشکر را دارم.

در پایان از یکایک اساتید فرهیخته‌ای که در طول دوران تحصیلم گنجینه‌های دانش خود را در کمال سخاوتمندی در اختیارم قرار دادند، سپاسگزاری می‌کنم و سعادت، سلامت و توفیق روزافزون تمامی این عزیزان را از درگاه خداوند منان خواستارم.

چکیده

به هر گراف چندجمله‌ای‌های بسیاری می‌توان نسبت داد که یکی از مهمترین آنها چندجمله‌ای رنگی یک گراف است. در سال ۱۹۱۲، بیرکف برای یافتن کمترین تعداد رنگهای لازم برای رنگ‌آمیزی معتبر یک گراف مسطح و در نتیجه حل مسأله چهار رنگ، عدد $p(G;\lambda)$ را معرفی کرد. به طور کلی به ازای هر گراف دلخواه G این عدد تعداد رنگ‌آمیزی‌های معتبر و متفاوت رأسهای G با حداکثر λ رنگ است. اگر رأسهای G را با $v_1, v_2, \ldots, v_n$ نمایش دهیم، دو رنگ‌آمیزی معتبر G وقتی منفاوت تلقی می‌شوند که با این دو رنگ‌آمیزی به رأسی چون v_i، $1 \leq i \leq n$ دو رنگ منفاوت تخصیص داده شود. بیرکف نشان داد که $p(G;\lambda)$ به عنوان تابعی از λ چندجمله‌ای است. لذا $p(G;\lambda)$ را چندجمله‌ای رنگی گراف G می‌نامیم.

در این پروژه ابتدا خلاصه‌ای از تاریخچه و نحوهٔ پیدایش این چندجمله‌ای، به علاوه مفاهیم و تعاریف مقدماتی مربوط به آن را آورده‌ایم. درفصل دوم با معرفی تعمیم‌های مختلف این چندجمله‌ای، مثلاً چندجمله‌ای رتبه‌ای، چندجمله‌ای تات، چندجمله‌ای چندرنگی و چندجمله‌ای چندرنگی قوی پرداخته‌ایم. همچنین در ادامه، ارتباط میان این تعمیم‌ها با یکدیگر و با چندجمله‌ای رنگی را بدست آورده‌ایم. سپس با بعضی از نمایش‌های مختلف چندجمله‌ای رنگی که گاهی از اوقات استفاده از آنها در حل یک مسئله می‌تواند بسیار مفید باشد، آشنا می‌شویم. همچنین در فصل سوم سعی کرده‌ایم که به معرفی و مقایسه عمده‌ترین الگوریتم‌هایی که تابحال برای محاسبه این چندجمله‌ای ارائه شده است، بپردازیم. در فصل چهارم نیز به تشریح روش ماتریسی محاسبه چندجمله‌ایهای رنگی برای چند خانواده خاص از گرافها پرداخته‌ایم.

واژه‌های کلیدی: چندجمله‌ای رنگی، چندجمله‌ای چندرنگی، چندجمله‌ای تات، چندجمله‌ای چندرنگی قوی، یکتایی رنگی، گراف وتری، آستانه، مقدار ویژه

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمات

۱—۱ تعاریف مقدماتی

تا به حال چندجمله‌ای‌های زیادی برای یک گراف مفروض G تعریف شده است که هر کدام به منظور خاصی طراحی شده است. مانند چندجمله‌ای رتبه ای، تطابقی، رنگی، چند رنگی و غیره، در بین همهٔ این چندجمله‌ای‌ها، چندجمله‌ای رنگی بسیار مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است و مقاله‌ها و پایان نامه‌های فراوانی درمورد چندجمله‌ای‌های رنگی ومطالب پیرامون آن به رشتهٔ تحریر در آمده است.
هدف ما در این فصل ارائهٔ تعاریف مقدماتی چندجمله‌ای‌های رنگی و بیان نحوهٔ شکل گیری این مفهوم به همراه خلاصه ای از پیشینه آن است. همچنین در بخشهای دیگر این فصل در مورد بعضی از مباحث مربوط به این چندجمله‌ای از قبیل ریشه‌های آن، روشها و راهکارهای محاسبهٔ آن، یکتایی و هم ارزی رنگی صحبت خواهیم کرد.

برای تعریف چندجمله‌ای رنگی ابتدا با مفاهیم زیر آشنا می‌شویم:

تعریف ۱. اگر $G=(V,E)$ یک گراف باشد به هر نگاشت $c:V(G)\longrightarrow N$ یک رنگ آمیزی رأسی گویند.

تعریف ۲. به نگاشت $c:V(G)\longrightarrow\{۱,۲,..,\lambda\}$ یک λ—رنگ آمیزی گویند. اگر در یک λ—رنگ آمیزی دو انتهای هر یال G رنگهای متفاوتی بگیرند، به آن λ—رنگ آمیزی معتبر می‌گوییم. (یعنی اگر $v_i,v_j\in V(G)$ دو رأس مجاور باشند آنگاه: $c(v_i)\neq c(v_j)$). به عبارت دیگر یک λ—رنگ آمیزی معتبر گراف G یک تابع $c:V(G)\longrightarrow\{۱,۲,..,\lambda\}$ است به طوری که هریک از مجموعه‌های $c^{-۱}(j)$، $۱\leq j\leq\lambda$، یک مجموعهٔ مستقل باشند.

حالا می‌توانیم چندجمله‌ای رنگی را تعریف کنیم.

تعریف ۳. تعداد راههای متفاوت λ–رنگ‌آمیزی رأسی معتبر گراف G را با $p(G;\lambda)$ نمایش می‌دهیم و به آن چندجمله‌ای رنگی گراف G می‌گوییم. (دو λ–رنگ‌آمیزی رأسی معتبر c و c' را متفاوت گوییم اگر حداقل به ازای رأسی مانند $v \in V(G)$ داشته باشیم $c(v) \neq c'(v)$ باشد.)

چندجمله‌ای رنگی در آغاز توسط بیرکف [1] در سال ۱۹۱۲[۹] و به منظور دست و پنجه نرم کردن با قضیهٔ چهار رنگ مطرح شد. وی امیدوار بود که این تعریف در اثبات قضیهٔ چهار رنگ مفید واقع شود. قضیهٔ چهار رنگ را به زبان چندجمله‌ای رنگی می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

قضیه ۱. اگر G یک گراف مسطح شدنی بدون طوقه باشد، آن‌گاه $p(G;۴) > ۰$ است.

اگر چه تابحال کسی موفق نشده است که با استفاده از تعریف چندجمله‌ای رنگی این قضیه را اثبات کند اما محققان بسیاری روی این تابع رنگی کار کرده‌اند. در سال ۱۹۴۶ مقالهٔ مبسوطی در مورد این تابع رنگی توسط لوییس [2] و بیرکف [۱۰] ارائه شد. این مقاله و کارهای ابتدایی روی این موضوع غالباً در مورد گرافهای مسطح شدنی است. به‌علاوه بیرکف آن چه را که ما چندجمله‌ای رنگی یک گراف مسطح شدنی می‌نامیم برحسب گراف دوگانش تعریف کرد. بعداً ویتنی [3] در مراجع [۵۳] و [۵۴] این ایده را به عموم گرافها بسط داد.
واضح است که یک گراف G با یک طوقه به ازای هر λ دارای هیچ λ–رنگ‌آمیزی نیست. پس $p(G,\lambda) = ۰$ است.
همچنین اگر دو رأس مجاور باشند، تعداد یالهای متصل کنندهٔ آن دو هیچ تأثیری در تعداد λ–رنگ‌آمیزی G ندارد. بنابراین از این پس، منظور از گراف G یک گراف ساده (بدون طوقه یا یال چندگانه) است، مگراین که خلاف آن را صراحتاً ذکر کنیم. به علاوه برای یک گراف G، به ترتیب مجموعهٔ رأسها و یالها را با $V(G)$ و $E(G)$ نمایش می‌دهیم. همچنین $n =\mid V(G) \mid$ و $m =\mid E(G) \mid$ را به ترتیب مرتبه و اندازهٔ گراف G می‌نامیم.

۱–۲ قضایای اساسی چندجمله‌ای‌های رنگی

در تعریف $P(G;\lambda)$ آن را چندجمله‌ای رنگی نامگذاری کردیم. در اینجا می‌خواهیم نشان دهیم که $p(G,\lambda)$ واقعاً یک چندجمله‌ای از درجهٔ n است.

قضیه ۲. اگر G یک گراف با n رأس باشد آن‌گاه $p(G;\lambda)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n است.

[1] Birkhoff
[2] Lewis
[3] Whitney

اثبات. برای هر عدد صحیح k، فرض کنید $\alpha(G,k)$، تعداد افرازهای $V(G)$ به دقیقاً k زیر مجموعهٔ غیر تهی باشد به طوری که هیچ یال G، دو رأس یک مجموعه را به هم متصل نکند. به عبارت دیگر $\alpha(G,k)$ برابر با تعداد افرازهای $V(G)$ به دقیقاً k مجموعهٔ مستقل است. حال اگر یک مجموعه با λ رنگ در اختیار داشته باشیم، آن‌گاه،

تعداد راههای تخصیص رنگهای متفاوت به هر یک از k مجموعهٔ افراز برابر با $\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)$ است. همچنین وقتی در یک رنگ‌آمیزی معتبر G دقیقاً k رنگ استفاده شود، $V(G)$ به دقیقاً k مجموعه مستقل افراز می‌شود. پس هر یک از این رنگ‌آمیزی‌ها یک رنگ‌آمیزی معتبر G است. یعنی:

$$p(G;\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\alpha(G,k)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1).$$

واضح است که این عبارت یک چندجمله‌ای از درجهٔ n است.

□

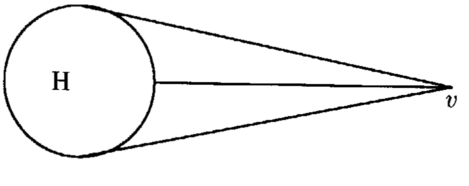
بدیهی است که چندجمله‌ای رنگی گراف تهی N_n و گراف کامل K_n به صورت زیر هستند:

$$p(N_n;\lambda)=\lambda^n$$

$$p(K_n;\lambda)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)$$

قضیه ۳. اگر گراف G از گراف H و با اتصال یک رأس جدید به هر رأس H به دست آمده باشد، آن‌گاه:

$$p(G;\lambda)=\lambda\, p(H;\lambda-1).$$



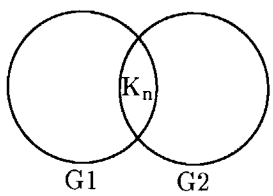
G

اثبات. رأس جدید v را می‌توان با λ رنگ، رنگ کرد. چون این رأس به تمام رئوس H متصل است، بنابراین در رأسهای H نمی‌توان رنگ رأس v را استفاده کرد. بنابراین $(\lambda - ۱)$ رنگ برای رنگ‌آمیزی معتبر H در دست است.
□

دو قضیهٔ زیر، قضایای بازگشتی هستند که در نظریهٔ چندجمله‌ای‌های رنگی گرافها (بالاخص محاسبهٔ آنها) کاربرد فراوانی دارند.

قضیه ۴. فرض کنید G اجتماع دو زیر گراف $G_۲$ و $G_۱$ باشد به طوری که $G_۱ \bigcap G_۲ = K_n$، آن‌گاه:

$$p(G, \lambda) = \frac{p(G_۱, \lambda) \, . \, p(G_۲, \lambda)}{\lambda(\lambda - ۱)\cdots(\lambda - n + ۱)}.$$



اثبات. برای اثبات قضیه به ازای یک عدد صحیح مثبت دلخواه λ، توجه داریم که هر رنگ‌آمیزی G را می‌توان از ترکیب یک رنگ‌آمیزی $G_۱$ با هر رنگ‌آمیزی $G_۲$ که رنگهای داده شده به رأسهای مشترکشان ثابت نگه‌داشته شود، بدست آورد. تأثیر این تحدید این است که تعداد رنگ‌آمیزی $G_۲$ به اندازهٔ یک مضرب $\lambda(\lambda - ۱)\cdots(\lambda - k + ۱)$ کاهش می‌یابد. پس:

$$p(G, \lambda) = p(G_۱, \lambda) \times \frac{p(G_۲, \lambda)}{\lambda(\lambda - ۱)\cdots(\lambda - n + ۱)}.$$

□

توجه داریم که از این نتیجه در حالت $K_۰$ یعنی وقتی که $G_۲$ و $G_۱$ جدا از هم باشند نیز می‌توان استفاده کرد.

قبل از بیان قضیهٔ بازگشتی دوم، یادآوری می‌کنیم که برای هر یال e از گراف G، گرافهای $G - e$ و G/e به ترتیب گرافهای به دست آمده از حذف و منقبض کردن یال e در گراف G هستند. (در انقباض فرض می‌کنیم که هیچ حلقه ای وجود ندارد و یالهای چندگانه به وسیلهٔ یک یال جایگذاری می‌شوند.)

قضیه ۵. (قضیهٔ حذف ـانقباض) فرض کنید G یک گراف و e یک یال G باشد آن‌گاه:

$$p(G;\lambda) = p(G-e;\lambda) - p(G/e;\lambda).$$

اثبات. توجه کنید که رنگ‌آمیزی‌های معتبر $G-e$ دو نوعند: اوّل آنهایی که دو انتهای e رنگهای متفاوتی بگیرند و دوم آنهایی که دو انتهای e در آنها رنگهای یکسان به خود بگیرند. رنگ‌آمیزی‌های نوع اول به طور یک به یک متناظر با رنگ‌آمیزی‌های معتبر گراف G است. به همین ترتیب رنگ‌آمیزی‌های نوع دوم به صورت یک به یک متناظر با رنگ‌آمیزی‌های معتبر گراف G/e است. پس معادله به ازای تمام مقادیر صحیح مثبت λ و بنابراین برای تمام مقادیر λ برقرار است.

□

این دو قضیه، قضایایی هستند که در اثبات استقرایی چندجمله‌ای‌های رنگی استفاده می‌شوند. برای مثال، قضیهٔ زیر را در نظر بگیرید:

قضیه ٦. فرض کنید G یک گراف دارای k مؤلفه از مرتبهٔ n واندازهٔ m باشد و ضرایب λ^j در $p(G;\lambda)$ را با $(-۱)^{n-j}a_j$ نمایش دهیم، آن‌گاه:

۱) a_j غیر صفر است اگر و تنها اگر $k \leq j \leq n$،

۲) $a_n = ۱$ و $a_{n-۱} = m$،

۳) a_j به ازای $k \leq j \leq n$ مثبت است.

اثبات. قضیه را با استقرا روی m ثابت می‌کنیم. اگر $m = ۰$ آن‌گاه G یک گراف تهی است. دیدیم که $p(N_n;\lambda) = \lambda^n$. پس قضیه به ازای $m = ۰$ برقرار است. فرض استقراء: برای کمتر از m یال برقرار است. حکم استقراء: ثابت می‌کنیم که برای گراف G با n رأس و m یال قضیه برقرار است.

ابتدا طبق قضیه حذف و انقباض داریم:

$$p(G;\lambda) = p(G-e;\lambda) - p(G/e;\lambda).$$

چون G/e یک رأس کمتر از $G-e$ و G دارد و دارای تعداد مؤلفه برابر با G است. در حالی که $G-e$ همان تعداد مؤلفه یا بیشتر از G دارد. حال اگر تعداد مؤلفه‌های $G-e$ و G با هم برابر و برابر با k باشد با استفاده از فرض استقراء داریم:

$$p(G-e;\lambda) = \lambda^n - (m-۱)\lambda^{n-۱} + \cdots + (-۱)^{n-k}a_k\lambda^k$$

$$p(G/e;\lambda) = \lambda^{n-۱} + \cdots + (-۱)^{n-k}b_k\lambda^k$$

$$\Rightarrow p(G;\lambda) = \lambda^n - m\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-k}(a_k + b_k)\lambda^k$$

به همین ترتیب اگر تعداد مؤلفه‌های $G - e$ و G با هم برابر نباشد می‌توان قضیه را اثبات کرد.
□

نتیجه ۱. برای هر گراف G، $p(G;\lambda)$ یک چندجمله‌ای تکین است که ضرایب‌اش متناوب در علامت‌اند.

یکی از قضایای مهمی که در مورد چندجمله‌ای‌های رنگی وجود دارد، قضیهٔ زیر است که به قضیهٔ دورهای شکستهٔ ویتنی معروف است. ابتدا با تعریف دور شکسته آشنا می‌شویم.

تعریف ۴. فرض کنید G یک گراف n رأسی با مجموعه یالی $E(G) = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ و C یک دور در G باشد. همچنین e یک یال در C باشد که بیشترین اندیس را در یالهای دور C داشته باشد. آن‌گاه مسیر $C - e$ را یک دور شکسته در G با این شماره گذاری $E(G)$ می‌نامیم.

قضیه ۷. فرض کنید G یک گراف n رأسی با مجموعه یالی $E(G) = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ باشد. آن‌گاه چندجمله‌ای رنگی گراف G از رابطهٔ زیر به دست می آید:

$$p(G;\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a_i \lambda^{n-i}$$

که در آن a_i، تعداد زیر مجموعه‌های i–تایی از $E(G)$ است که شامل هیچ دور شکسته‌ای نباشد.

اثبات. قضیه را با استقراء روی m ثابت می‌کنیم. اگر $m = 0$ باشد، $a_0 = 1$ و $a_i = 0$ $(1 \le i \le n-1)$ است. پس: $p(G;\lambda) = \lambda^n$ که همان چندجمله‌ای رنگی گراف تهی با n رأس است. فرض استقراء: برای تمام گرافهای با کمتر از m یال قضیه برقرار است. حکم استقراء: ثابت می‌کنیم که اگر G یک گراف با $m \ge 1$ یال باشد حکم برقرار است. فرض کنید $e_1 = ab$ باشد، طبق قضیه حذف و انقباض داریم:

$$p(G;\lambda) = p(G - e_1;\lambda) - p(G/e_1;\lambda)$$

چون هر یک از گرافهای $G - e_1$ و G/e_1 دارای کمتر از m یال هستند پس در فرض استقراء صدق می‌کنند. یعنی:

$$p(G;\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a'_i \lambda^{n-i} - \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i a''_i \lambda^{n-1-i}$$

واضح است که مجموعهٔ یالی $E(G-e_1)=\{e_2,e_3,\cdots,e_m\}$ است. اما در مورد مجموعهٔ یالی $E(G/e_1)$ کمی‌اندیس‌ها را تغییر می‌دهیم یعنی اگر یک یال $E(G/e_1)$ متناظر با دقیقاً یک یال $E(G)$ باشد اندیس‌اش را تغییر نمی‌دهیم. حال اگر یک یال $x(ab)$ متناظر با دو یال $E(G)$ یعنی $e_i=ax$ و $e_h=bx$ باشد، آن‌گاه $x(ab)$ را با e_k نمایش می‌دهیم ($k=\max\{i,h\}$).

برای کامل کردن اثبات، کافی است که ثابت کنیم تعداد زیر مجموعه‌های i–تایی از $E(G-e_1)$ که شامل هیچ دور شکسته ای نباشد، برابر است با تعداد زیر مجموعه‌های i–تایی از $E(G)$ که شامل هیچ دور شکسته ای نباشد به علاوهٔ تعداد زیر مجموعه‌های $(i-1)$–تایی از $E(G/e_1)$ که شامل هیچ دور شکسته ای نباشد یعنی می‌خواهیم ثابت کنیم که:

$$a'_i=a_i+a''_{i-1}$$

فرض کنید $e_1\notin F\subset E(G)$ باشد. پس F شامل هیچ دور شکسته ای از G نیست اگر و تنها اگر F شامل هیچ دور شکسته‌ای از $G-e_1$ نباشد.

حال فرض کنید $e_1\in F\subset E(G)$ باشد. پس اگر $F-e_1\subset E(G/e_1)$ باشد و $F-e_1$ شامل هیچ دور شکسته ای از G/e نباشد، F شامل هیچ دور شکسته‌ای از G نیست. پس رابطه بالا برقرار است.

□

به عبارت دیگر a_i در قضیهٔ بالا، تعداد زیر گرافهای گسترندهٔ G است که دقیقاً i یال دارند و شامل هیچ دور شکستهٔ القایی نمی‌باشد. از قضیهٔ فوق نتیجه می‌شود که:

$$a_2=\binom{m}{2}-N_T$$

که N_T تعداد مثلثها در G است. این نتیجه حالت خاصی از قضیهٔ زیر است که توسط مِردیت [۴] [۳۴] در سال ۱۹۷۲ اثبات شد.

قضیه ۸. فرض کنید G یک گراف n رأسی و m یالی با کمر g و چندجمله‌ای رنگی $p(G;\lambda)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i\lambda^{n-i}$ باشد. آن‌گاه $a_i=\binom{m}{i}$ $(i\le g-2)$ است. به علاوه، اگر C_g تعداد دورهای به طول g در گراف G باشد، آن‌گاه:

$$a_{g-1}=\binom{m}{g-1}-C_g$$

قضیه بالا، حالت خاصی از قضیهٔ زیر است که توسط تیان [۵] و لی [۶] [۳۲] ثابت شده است.

[۴] Meredith

[۵] Tian

[۶] Li