بسمه تعالی

دانشگاه تبریز

دانشکدهٔ فیزیک

گروه فیزیک نظری و اختر فیزیک

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشنا سی ارشد در رشته فیزیک

گرایش نظری

عنوان

حل تحلیلی معادلات مکانیک کوانتومی نسبیتی و غیر نسبیتی و بررسی تقارن PT

استاد راهنما : دکتر حسین متولی

استاد مشاور: دکترصالح اشرفی

پژوهشگر: احد کوشان

شهریور ۱۳۸۸

نام خانوادگی : کوشان **نام:** احد

عنوان پایان نامه: حل معادلات مکانیک کوانتومی نسبیتی و غیر نسبیتی و بررسی PT

استاد راهنما: دکتر حسین متولی **استاد مشاور:** دکترصالح اشرفی

مقطع تحصیلی: کارشنا سی ارشد **رشته:** فیزیک **گرایش:** فیزیک نظری

دانشگاه: تبریز **دانشکده:** فیزیک

تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۸۸ **تعداد صفحات:**۱۳۱

کلید واژه ها: معادلات دیفرانسیل، روش NU ، معادله شرودینگر نسبیتی و غیر نسبیتی ، معادله دیراک، معادله کلاین-گوردون، پتانسیل اسکارف، پتانسیل روزن-مورس، پتانسیل اکارت، پتانسیل پوچی تیلر، پتانسیل هالتن، ویژه مقادیر انرژی، ویژه توابع ، تقا رن PT

چکیده:

در این رساله ابتدا روش NU را بتفضیل مورد مطالعه قرار میدهیم. در این روش یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم به یک معادله دیفرانسیل تعمیم یافته از نوع فوق هندسی تبدیل می یابد و جوابهای دقیق آن بر حسب توابع خاص و ویژه مقادیر مربوطه بدست میآید. با استفاده از تبدیل مختصات آندسته از معادلات که توسط این روش قابل حل هستند را مشخص میکنیم. سپس پتانسیلهای فیزیکی مطرح در مکانیک کوانتومی مانند پتانسیل کولنی، روزن-مورس، اسکارف، پوچی تیلر، وودز-ساکسون، هالتن،... را در حوزه های نسبیتی برای معادله دیراک و معادله کلاین گوردن و در حوزه غیر نسبیتی برای معادله شوردینگر مورد بررسی قرار داده و ضمن ارائه یک حل تحلیلی مبسوط جواب دقیق و طیف انرژی آنها را بدست میآوریم. نتایج حاصل از حل معادلات مذکور را مورد بررسی قرار داده و تعابیر فیزیکی مربوطه را ارائه داده و تقارن پاریته و بازگشت زمانی و همچنین خواص هرمیتی برخی از آنها را نیز مورد بررسی قرار میدهیم.

فهرست مطالب

مقدّمه

فصل اول : بررسی منابع و پیشینه تحقیق

۱-۱)	انواع معادلات دیفرانسیل و روشهای حل آنها	۱
۱-۲)	کلاسه بندی معادلات دیفرانسیل	۲
۱-۳)	معادلات دیفرانسیل هندسی و فوق هندسی	۳
۱-۴)	تعیین توابع لازم در روش NU	۶
۱-۵)	حل معادله بسل به روش NU	۷
۱-۶)	چند نکته در مورد روش NU	۸
۱-۷)	خواص جوابهای معادلات فوق هندسی	۱۱

فصل دوم : مبانی و روشها

۲-۱-۱) حل معادله‌ی شرودینگر برای پتانسیل وودز-ساکسون تعمیم یافته

۲-۱-۱) معرفی پتانسیل وودز-ساکسون ۱۸

۲-۱-۲) معادله شرودینگر برای پتانسیل وودز-ساکسون ۱۹

۲-۱-۳) محاسبه ویژه مقادیر انرژی برای حالت $\ell = 0$ ۲۰

۲-۱-۴) محاسبه ویژه توابع موج ۲۶

۲-۱-۵) حل معادله شرودینگر برای حالت $\ell \neq 0$ ۲۸

۲-۱-۶-الف) پتانسیل‌های از نوع وودز-ساکسون تعمیم‌یافته با تقارن PT و غیر هرمیتی ۲۹

۲-۱-۶-ب) پتانسیل وودز-ساکسون تعمیم‌یافته فاقد تقارن PT و از نوع غیر هرمیتی ۳۲

۲-۲) حل معادله دیراک برای پتانسیل از نوع اسکارف

۲-۲-۱) معرفی پتانسیل اسکارف ۳۸

۲-۲-۲) جواب‌های حالت‌های مقید ۴۰

۲-۲-۳-الف)پتانسیل اسکارف II ۴۵

۲-۲-۳-ب)پتانسیل پوچی تیلر ۴۶

۲-۲-۳-ج)پتانسیل پوچی تیلر تعمیم‌یافته ۴۸

۲-۳) جواب‌های دقیق معادله‌ی کلاین-گوردن برای پتانسیل روزن-مورس

۲-۳-۱) جواب‌ها دقیق حالت‌های مقید ۵۰

۲-۳-۲-الف)پتانسیل استاندارد روزن-مورس ۵۶

۲-۳-۲-ب)پتانسیل اِکارت ۵۶

۲-۳-۲-ج)چاه پتانسیل روزن-مورس با تقارن PT ۵۸

۲-۳-۲-د) پتانسیل اِکارت با تقارن PT ۵۹

۲-٤) حل معادله‌ی دیراک برای پتانسیل هالتن تعمیم‌یافته

۲-۴-۱) جوابهای دقیق حالت‌های مقید ۶۰

۲-۴-۲) پتانسیل هالتن تعمیم‌یافته با تقارن PT از نوع غیرهرمیتی ۶۵

۲-۴-۳) بررسی ویژگی شبه هرمیتی و تقارن PT ۶۸

۲-۴-۴) جواب‌های پتانسیل هالتن تعمیم‌یافته برای $q=۰$ ۷۰

۲-۵) حل معادلهٔ شرودینگر برای پتانسیل اسکارف متناوب

۲-۵-۱) پتانسیل اسکارف متناوب ۷۶

۲-۵-۲) پتانسیل اسکارف با تقارن PT ۷۸

۲-۵-۳) پتانسیل مثلثاتی اسکارف با تقارن PT با عامل q ۷۸

۲-۵-۴)پتانسیل مثلثاتی اسکارف غیرهرمیتی با تقارن PT و پارامتر تغییر شکل q ۷۹

۲-۵-۵) پتانسیل اسکارف هیپربولیک تغییر شکل یافتهٔ q ۸۰

۲-۵-۶) پتانسیل اسکارف هیپربولیک غیرهرمیتی با تقارن PT و پارامتر تغییر شکل q ۸۱

۲-۵-۷) پتانسیل مانینگ-روزن ۸۲

۲-۵-۸) پتانسیل مانینگ-روزن غیرهرمیتی با تقارن PT ۸۳

۲-۵-۹) پتانسیل مانینگ-روزن غیرهرمیتی و بدون تقارن PT ۸۴

۲-٦) جوابهای معادلهٔ شرودینگر برای پتانسیل هالتن

۲-۶-۱) مقدمه‌ای در مورد پتانسیل هالتن ۹۴

۲-۶-۲) محاسبهٔ ویژه مقادیر و ویژه توابع موج ۹۶

۲-۷) حل معادلهٔ شرودینگر برای پتانسیلهای مرکزی (جواب‌های ابر تقارنی)

۲-۷-۱) نگاهی کوتاه به SUSYQM ۱۰۷

۲-۷-۲) پتانسیل مورس ۱۱۰

۲-۷-۳) پتانسیل پوچی تیلر ۱۱۳

۲-۷-۴) پتانسیل هالتن ۱۱۶

فصل سوم : نتایج و بحث

۳-۱) معادله دیراک برای پتانسیل از نوع اسکارف

۳-۲) معادله‌ی کلاین-گوردن برای پتانسیل روزن-مورس

۳-۳) معادله‌ی دیراک برای پتانسیل هالتن تعمیم‌یافته

۳-۴) معادلهٔ شرودینگر برای پتانسیل اسکارف متناوب

۳-۵) معادلهٔ شرودینگر برای پتانسیل هالتن

۳-۶) معادلهٔ شرودینگر برای پتانسیلهای مرکزی

مقدمه

اهمیت و نقش معادلات دیفرانسیل در شاخه های مختلف علوم و مهندسی، بالاخص فیزیک برکسی پوشیده نیست. در سال‌های اخیر مطالعات زیادی در مورد حل تحلیلی معا دلات دیفرانسیل در فیزیک انجام گرفته است.

معادلات دیفرانسیل در هر چهار شاخه اساسی فیزیک بنحوه چشمگیری ظاهر می شوند که حل و بدست آوردن جوابهای دقیق آنها از اهمیت خاصی برخوردار است. در این میان معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم جایگاه ویژه ای را به خود اختصاص داده اند. بعنوان مثال معادلات دیفرانسیل حاکم بر مکانیک کلاسیک که از قانون دوم نیوتن، معادلات اویلر- لاگرانژ و هامیلتونی حاکم بر سیستمهای فیزیکی حاصل میشوند به شکل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم هستند. همچنین معادلات حاکم در الکترومغناطیس چهار معادله ماکسول می باشندکه همگی به شکل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم هستند. در مکانیک کوانتومی معادلات شرو دینگر، کلاین- گوردون و دیراک حکمفرما هستند، که آنها نیز از نوع معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن می باشند،

معادلات دیفرانسیل در نسبیت عام و معادلات گرانشی نیز ظاهر میشوند. بطور خلاصه تقریباً در تمامی شاخه های فیزیک با حل نوعی معادله دیفرانسیل که اکثرا به صورت مرتبه دوم خطی از نوع همگن هستند سروکار داریم . در میان این کارها پیداکردن جواب‌های دقیق برای معا دلات دیفرانسیل در چارچوب مکانیک کوانتومی نسبیتی و هم غیرنسبیتی مورد توجه واقع شده است. از آن‌جائیکه این جواب‌ها تمامی اطلاعات مربوط به سیستم کوانتومی مورد بررسی را شامل می‌شوند از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشند. از طرف دیگر با توجه به اینکه علم معادلات دیفرانسیل خود شاخهٔ مستقلی است که در رشته های ریاضی به عنوان یک مبحث مستقل حتی در سطوح خیلی بالا مورد مطالعه قرار می گیرد ودر آن روشهای متعددی برای حل معادلات دیفرانسیل وجود دارد لذا یافتن روشهایی که بتوان با استفاده از آنها معادلات دیفرانسیلی که در اثنای حل مسائل فیزیکی با آنها مواجه میشویم با ارزش بنظر میرسد. چند روش مطرح در این زمینه عبارتند از روش سریهای توانی ، نیکی و سایر روشهای دیگر که ذکر و توضیح آنها از حوصله این رساله خارج $1/N$فورروو- یوورو ، تکرار ، بسط است. در این رساله ما کوشیده ایم که روش نیکی فورروو- یوورو را دنبال کنیم و با نگاهی عمیق تر به معادلات دیفرانسیل روش مذکور را در حل معادلات مکانیک کوانتومی نسبیتی و غیر نسبیتی بکار گیریم. مضافا" اینکه تقارن پاریته و بازگشت زمانی را نیز برای برخی از پتانسیلهای فیزیکی مورد مطالعه قرار میدهیم.

روش ریاضی نیکی فورو-یورو

۱-۱) انواع معادلات دیفرانسیل و روشهای حل آنها

معادلات دیفرانسیل به دو گروه اصلی تقسیم می شوند.

گروه اول به معادلات دیفرانسیل مقدماتی مشهور هستند. بدین معنی که هر گاه جواب معادلات دیفرانسیل یکی از توابع مقدماتی باشد. به آنها معادلات دیفرانسیل مقدماتی می گویند.

گروه دوم آن دسته از معادلات دیفرانسیل هستند که هیچ تابع مقدماتی در آنها صدق نمی کند. تنها راه حل این معادلات استفاده از روش بنیادی *حل معادلات دیفرانسیل به روش سریهای توانی* است. این روش قادر است هر معادله دیفرانسیل را حل کند ولی متاسفانه استفاده از آن در مکانیک کوانتومی به این سادگی‌ها نیست، بدین معنی که بعد از حل ریاضی معادله باید آنرا با فیزیک مسئله نیز مطابقت دارد و اینجاست که دشواری کار ظاهر می شود وعده ای بخاطر

استفاده از این روش در حل بعضی از پتانسیل های فیزیکی، مشهور نیز شده اند. مثلا استفاده از روش سریهای توانی در حل معادله لا پلاس (یعنی یک مساله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن) در دستگاه کروی آنچنان اهمیت داشت که به افتخار شخصی که از آن استفاده کرده است به معادله دیفرانسیل لژاندر (به افتخار شخصی که ا ز آن استفاده کرده است) مشهور است. و یا حل لاپلاسین در دستگاه استوانه ای به توابع بسل (به افتخار بسل) مشهور است. دانشجویان فیزیک با دشواری استفاده از این روش در حل مسئله نوسانگر ساده و اتم هیدروژن در مکانیک کوانتومی آشنایی دارند، ولی خوشبختانه دو نفر از ریاضی فیزیک دانان معاصر به نامهای نیکی فورو و ویور برای رهایی از این معضل چاره ای اندیشیده اند که قصد ما نیز در این رساله شرح این روش و استفاده از آن در حل برخی از پتانسیل های مشهور است.

۱-۲) کلاسه بندی معادلات دیفرانسیل در فیزیک

بسیاری از مسائل فیزیک نظری و ریاضی فیزیک به معادله دیفرانسیل زیر منتهی می شوند

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}u = 0 \qquad (۱)$$

که در آن $\sigma(z)$ و $\tilde{\sigma}(z)$ چند جمله ای هایی حداکثر از درجه دوم و $\tilde{\tau}(z)$ یک چند جمله ای حداکثر از درجه اول است معادلاتی از این قبیل برای مثال در حل معادلات لاپلاس و هلمهولتز

Nikiforov-Uvarov[1]

در مختصات منحنی الخط بوسیله روش جداسازی متغیرها و در بررسی مسائل اساسی مکانیک کوانتومی مثل بررسی حرکت یک ذره در یک میدان با تقارن کروی، نوسانگر هارمونیک، حل های معادلات شرو دینگر و دیراک وکلاین – گوردن برای پتانسیل کولمبی و حرکت یک ذره در یک میدان الکتریکی و یا مغناطیسی همگن به وفور دیده میشود . مضافا اینکه معادله (۱) خود را در بعضی مسائل فیزیک اتمی، مولکولی و هسته ای نشان می دهد. در میان حل های معادله (۱) خانواده ای از توابع خاص به شرح زیر قرار دارد: توابع متعامد کلاسیک (ژاکوبی، لاگر، هرمیت) ، هارمونیک های کروی و توابع بسل و فوق هندسی، که از آنها معمولا به عنوان توابع خاص ریاضی فیزیک یاد می شود.

۱-۳) معادلات دیفرانسیل هندسی و فوق هندسی

حالا سعی می کنیم که معادله (۱) را با فرض $u=\varphi(z)y$ و انتخاب یک $\varphi(z)$ مناسب به شکل ساده تری تقلیل دهیم.

با فرض $u = \varphi y$ و قرار دادن آن در معادله (۱) به شکل زیر میرسیم.

$$y''+\left(2\frac{\phi'}{\phi}+\frac{\tilde{\tau}}{\sigma}\right)y'+\left(\frac{\phi''}{\phi}+\frac{\phi'}{\phi}\frac{\tilde{\tau}}{\sigma}+\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^2}\right)y=0 \qquad (۲)$$

(ما همیشه فرض خواهیم کرد که z و ضرایب $\tilde{\sigma}(z)$ و $\tilde{\tau}(z)$ می توانند مقادیر حقیقی و یا مختلط داشته باشند.)

برای اینکه شکل معادله (۲) از معادله (۱) پیچیده تر نشود، می توانیم فرض کنیم که y' بصورت نسبت $\tau(z)$ و $\sigma(z)$ (یعنی $y'=\frac{\tau(z)}{\sigma(z)}$) می باشد که در آن $\tau(z)$ یک چند جمله ای حداکثر از درجه اول می باشد. با این فرضیات و قرار دادها به تساوی زیر می رسیم.

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\frac{\pi(z)}{\sigma(z)} \tag{۳}$$

که در آن $\pi(z)$ یک چند جمله ای حد اکثر از درجه اول است. هر گاه تساوی (۳) را ساده کنیم خواهیم داشت

$$\frac{\varphi''}{\varphi}=\frac{\sigma\pi'-\sigma'\pi}{\sigma^2}+\frac{\pi^2}{\sigma^2} \tag{۴}$$

حال اگر (۴) را در معادله (۲) قرار دهیم به معادله زیر می رسیم.

$$y''+\frac{\tau(z)}{\sigma(z)}y+\frac{\overline{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}y=0 \tag{۵}$$

که در آن

$$\tau(z)=\tilde{\tau}(z)+2\pi(z) \tag{۶}$$

$$\overline{\sigma}(z)=\tilde{\sigma}(z)+\pi^{2}(z)-[\sigma'(z)-\tau(z)]\pi(z)+\sigma(z)\pi'(z) \tag{۷}$$

توابع, $\tau(z)$ و $\bar{\sigma}(z)$ چند جمله ای های به ترتیب حد اکثر از درجه اول و دوم هستند. نتیجتا اینکه معادله (۵) معادله ای مشابه با معادله (۱) است.

با این کار ما گروهی از تبدیلات را پیدا کرده ایم که نوع معادله مورد نظر را تغییر نمی دهند حال سعی می کنیم که $\pi(z)$ را طوری تعیین کنیم که معادله (۵) تا جایی که ممکن است برای مطالعه خواص حل های معادله ساده و آسان باشد. برای نیل به این هدف ضرایب $\pi(z)$را طوری انتخاب می کنیم که چند جمله ای $\bar{\sigma}(z)$در (۵) بر $\sigma(z)$ قابل تقسیم باشد، یعنی:

$$\bar{\sigma}(z)=\lambda\sigma(z) \qquad (۸)$$

که در آن λ یک ثابت می باشد. این کار امکان پذیر است زیرا که اگر ما ضرایب توانها ی z را در دو طرف معادله (۸) مساوی هم قرار دهیم، سه معادله بر حسب سه مجهول بدست می آیند، یعنی ثابت λ و دو تا از ضریب های $\pi(z)$. در نتیجه (۵) می تواند به شکل زیر تقلیل یابد.

$$\sigma(z)y''+\tau(z)y'+\lambda y=0 \qquad (۹)$$

به معادله (۹) *معادله دیفرانسیل فوق هندسی* و به حل های آن *توابع فوق هندسی* می گویند. و متعاقب آن طبیعی است که از (۱) به عنوان *شکل تعمیم یافته معادله دیفرانسیل از نوع فوق هندسی* یاد شود. (در اینجا یاد آور می شویم که هرگاه $\sigma(z)$ یک چند جمله ای درجه دوم انتخاب شود، معادله حالت خاصی از معادله ریمان با سه تکینگی که یکی از آنها در بی نهایت

واقع است خواهد بود. معادله ریمان در رشته هایی مانند تئوری معادلات دیفرانسیل مطالعه می شود.)

١-٤) تعیین $\pi(z)$ و λ (مهمترین ویژگی روش NU)

برای تعیین $\pi(z)$و λ دوباره معادله (۵) را به فرم زیر می نویسیم.

$$\lambda^2-(\sigma'-\tilde{\tau})\pi+\tilde{\sigma}-k\sigma=0$$

$$k=\lambda-\pi(z) \qquad (١٠)$$

هرگاه فرض بر این باشد که k را می دانیم، حل معادله درجه دوم برای $\pi(z)$ نتیجه زیر را بدست می دهد.

$$\pi(z)=\frac{\sigma'-\tilde{\tau}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma'-\tilde{\tau}}{2}\right)^2+k\sigma-\tilde{\sigma}} \qquad (١١)$$

از آنجائیکه $\pi(z)$ یک چند جمله ای می باشد، عبارت زیر علامت رادیکال باید بصورت مربع یک چند جمله ای باشد. و این در صورتی امکان پذیر است که دلتای عبارت مزبور برابر صفر باشد. بنابراین ما یک معادله به فرم یک معادلهٔ درجه دوم برای k بدست می آوریم. بعد از تعیین k، نوبت بدست آوردن $\pi(z)$به کمک معادله (١) می باشد و سپس $\varphi(z)$, $\tau(z)$ و λ را با استفاده از (٣)، (۶)و(١۵)بدست می آیند. واضح است که تقلیل معادله (١) به یک معادله فوق هندسی (٩) با انتخاب k و علامت $\pi(z)$در(١١) به چندین روش قابل انجام است.

تبدیلی که در بالا به آن اشاره شد به ما این امکان را می دهد که مطالعه معادله اولیه را با مطالعه یک معادله ساده تر (۹) جایگزین کنیم.

در زیر به عنوان کاربردی از این روش به حل معادله بسل می پردازیم.

۱-۵) حل معادله بسل به روش NU

معادله دیفرانسیل بسل در شکل کلی خود به صورت زیر است.

$$z^2u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)u = 0$$

حال می خواهیم با استفاده از روش نیکی فرو – یورو آنرا در قالب معادله (۱) در آورده و آنـرا حل می کنیم. با تقسیم طرفین رابط فوق بر z^2 داریم.

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \left(\frac{z^2 - \nu^2}{z^2}\right)u = 0$$

که دقیقا به فرم معادله (۱) می باشد که در آن به ترتیب داریم:

$$\sigma(z) = z \qquad ,\tilde{\tau}(z) = 1 \qquad \tilde{\sigma}(z) = Z^2 - \nu^2$$

در این حالت عبارت زیر علامت رادیکال در معادله (۱۱) به فرم $-z^2 + \nu^2 + kz$ مـی باشـد بـا قرار دادن دلتای این معادله درجه دوم برابر با صفر معادله زیر را بدست می آوریم.

$$k^2 + 4\nu^2 = 0$$

که در آن K مقدار ثابت می باشد. بنـابراین $k = \pm 2i\nu$ بـوده و در نتیجـه (۱۱) بصـورت زیـر در می آید.

$$\pi(z)=\pm\sqrt{-z^2+\nu^2\pm 2i\nu z}=\pm(iz\pm\nu)$$

در این حالت چهار حالت برای $\pi(z)$ امکان پذیر می باشد. برای مثال حالت $K=2i\nu$ و $\pi(z)=iz+\nu$ را در نظر بگیرید. با استفاده از (۵)،(۶)و(۱۰) خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=z^{\nu}e^{iz}\\ \tau(z)&=2iz+2\nu+1\\ \lambda&=k+\pi'(z)=i(2\nu+1)\end{aligned}$$

پس (۹)به صورت زیر در می آید

$$zy''+(2i\nu+2\nu+1)y'+i(2\nu+1)y=0$$

۱-۶) چند نکته در مورد روش NU

چند نکته را باید در استفاده از روش NU درنظر گرفت که در نظر به آنها اشاره می کنیم.

۱) از آنجائیکه (۱) با جایگزین کردن $\sigma(z)$ و $\tilde{\tau}(z)$و $\tilde{\sigma}(z)$ بوسیله $C\sigma(z)$ و $C\tilde{\tau}(z)$و $C^2\tilde{\sigma}(z)$ عوض نمی شوند،C یک ثابت است، ضریب اولین عبارت حاوی $\sigma(z)$می تواند بطور اختیاری انتخاب شود یک نکته مشابه در مورد (۹) نیز وجود دارد.

۲)در این روش ما فقط مواردی را بررسی خواهیم کرد که در آنها $\sigma(z)$در (۱) و (۹) ریشه مضاعف نداشته باشند. در واقع اگر $\sigma(z)$یک ریشه مضاف داشته باشد، یعنی $\sigma(z)=(z-a)^2$ معادله (۱) می تواند به شکل زیر تبدیل شود.

$$\frac{d^{۲}u}{ds^{۲}}+\frac{۲-s\tilde{\tau}\left(a+\frac{۱}{s}\right)}{s}\frac{du}{ds}+\frac{s^{۲}\tilde{\sigma}\left(a+\frac{۱}{s}\right)}{s^{۲}}u=۰ \qquad (۱۲)$$

که در آن از $Z-a=\frac{1}{s}$ استفاده شده است

از آنجائیکه $S\tilde{\tau}\left(a+\frac{1}{s}\right)$، $S^2\tilde{\sigma}\left(a+\frac{1}{s}\right)$ چند جمله ای هایی بر حسب S و حداکثر از درجه ۱ و ۲ هستند ، (۱۲) یک معادله از نوع (۱) با $\sigma(z)=s$ می باشد که یک ریشه مضاعف ندارد.

۳) هرگاه $\sigma(z)=۱$، $\left(\frac{\tilde{\tau}}{2}\right)^2-\tilde{\sigma}$ خطی باشند نمی توان (۱) را به شکل (۹) تبدیل کرد. در این حالت می توانیم با گرفتن $\pi(z)$ در(۳) بطوریکه $\tau(z)$ صفر شود می توان (۱) را به یک فرم ساده تر تبدیل کرد. در آنصورت $\tilde{\sigma}(z)$ خطی بوده و (S) فرم زیر را به خود می گیرد

$$\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{1-2\alpha}{S}\frac{dy}{ds}+\left[\left(\beta\gamma s^{r-1}\right)^2+\frac{\alpha^2-y^2\nu^2}{s^2}\right]y=0 \qquad (۱۴)$$

که در آن ν,γ,β,α ثوابت هستند. حل های (۱۴) می توانند برحسب توابع بسل بیان شود.

٤) مسئله ای که می تواند به جواب یک معادله از نوع فوق هندسی تقلیل یابد، جواب یک دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه اول است.

$$\begin{aligned} u_1' &= a_{11}(z)u_1+a_{12}(z)u_2 \\ u_2' &= a_{21}(z)u_1+a_{22}(z)u_2 \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

و این در حالتی است که $a_{ik}(z)$ فرمی به شکل زیر را دارند

$$a_{ik}(z)=\frac{\tau_{ik}(z)}{\sigma(z)} \qquad (۱۶)$$

که در آن $\tau_{ik}(z)$ چند جمله ای هایی حداکثر از درجه اول، $\sigma(z)$ یک چند جمله ای حداکثر از درجه دوم می باشد. اگرما $u_2(z)$ را از (۱۵) حذف کنیم معادله ای به فرم زیر برای $u_1(z)$ بدست می آید.

$$u_1'' - \left(a_{11}+a_{22}+\frac{a_{12}'}{a_{12}}\right)u_1' + \left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}+a_{11}\frac{a_{12}'}{a_{12}}-a_{11}'\right)u_1 = 0 \qquad (۱۷)$$

و از آنجا ئیکه

$$\frac{a_{12}'}{a_{12}} = -\frac{\sigma'}{\sigma}+\frac{\tau_{12}'}{\tau_{12}}$$

با قرار دادن $\tau_{12}'=0$ معادله (۱۷) از نوع معادلات فوق هندسی خواهد بود و اگر $\tau_{12}'\neq 0$ باشد، در وحله اول یک تبدیل خطی بصورت زیر بکار می بریم

$$\begin{aligned} v_1' &= \alpha u_1 + \beta u_2 \\ v_2 &= \gamma u_1 + \delta u_2 \end{aligned}$$

که در آن ν,δ,β,α توابت می باشند.

در این صورت یک دستگاه معادلات به شکل زیر بدست می آوریم

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= \tilde{a}_{11}(z)v_1 + a_{12}(z)v_2 \\ v_2' &= \tilde{a}_{21}(z)v_1 + a_{22}(z)v_2 \end{aligned}\right\} \qquad (۱۸)$$

که در آن $\widetilde{a}_{ik}(z)$ ترکیباتی خطی از $a_{ik}(z)$ باضرایب ثابتی که به صورت $\delta,\gamma,\beta,\alpha$ دارند ، می باشند و در نتیجه شکلی به صورت زیر دارند.

$$\widetilde{a}_{ik}(z)=\frac{\widetilde{\tau}_{ik}(z)}{\sigma(z)}$$

($\tau_{ik}(z)$ ها چند جمله ای هایی حداکثر از درجه اول هستند) اگر ضرایب $\delta,\gamma,\beta,\alpha$ طوری انتخاب شوند که $\widetilde{\tau}'_{12}=0$ باشد، که همیشه هم امکان پذیر است، درآنصورت بعد از حذف $V_2(z)$ از (۱۸) ما یک معادله فوق هندسی از نوع تعمیم یافته برای $v_1(z)$ بدست می آوریم .

اگر $\sigma(z)$ یک چند جمله ای حداکثر از درجه اول باشد ما می توانیم به روشهای متعدد از (۱۵) به یک معادله از نوع فوق هندسی برسیم، و این در صورتی است که $\delta,\gamma,\beta,\alpha$ را طوری انتخاب کنیم که $\widetilde{a}_{12}$ مستقل از Z باشد ، بدین معنی که $\tau_{12}=v\sigma(z)$ باشد (v یک ثابت است)

۱-۷) خواص جوابهای معادلات فوق هندسی

در این مرحله خواص جوابهای معادلات فوق هندسی را تحقیق می کنیم.

$$\sigma(z)y''+\tau(z)y'+\lambda y=0 \qquad (۱)$$

ابتدا نشان می‌دهیم که تمامی مشتقات توابع از نوع فوق هندسی خودشان دوباره توابعی از نوع فوق هندسی هستند.