دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته آمار ریاضی

عنوان:

برآورد ناپارامتری مد در مدل برش‌چپ
با داده‌های آمیزنده قوی

استاد راهنما:
جناب آقای دکتر وحید فکور

استاد مشاور:
جناب آقای دکتر مجید سرمد

نگارنده:
سمانه احسانی

شهریورماه ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

که وجودشان ترنم رحمت الهی است...

« مَن لَم یَشکُرِ المَخلوق لَم یَشکُرِ الخالِق »

از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر وحید فکور که در تدوین این پایان‌نامه، نهایت لطف و بزرگواری خود را از من دریغ نداشته‌اند، سپاسگزارم.

برخود لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر مجید سرمد که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را بر عهده داشتند، صمیمانه تشکر نمایم.

همچنین مراتب تشکر و قدردانی خود را از آقایان دکتر مهدی عمادی و دکتر مهدی دوست‌پرست که داوری پایان‌نامه حاضر را برعهده داشتند، ابراز می‌دارم.

از منشی محترم گروه آمار سرکار خانم سلیمانی، مسئولین محترم کتابخانه آقای داوودنژاد و خانم صادقی، مسئول مرکز رایانه آقای وطن دوست، مسئول محترم امور عمومی دانشکده آقای مؤمن نیز به خاطر هماهنگی‌ها و مساعدت‌های لازم سپاسگزارم.

سمانه احسانی

شهریور ماه ۱۳۹۰

فهرست مندرجات

پیشگفتار

برآورد ناپارامتری مد توابع چگالی احتمال با استفاده از نمونه‌ای تصادفی، یکی از مسائل مهم در استنباط آماری است که سابقه‌ای طولانی در مطالعات آماری دارد.

سال‌ها شرط استقلال بین مشاهدات، یکی از مهم‌ترین پذیره‌ها در بررسی ویژگی‌های برآوردگر مد به شمار می‌رفت. در همین راستا، پارزن (۱۹۶۲) سازگاری ضعیف و نرمال بودن مجانبی برآوردگر مد یک تابع چگالی احتمال را بیان کرد و سازگاری قوی توسط نادارایا (۱۹۶۵) بدست آمد. چرنوف (۱۹۶۴) برآوردگر مد را بررسی و آن را به عنوان مرکز بازه‌ای که شامل اکثر مشاهدات است، تعریف نمود. رومانو (۱۹۸۸) رفتار مجانبی برآوردگر هسته‌ای مد را با پهناهای باند وابسته به داده‌ها مورد بررسی قرار داد و در مقابل، ویو (۱۹۹۶) نرخ همگرایی را برای برآوردهای موضعی و فراموضعی مد بدست آورد. هرمن و زیگلر (۲۰۰۴) نرخ‌های برآورد ناپارامتری مد را در غیاب پذیره‌های هموارساز نتیجه‌گیری کردند.

بدیهی است که پذیرفتن استقلال بین متغیرهای تصادفی همیشه امکان‌پذیر نیست و در برخی رویدادهای واقعی، نوعی از وابستگی بین متغیرهای تصادفی دیده می‌شود. وابستگی $\alpha-$آمیزنده، یکی از ضعیف‌ترین وابستگی‌های موجود می‌باشد که تاکنون مورد توجه بسیاری قرار گرفته است. این نوع وابستگی توسط روزن بلات (۱۹۵۶) معرفی شد. وی قضیه حد مرکزی را برای متغیرهای تصادفی $\alpha-$آمیزنده ثابت نمود. از آن زمان تاکنون توجه به متغیرهای تصادفی $\alpha-$آمیزنده، از اهمیت

بسیاری برخوردار بوده است. کاربرد این متغیرها در نظریه آمار و احتمال بسیار گسترده می‌باشد. اولد سعید (۱۹۹۳) و نیز لوانی و اولد سعید (۱۹۹۹) به ترتیب، سازگاری قوی روی یک مجموعه فشرده و نرمال بودن مجانبی برآوردگر مد را با شرط $\alpha-$آمیزنده بودن متغیرهای مورد بررسی نشان دادند.

در اغلب مسائل آمار کاربردی، مشاهدات در دست بررسی، از جامعه‌ای نمونه‌گیری شده‌اند که توزیع آن با توزیع مورد مطالعه پژوهشگر متفاوت است. چنین مشاهداتی نمونه‌های اریب نامیده می‌شوند. استفاده از این داده‌ها در استنباط راجع به توزیع جامعه، اریبی به وجود می‌آورد. داده‌های برش از مشهورترین نوع نمونه‌های اریب می‌باشد. برش، اغلب در مطالعات پزشکی و مهندسی رخ می‌دهد و دستیابی به بخشی از اطلاعات مربوط به متغیر مورد بررسی را در آزمودنی‌ها غیر ممکن می‌سازد. به عنوان مثال اگر پیشامد مورد علاقه پژوهشگر قبل از زمان شروع مطالعه بر روی آزمودنی رخ دهد، آنگاه اطلاعات مربوط به متغیر نظیر این پیشامد، در دسترس وی نمی‌باشد. این وضعیت در داده‌ها، برش‌چپ نامیده می‌شود. اولد سعید و تاتاچک (a ۲۰۰۹) برآورد ناپارامتری مد را در مدل برش‌چپ و با فرض وجود استقلال بین متغیرهای مورد بررسی تعریف نمودند؛ همچنین اولد سعید و تاتاچک (b ۲۰۰۹) برآورد ناپارامتری مد را در مدل فوق و با شرط $\alpha-$آمیزنده بودن متغیر مورد بررسی معرفی کردند . ما نیز با توجه به نتایج بدست آمده، به بررسی رفتار مجانبی برآوردگرهای تعریف‌شده توسط آنها در این مدل می‌پردازیم و برای نشان دادن رفتار برآوردگر در نمونه‌های با حجم کم، به مطالعه شبیه‌سازی انجام شده می‌پردازیم.

در فصل اول پایان‌نامه، تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های آتی، ارائه خواهد شد. در این فصل، ابتدا مروری بر مفاهیم احتمال و فرآیندهای تصادفی داریم. پس از آن، با مفهوم متغیرهای بریده از چپ آشنا می‌شویم که پایه و اساس ورود به فصل دوم می‌باشد. در ادامه، تعریف وابستگی

ضعیف و متغیرهای تصادفی آمیزنده مورد مطالعه قرار می‌گیرد. سپس به معرفی تابع هسته و برخی از مهم‌ترین شکل‌های آن می‌پردازیم. در قسمت آخر، رده $V-C$ [۱] از توابع و نیز گزاره و لم‌های مربوط به آن بررسی خواهند شد.

در فصل دوم با مدل برش‌چپ تصادفی (برش‌چپ) به طور کامل آشنا خواهیم شد. پس از آن با فرض استقلال بین متغیرهای مورد بررسی، برآوردگر هسته‌ای ناپارامتری مد را بدست آورده و در ادامه، سازگاری قوی را همراه با یک نرخ برای برآوردگر معرفی شده و نرمال بودن مجانبی آن را نشان می‌دهیم. همچنین با توجه به نتایج کسب‌شده، یک بازه اطمینان برای برآوردگر مد ارائه می‌کنیم. در نهایت، به‌منظور روشن ساختن نتایج و نشان دادن ویژگی نرمال بودن مجانبی برآوردگر در نمونه‌های متناهی، شبیه‌سازی را گنجانده‌ایم.

در فصل سوم به بررسی برآوردگر هسته‌ای مد در مدل برش‌چپ و با شرط $\alpha-$آمیزنده بودن متغیرهای مورد بررسی می‌پردازیم. همچنین سازگاری قوی را با نرخی برای برآوردگر معرفی شده نشان می‌دهیم.

لازم به ذکر است که در طول این پایان‌نامه همواره سعی بر آن بوده است که تمامی قضایا و نتایج مورد نیاز در همین مجموعه آورده شود تا خواننده بتواند بدون نیاز به مراجع، برهان قضایای اصلی را دنبال کند. همچنین برای جلوگیری از حجیم شدن این گردایه، از آوردن برهان این نتایج اجتناب کرده و تنها به ذکر نام مرجع بسنده کرده‌ایم. علی رغم اینکه نمادهای مربوط به هر فصل، در همان قسمت معرفی می‌شوند، در ادامه فهرستی از نمادهای استفاده شده در کل پایان‌نامه ارائه می‌شود تا سبب سهولت در امر آشنایی با نمادها شود. به‌منظور حفظ یکپارچگی و انسجام در نوشتار پایان‌نامه و نیز جلوگیری از ترکیب کلمات انگلیسی با متن فارسی، واژه‌نامه‌ای را در انتها گردآوری نمودیم تا

[۱] Vapnik-Ćervonenkis class

خوانندگان بتوانند به‌صورت یکجا و آنی، برگردان بیشتر واژه‌های مطرح‌شده در پایان‌نامه را مشاهده نمایند. در برگردان علائم، اسامی و ترجمه کلمات کلیدی از کتاب **واژه‌ها و اصطلاحات آماری** چاپ مرکز آمار ایران استفاده گردیده است.

نمادها

متمم مجموعه A	A^c
سیگمامیدان	$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{F}$
$\inf\{z : F(z) > ۰\}$	a_F
ضریب آمیزنده	$\alpha(n)$
همگرایی تقریبا حتمی	$\longrightarrow \; a.s.$
احتمال برش	β
$\sup\{z : F(z) < ۱\}$	b_F
ثابت عمومی	$C_۱, C_۲, D$
همگرایی در توزیع	$\xrightarrow{D}$
مد متغیر مورد بررسی	θ
مجموعه تهی	$\emptyset$
امید ریاضی	E
تابع توزیع متغیر مورد بررسی	F
تابع چگالی متغیر مورد بررسی	f
مشتق j−ام تابع چگالی	$f^{(j)}$
تابع توزیع متغیر برش	G
پهنای باند	h_n
تابع نشانگر مجموعه A	$I(A)$
تابع هسته	K
مشتق j−ام تابع هسته	$K^{(j)}$
مجموعه اعداد طبیعی	$\mathcal{N}$
بزرگترین عدد صحیح کوچکتر مساوی n	$\lceil n \rceil$
همگرایی در احتمال	$\xrightarrow{P}$
مجموعه اعداد حقیقی	$\mathcal{R}$
تعریف می‌کنیم S	$=: S \;\; or \;\; S :=$
متغیر برش	T
واریانس	Var
متغیر مورد بررسی	Y
مینیمم بین Y و T	$Y \wedge T$
مجموعه اعداد صحیح	$\mathcal{Z}$

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مورد نیاز

در نخستین بخش از این فصل، مروری بر مبحث احتمال و مفاهیم مربوط به آن خواهیم داشت. بخش دوم، نگاهی گذرا به تعریف متغیرهای بریده از چپ دارد. سپس در بخش بعد، وابستگی ضعیف و متغیرهای تصادفی آمیزنده مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بخش چهارم به معرفی تابع هسته و برخی از مهم‌ترین شکل‌های آن اختصاص یافته است. سرانجام در بخش پنجم به تعاریف رده $V-C$ از مجموعه‌ها و توابع می‌پردازیم. همچنین گزاره و لم‌هایی را در این باره ذکر می‌کنیم.

۱—۱ مروری بر مفاهیم احتمال و فرآیندهای تصادفی

در کلیه قسمت‌های این فصل و فصل‌های آینده نمادهای $\mathcal{R}$ و $\mathcal{Z}$ و $\mathcal{N}$ به ترتیب نمایانگر مجموعه اعداد حقیقی، مجموعه اعداد صحیح و مجموعه اعداد طبیعی می‌باشند. همچنین از A و B برای نمایش مجموعه‌های دلخواه و از $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ و $\mathcal{F}$ به عنوان سیگمامیدان استفاده می‌نماییم و برای نشان دادن متمم مجموعه A، نماد A^c را بکار می‌بریم.

تعریف ۱.۱ فرض کنید Ω یک مجموعه ناتهی دلخواه باشد. گردایه $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های Ω یک **سیگمامیدان** نامیده می‌شود هرگاه شامل Ω بوده و تحت عمل متمم‌گیری و اجتماع شمارا از مجموعه‌ها بسته باشد. به عبارت دیگر

i) $\Omega \in \mathcal{F}$،

ii) اگر $A \in \mathcal{F}$ آنگاه $A^c \in \mathcal{F}$،

iii) اگر $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ آنگاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

□

تعریف ۲.۱ تابع مجموعه‌ای μ را که روی سیگمامیدان $\mathcal{F}$ تعریف شده است،

$$\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty),$$

یک **اندازه** گویند هرگاه

i) μ تابعی نامنفی باشد،

ii) $\mu(\emptyset) = 0$،

iii) اگر $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های جدا از هم باشند، آنگاه

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

□

تعریف ۳.۱ اگر $\mathcal{F}$ یک سیگمامیدان تعریف شده روی Ω و μ یک اندازه تعریف شده روی $\mathcal{F}$ باشد، آنگاه سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ یک **فضای اندازه** نامیده می‌شود. □

تعریف ۴.۱ تابع مجموعه‌ای P که روی سیگمامیدان $\mathcal{F}$ تعریف شده است، یک **اندازه احتمال** نامیده می‌شود هرگاه دارای خواص زیر باشد:

i) برای هر مجموعه $A \in \mathcal{F}$ داشته باشیم $0 \leq P(A) \leq 1$،

ii) $P(\Omega) = 1$،

iii) اگر $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های جدا از هم باشند، آنگاه

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

□

تعریف ۵.۱ اگر $\mathcal{F}$ یک سیگمامیدان تعریف شده روی Ω و P یک اندازه احتمال تعریف شده روی $\mathcal{F}$ باشد، آنگاه سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک **فضای احتمال** نامیده می‌شود. $\square$

تعریف ۶.۱ **فرآیند تصادفی**، گردایه‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X_t : t \in T\}$ است که روی یک فضای احتمال تعریف شده‌اند. $\square$

برای هر $\omega \in \Omega$، **مجموعه** $\{X_t(\omega), t \in T\}$ **مسیر نمونه‌ای فرآیند** X_t نامیده می‌شود. در تعریف ۶.۱، مجموعه اندیس‌گذار T یک مجموعه پیوسته یا گسسته دلخواه است که می‌تواند شامل مقادیر مثبت یا منفی باشد. از $t \in T$ معمولا به زمان t تعبیر می‌شود. در حالت کلی، فرآیند تصادفی را بدون توجه به گسسته یا پیوسته بودن مجموعه اندیس‌گذار، با نماد $\{X_t\}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۱ فرض کنید $\{X_t\}$ یک فرآیند تصادفی با مجموعه اندیس‌گذار T و $F_X(x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_k})$ نمایانگر تابع توزیع تجمعی توأم $\{X_t\}$ در زمان‌های t_1 ، t_2 ، ... ، t_k باشد. در اینصورت، $\{X_t\}$ را **مانا** گوییم هرگاه به ازای هر k و هر τ به‌طوری که $t_1 + \tau, t_2 + \tau, \ldots, t_k + \tau \in T$، داشته باشیم

$$F_X(x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_k}) = F_X(x_{t_1+\tau}, x_{t_2+\tau}, \ldots, x_{t_k+\tau}).$$

$\square$

تعریف ۸.۱ فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی باشند. گوییم $a_n = O(b_n)$، هرگاه ثابت مثبت و متناهی C و عدد صحیح و مثبت $n(C)$ موجود باشند به‌قسمی که

$$|\frac{a_n}{b_n}| \leq C, \qquad \forall n \geq n(C).$$

$\square$

تعریف ۹.۱ فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی باشند. گوییم $a_n = o(b_n)$ هرگاه برای هر $\epsilon > 0$، عدد صحیح و مثبت $n(\epsilon)$ موجود باشد به‌قسمی که

$$|\frac{a_n}{b_n}| \leq \epsilon, \qquad \forall n \geq n(\epsilon).$$

□

تعریف ۱۰.۱ فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی و $\{b_n\}$ یک دنباله دلخواه باشد. گوییم $X_n = O_P(b_n)$، هرگاه به ازای هر $\eta > 0$، ثابت مثبت و متناهی C و عدد صحیح و مثبت $n(\eta)$ موجود باشد به‌قسمی که

$$P(|\frac{X_n}{b_n}| \leq C) \geq 1 - \eta, \qquad \forall n \geq n(\eta).$$

□

تعریف ۱۱.۱ فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی و $\{b_n\}$ یک دنباله دلخواه باشد. گوییم $X_n = o_P(b_n)$، هرگاه به ازای هر $\eta > 0$ و $\epsilon > 0$، عدد صحیح و مثبت $n(\epsilon, \eta)$ موجود باشد به‌قسمی که

$$P(|\frac{X_n}{b_n}| > \epsilon) < \eta, \qquad \forall n \geq n(\epsilon, \eta).$$

□

تعریف ۱۲.۱ فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی و $\{b_n\}$ یک دنباله دلخواه باشد. گوییم $X_n = O(b_n) \quad a.s.$، هرگاه به ازای هر $\eta > 0$، ثابت مثبت و متناهی C و عدد صحیح و مثبت $n(\eta)$ موجود باشد به‌قسمی که

$$P(|\frac{X_N}{b_N}| > C \quad for \;\; some \quad N \geq n) < \eta, \qquad \forall n \geq n(\eta).$$

□

تعریف ۱۳.۱ فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی و $\{b_n\}$ یک دنباله دلخواه باشد. گوییم $X_n = o(b_n) \quad a.s.$، هرگاه به ازای هر $\eta > 0$ و $\epsilon > 0$، عدد صحیح و مثبت $n(\epsilon, \eta)$ موجود باشد به‌قسمی که

$$P(|\frac{X_N}{b_N}| > \epsilon \quad for \;\; some \quad N \geq n) < \eta, \qquad\qquad \forall n \geq n(\epsilon, \eta).$$

□

تعریف ۱۴.۱ تابع $g : \mathcal{R}^d \to \mathcal{R}$ را درنظر بگیرید. گوییم $g(.)$ **پیوسته هولدر** با توان C_2 است هرگاه ثابت‌های $C_1 > 0$ و $0 \leq C_2 \leq 1$ وجود داشته باشند به‌طوری که به ازای هر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ در $\mathcal{R}^d$،

$$|g(\mathbf{u}) - g(\mathbf{v})| \leq C_1 \parallel \mathbf{u} - \mathbf{v} \parallel^{C_2},$$

که در آن $\parallel \mathbf{u} - \mathbf{v} \parallel = [\sum_{i=1}^d (u_i - v_i)^2]^{1/2}$. □

چنانچه $g(.)$ به ازای $C_1 = 1$ پیوسته هولدر باشد، آنگاه گوییم $g(.)$ **پیوسته لیپ شیتس** است.

تعریف ۱۵.۱ فرض کنید $f : [a, b] \to \mathcal{R}$. اگر

$$\Big\{ \; V_f(P) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|; \; \forall P \Big\},$$

که در آن P افرازی از $[a, b]$ است، یک مجموعه کراندار باشد، گوییم f **با تغییر کراندار** است و مجموعه همه توابع با تغییر کراندار روی $[a, b]$ را با نماد $BV\Big([a, b]\Big)$ نمایش می‌دهیم. □

تعریف ۱۶.۱ اگر $f \in BV([a, b])$ باشد، قرار می‌دهیم

$$V_f\Big([a, b]\Big) = \sup_P \Big\{ V_f(P) \Big\},$$

(که در آن P افرازی از $[a, b]$ است) و آن را **تغییرات کل** f بر $[a, b]$ می‌نامیم. □

مثال ۱.۱ هر تابع ثابت، با تغییر کراندار است؛ زیرا

$$\forall x \in [a,b]\ , \quad f(x) = C_1 \Longleftrightarrow V_f\Big([a,b]\Big) = 0.$$

□

با توجه به تعریف‌های ۱۵.۱ و ۱۶.۱، چند قضیه و گزاره را بیان می‌کنیم. پس از آن، به تعریف یک مجموعه اندازه‌پذیر می‌پردازیم.

قضیه ۱.۱ (آپوستل، ۱۳۶۹، ص ۱۸۹) اگر $f(.)$ تابعی صعودی روی بازه $[a,b]$ باشد، آنگاه

$$V_f\Big([a,b]\Big) = f(b) - f(a)\ ; \quad f \in BV\Big([a,b]\Big).$$

□

گزاره ۱.۱ (آپوستل، ۱۳۶۹، ص ۲۰۱) اگر $f(.)$ روی بازه $[a,b]$ در شرط لیپ شیتس صدق کند یعنی

$$\exists M > 0 \quad s.t. \quad \forall x,y \in [a,b] : |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|,$$

آنگاه $f \in BV\Big([a,b]\Big)$ و $V_f\Big([a,b]\Big) \leq M(b-a)$.

□

قضیه ۲.۱ (آپوستل، ۱۳۶۹، ص ۱۸۹) اگر $f \in BV\Big([a,b]\Big)$، آنگاه $f(.)$ تابعی کراندار است. اما عکس آن همواره برقرار نیست.

□

مثال ۲.۱ تابع $f(.)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} x\cos(\frac{\pi}{2x}) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

واضح است که $f(.)$ بر بازه $[0, 1]$ کراندار است اما $f \notin BV\Big([0, 1]\Big)$؛ زیرا با در نظر گرفتن افراز $P = \{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \dots, \frac{1}{2}, 1\}$ از بازه $[0, 1]$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} V_f(P) &= \sum_{i=1}^{2n+1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-2} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}, \end{aligned}$$

که دنباله مجموع‌های جزئی سری واگرای $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ می‌باشد. پس $V_f(P)$ کراندار نیست.

□

قضیه ۳.۱ (آپوستل، ۱۳۶۹، ص ۱۹۴) تابع $f(.)$ را که بر بازه $[a, b]$ تعریف شده است، می‌توان به صورت تفاضل دو تابع صعودی نوشت اگر و فقط اگر $f \in BV\Big([a, b]\Big)$.

□

تذکر ۱.۱ نمایش یک تابع باتغییر کراندار به صورت تفاضل دو تابع صعودی، منحصر به فرد نمی‌باشد.

□

قضیه ۴.۱ (آپوستل، ۱۳۶۹، ص ۲۳۳) هر یک از شرط های زیر برای وجود انتگرال ریمان $\int_a^b f(x)\, dx$ کافی است:

آ) $f(.)$ بر $[a, b]$ پیوسته باشد.

ب) $f(.)$ بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد.

□

قضیه ۵.۱ (آپوستل، ۱۳۶۹، ص ۱۸۹) هرگاه $f(.)$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد و $f^{(1)}(.)$ در $[a,b]$ موجود و کراندار باشد، آنگاه $f(.)$ بر $[a,b]$ با تغییر کراندار است. □

تعریف ۱۷.۱ زیرمجموعه B از $\mathcal{R}$ را **اندازه‌پذیر** می‌نامند هرگاه به ازای هر مجموعه A،

$$m^*(A) = m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c).$$

که در آن $m^*(C) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)$، $I_n = [a_n, b_n)$ و $\ell(I_n)$ نمایانگر طول بازه I_n می‌باشد. در حقیقت اینفیمم روی خانواده همه پوشش‌های مجموعه C که بازه‌هایی به شکل $[a_n, b_n)$ می‌باشد، گرفته شده است. □

تعریف ۱۸.۱ اگر $f(.)$ تابعی تعریف‌شده بر مجموعه اندازه‌پذیری مانند B و مقادیری واقع در دستگاه تعمیم‌یافته اعداد حقیقی باشد، یعنی $f : B \to \mathcal{R}^*$ که در آن $B \subset \mathcal{R}$ و $\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$، آنگاه $f(.)$ را تابعی اندازه‌پذیر گوییم هرگاه به ازای هر $a \in \mathcal{R}$، مجموعه $\{x \in B : f(x) > a\}$ اندازه‌پذیر باشد. به عبارت دیگر، نقش معکوس $(a, +\infty]$ تحت $f(.)$ ($f^{(-1)}(a, +\infty]$)، اندازه‌پذیر باشد. □

مثال ۳.۱ هر تابع پیوسته، اندازه‌پذیر است. □

در ادامه، قضیه حد مرکزی که به نام **قضیه لیندبرگ–له‌وی–فلر** معروف می‌باشد، آورده شده است.

قضیه ۶.۱ (گات، ۲۰۰۷، صص ۳۳۰ و ۳۳۱) فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با $EX_n = \mu_n$ و $Var(X_n) = \sigma_n^2$ باشد. قرار می‌دهیم $(n \geq 1)$ $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$ و دو شرط زیر را که به شرط های لیندبرگ معروف‌اند در نظر می گیریم: