دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز

عنوان

شاخص میانگین‌پذیری داخلی جبرهای باناخ

استاد راهنما

دکتر حمیدرضا ابراهیمی ویشکی

استاد مشاور

دکتر محمد صال مصلحیان

توسط

علیرضا خدامی

اسفند ۱۳۹۰

نام خانوادگی دانشجو: خدامی   نام: علیرضا

عنوان: شاخص میانگین‌پذیری داخلی جبرهای باناخ

استاد راهنما: دکتر حمیدرضا ابراهیمی ویشکی

استاد مشاور: دکتر محمد صال مصلحیان

مقطع تحصیلی: دکتری   رشته: ریاضی محض   گرایش: آنالیز

دانشگاه: فردوسی مشهد   دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: اسفند ۱۳۹۰   تعداد صفحات: ۱۰۵

واژگان کلیدی: اشتقاق، اشتقاق جردن، اشتقاق لی، دوتختی، دوتصویری، شاخص میانگین‌پذیری، شاخص میانگین‌پذیری داخلی، حاصل‌ضرب تانسوری، حاصل‌ضرب لائو، ضربگر جردن چپ (راست)، همریختی جردن، n−میانگین‌پذیری ضعیف، φ−میانگین‌پذیری، φ−میانگین‌پذیری داخلی

چکیده

فرض کنید A و B دو جبر باناخ و $\Delta(B)$ فضای شاخص‌های روی B باشد. دراین صورت با فرض $\theta \in \Delta(B)$، حاصل‌ضرب $A \times B$ تحت ضرب

$$(a,b)(c,d) = (ac + \theta(d)a + \theta(b)c, bd),$$

و نرم l_1 یک جبر باناخ است که به آن θ−حاصل‌ضرب لائوی A و B می‌گوییم و معمولاً آن‌را با $A \times_\theta B$ نمایش می‌دهیم. در این راستا خواص دوتصویری، دوتختی، n−میانگین‌پذیری ضعیف و شاخص میانگین‌پذیری داخلی $A \times_\theta B$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین خاصیت شاخص میانگین‌پذیری داخلی را برای جبرهای باناخ خاص از جمله حاصل‌ضرب تانسوری تصویری دو جبر باناخ، گسترش مدولی یک جبر باناخ و جبر باناخ مثلثی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در ادامه جبری را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که ضربش برخاسته از عملگر خطی کرانداری است که متعلق به دوگانش می‌باشد و در این جهت برخی از خواص آنالیزی و جبری آن را مطالعه می‌نماییم.

تقدیم به

همسر مهربان و فرزند عزیزم مهرناز

از استاد مهربان و دلسوزم جناب آقای دکتر حمیدرضا ابراهیمی ویشکی به عنوان استاد راهنما، بخاطر راهنمایی های علمی ایشان و همچنین به دلیل آنکه ایشان برای اینجانب استاد اخلاق، معرفت، محبت و انسانیت بوده اند خالصانه تشکر و قدردانی می نمایم. همچنین بر خود لازم می دانم از جناب آقای دکتر محمد صال مصلحیان که به عنوان استاد مشاور قبول زحمت نموده اند تشکر نمایم. از داورهای محترم، آقایان، دکتر رحمت اله لشکری پور، دکتر عبدالرسول پور عباس، دکتر رجبعلی کامیابی گل و دکتر علی رضا کامل میر مصطفایی بخاطر راهنمایی های ارزنده اشان قدردانی می نمایم. در نهایت از همسر مهربان و فرزند عزیزم مهرناز، که در مدت تحصیلم صبورانه مرا یاری نمودند خالصانه تشکر می نمایم.

علیرضا خدامی
اسفند ۱۳۹۰

فهرست مطالب

پیش گفتار

مفهوم میانگین‌پذیری چپ برای یک جبر لائو [۱] (پیش‌دوگان یک جبر فون نویمان به‌طوری‌که عضو همانی آن، یک تابعک خطی ضربی روی آن باشد) که در [۲۶] توسط لائو معرفی گردیده، با معرفی مفهوم φ-میانگین‌پذیری برای یک جبر باناخ دلخواه در [۲۰] توسعه داده شده و در [۱۶، ۲۱، ۳۰] مطالعه شده است. اخیراً در [۱۷] نوعی از φ-میانگین‌پذیری داخلی توسط جباری [۲] ودو نویسنده دیگر مقاله تعریف و همچنانکه در این مقاله عنوان شده، این نوع تعریف از میانگین‌پذیری، حالت تعمیم یافته‌ای از مفهوم میانگین‌پذیری داخلی برای جبرهای لائو است که در [۲۸] توسط نصر اصفهانی [۳] معرفی شده است. در این رساله همچنان که در [۱۰] بیان کرده‌ایم شاخص میانگین‌پذیری داخلی را برای حاصل‌ضرب‌های خاصی از جبرهای باناخ از جمله حاصل‌ضرب تانسوری تصویری $A\hat{\otimes}B$، θ-حاصل‌ضرب لائوی $A\times_\theta B$ و همچنین گسترش مدولی $A\oplus X$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. به علاوه شرایطی لازم و کافی برای این نوع از میانگین‌پذیری در ارتباط با جبرهای عنوان شده ارائه می‌دهیم. از جمله نشان می‌دهیم که جبر $A\hat{\otimes}B$ شاخص میانگین‌پذیر داخلی است اگر و تنها اگر هر دو جبر A و B دارای این خاصیت باشند. برای هر دو جبر باناخ A و B نوعی از ضرب به نام θ-حاصل‌ضرب لائو $(\theta\in\Delta(B))$ روی حاصل‌ضرب دکارتی $A\times B$ در [۳۱]

---
[۱] Lau
[۲] Jabbari
[۳] Nasr-Isfahani

توسط سنگانی[۴] منفرد تعریف شده است که این نوع حاصل‌ضرب قبلاً توسط لائو برای جبرهای لائو در [۲۶] معرفی شده بود و لذا بعداً ضرب لائو نامیده شد. در [۳۱] سنگانی منفرد بعضی از خواص آنالیزی و جبری $A \times_\theta B$ را مورد بررسی قرار داد که از آن جمله می‌توان میانگین‌پذیری ضعیف این جبر را نام برد. در این راستا با استفاده از احکامی که در [۲۲] اثبات کرده‌ایم به بررسی n−میانگین‌پذیری ضعیف جبر $A \times_\theta B$ می‌پردازیم و با شرط یکدار بودن A، شرطی لازم و کافی برای n−میانگین‌پذیری ضعیف $A \times_\theta B$، بیان می‌کنیم. همچنین اشتقاق‌های جردن و لی را از جبر $A \times_\theta B$ به توی n−امین دوگان آن، یعنی $(A \times_\theta B)^{(n)}$ بررسی می‌نماییم[۲۳]. به‌علاوه ضربگرهای چپ و راست و همچنین ضربگرهای جردن چپ و راست را روی $A \times_\theta B$ مشخص می‌کنیم. در نهایت برای هر جبر مانند C همریختی‌ها و همریختی‌های جردن را از $A \times_\theta B$ به C مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای بررسی کامل‌تر جبر $A \times_\theta B$ خواص دوتصویری و دوتختی این جبر را مطالعه می‌کنیم [۲۴] و شرایطی لازم و کافی برای دوتصویری بودن و دوتخت بودن $A \times_\theta B$ ارائه می‌دهیم.

همچنین یک فضای باناخ مانند A را به ضربی مجهز می‌کنیم که آنرا تبدیل به جبر باناخ می‌نماید به‌طوری‌که در ضمن سادگی ساختار این جبر، می‌توان آن را به‌عنوان منبعی از مثال‌ها و یا مثال‌های نقض در ساختارهای جبری و آنالیزی به‌کار برد و در این مجموعه همچون در [۲۵] جبر تولید شده را به‌صورت کامل بسط می‌دهیم. یادآوری می‌شود که منشأ پیدایش این قسمت از رساله در مثال ساده‌ای از ژانگ[۵] ([۳۲]، صفحه ۵۰۷) بوده است که آنرا روی هر فضای باناخ دلخواه تعمیم داده‌ایم. بعضی از خواص این‌گونه جبرها در [۱، ۷، ۸] بررسی شده‌اند.

در این مجموعه که حاوی شش فصل می‌باشد، پس از معرفی مفاهیم اولیه در فصل ۰، در پنج

[۴] Sangani. Monfared
[۵] Zhang

فصل دیگر مطالعات زیر را انجام می‌دهیم.

در فصل ۱ شاخص میانگین‌پذیری داخلی را برای جبرهای $A\hat{\otimes}B$، $A\times_\theta B$، $A\oplus_p B$ و همچنین جبر باناخ گسترش مدولی $A\oplus X$ و جبر باناخ مثلثی τ بررسی می‌کنیم.

در فصل ۲ هر فضای باناخ مانند A را توسط یک تابعک خطی کراندار روی A، تبدیل به یک جبر باناخ می‌نماییم و خواص n−میانگین‌پذیری ضعیف و شاخص میانگین‌پذیری داخلی این جبر را مورد بررسی قرار می‌دهیم و برای شناخت بهتر این جبر به بررسی خواص متنوع آن می‌پردازیم.

در فصل ۳ اشتقاق‌ها، اشتقاق‌های جردن و لی از $A\times_\theta B$ به $(A\times_\theta B)^{(n)}$ را بررسی می‌نماییم و ارتباط این نوع از اشتقاق‌ها را با اشتقاق‌های مشابه روی A و B استخراج می‌کنیم. همچنین در این فصل همریختی‌ها و همریختی‌های جردن روی $A\times_\theta B$ را مطالعه می‌نماییم و در نهایت به بررسی ضربگرها و ضربگرهای جردن راست و چپ روی $A\times_\theta B$ می‌پردازیم.

در فصل ۴، n−میانگین‌پذیری ضعیف $A\times_\theta B$ را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم در حالتی‌که A یکدار است، $A\times_\theta B$، n−میانگین‌پذیر ضعیف است اگر و فقط اگر A و B، n−میانگین‌پذیر ضعیف باشند.

در فصل ۵ ضمن بررسی خواص دوتصویری و دوتختی $A\times_\theta B$ نشان می‌دهیم با فرض یکدار بودن A، $A\times_\theta B$ دوتصویری (دوتخت) است اگر و فقط اگر A و B دوتصویری (دوتخت) باشند.

فصل ۰
مفاهیم اولیه

۱.۰ جبرهای باناخ

فرض کنید A یک جبر روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ باشد. همچنین فرض کنید $\|\cdot\|$ یک نرم روی A درنظر گرفته شود. A را یک **جبر باناخ** می‌نامیم، هرگاه A نسبت به نرم $\|\cdot\|$ کامل بوده و برای هر دو عضو x و y از A داشته باشیم $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$.

فرض کنید A و B دو جبر باناخ(فضای باناخ)، به ترتیب با نرم های $\|\cdot\|_A$ و $\|\cdot\|_B$ باشند. در این‌صورت به سادگی می توان نشان داد که مجموع مستقیم $A \oplus B$، همراه با اعمال مولفه وار و نرم

$$\|(a, b)\| = \|a\|_A + \|b\|_B, \qquad (a \in A, b \in B)$$

تشکیل یک جبر باناخ(فضای باناخ) می‌دهد که با نماد $A \oplus_1 B$ نمایش داده می‌شود.

یک **برگشت** روی یک جبر باناخ مانند A یک نگاشت مزدوج خطی مانند $a \to a^*$ از A به توی A می‌باشد به‌طوری‌که برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $a^{**} = a$ و $(ab)^* = b^*a^*$. زوج $(A, *)$ یک جبر باناخ **برگشت‌دار** یا $*$-جبر باناخ نامیده می‌شود.

یک **C^*-جبر** یک $*$-جبر باناخ مانند A می‌باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$ داشته باشیم

$\|a^*a\| = \|a\|^2$.

برای مطالعه بیشتر در مورد جبرهای باناخ و C^*-جبرها خواننده می‌تواند به مرجع [5] مراجعه نماید.

مجموعه مرتب جزئی Λ را **جهت‌دار** می‌نامند، هرگاه برای هر دو عضو λ_1 و λ_2 از Λ عضوی مانند $\lambda \in \Lambda$ موجود باشد به‌طوری‌که برای $i = 1, 2$، $\lambda_i \leq \lambda$.

هر نگاشت از مجموعه جهت‌دار Λ، به توی یک فضای توپولوژیک E را یک **تور** در E می‌نامند.

تور $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ در E را **همگرا** به $x \in E$ می‌نامیم، هرگاه برای هر همسایگی U از x، $\lambda_0 \in \Lambda$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $\lambda \geq \lambda_0$، $x_\lambda \in U$.

یک **همانی تقریبی چپ** برای جبر باناخ A، تور $\{a_\alpha\}_\alpha$ در A است به‌طوری‌که برای هر $a \in A$ داشته باشیم $a_\alpha a \to a$. به‌طور مشابه **همانی تقریبی راست** برای جبر A قابل تعریف می‌باشد.

یک **همانی تقریبی کراندار** برای جبر باناخ A، تور کراندار $\{a_\alpha\}_\alpha$ در A است به‌طوری‌که همانی تقریبی چپ و همانی تقریبی راست باشد.

۲.۰ حاصل‌ضرب‌های آرنز و تعریف منظم‌پذیری آرنز

فرض کنید A یک جبر باناخ و A^* و A^{**} به‌ترتیب دوگان‌های اول و دوم آن باشند. آنگاه دو ضرب $\Box$ و $\Diamond$، که به ترتیب **ضرب‌های آرنز** نوع اول و نوع دوم روی A^{**} نامیده می‌شوند، به‌صورت زیر بیان می‌شوند. فرض کنید $a, b \in A$، $f \in A^*$ و $m, n \in A^{**}$. در این‌صورت

$$\langle f \cdot a, b\rangle = \langle f, ab\rangle \qquad \langle b, a \cdot f\rangle = \langle ba, f\rangle$$
$$\langle n \cdot f, a\rangle = \langle n, f \cdot a\rangle \qquad \langle a, f \cdot n\rangle = \langle a \cdot f, n\rangle$$
$$\langle m \,\Box\, n, f\rangle = \langle m, n \cdot f\rangle \qquad \langle f, m\Diamond n\rangle = \langle f \cdot m, n\rangle.$$

هرگاه دو ضرب $\square$ و $\Diamond$ روی A^{**} منطبق باشند، به‌عبارت دیگر هرگاه برای هر $m, n \in A^{**}$ داشته باشیم $m \square n = m \Diamond n$، آنگاه A را **منظم‌پذیر آرنزی** می‌گویند.

قضیه ۰.۲.۱. *(گلدشتاین) اگر $m \in A^{**}$، آنگاه تور $(a_\alpha)_\alpha$ در A موجود است به‌طوری‌که برای هر α، $\|a_\alpha\| \le \|m\|$ و همچنین با در نظرگرفتن توپولوژی ضعیف* A^{**}، $a_\alpha \to m$ ([۹]، قضیه V.۴.۵).*

بنابه قضیه گلدشتاین، A منظم‌پذیر آرنزی است اگر و فقط اگر برای هر دو تور کراندار $(a_\alpha)_\alpha$ و $(b_\beta)_\beta$ در A داشته باشیم

$$w^* - \lim_\alpha w^* - \lim_\beta a_\alpha b_\beta = w^* - \lim_\beta w^* - \lim_\alpha a_\alpha b_\beta.$$

لازم به ذکر است که اگر $n \in A^{**}$ ثابت درنظر گرفته شود و فضای A^{**} با توپولوژی ضعیف* مجهز شود، آنگاه نگاشت $m \to m \square n$ از A^{**} به A^{**} ضعیف* $-$ ضعیف* پیوسته می‌باشد. در حالی‌که اگر $m \in A^{**}$ ثابت فرض شود، در حالت کلی نگاشت $n \to m \square n$ ضعیف* $-$ ضعیف* پیوسته نمی‌باشد، مگر آنکه m عضوی از A باشد. بدین‌منظور مرکز توپولوژیک A^{**} نسبت به ضرب $\square$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_1 = \{m \in A^{**} : \text{ نگاشت } n \to m \square n \text{ ضعیف}^* - \text{ضعیف}^* \text{ پیوسته باشد } \}$$

به طریق مشابه اگر $m \in A^{**}$ ثابت باشد، آنگاه نگاشت $n \to m \Diamond n$ از A^{**} به A^{**} ضعیف* $-$ضعیف* پیوسته است، در حالی‌که با ثابت درنظر گرفتن $n \in A^{**}$ نگاشت $m \to m \Diamond n$ در حالت کلی ضعیف* $-$ ضعیف* پیوسته نمی‌باشد، مگر آنکه n عضوی از A باشد. مرکز توپولوژیک A^{**} نسبت به ضرب $\Diamond$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_2 = \{n \in A^{**} : \text{ نگاشت } m \to m \Diamond n \text{ ضعیف}^* - \text{ضعیف}^* \text{ پیوسته باشد } \}$$

بدیهی است که اگر A منظم‌پذیر آرنزی باشد، آنگاه $Z_1 = Z_2 = A^{**}$.

برای مطالعه بیشتر در زمینهٔ ضرب‌های آرنز و مرکزهای توپولوژیک خواننده می‌تواند به [۲۷] مراجعه نماید.

۳.۰ جبر باناخ گسترش مدولی

فرض کنید A یک جبر روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) و همچنین فرض کنید X یک فضای برداری روی همان میدان $\mathbb{F}$ درنظر گرفته شود. اگر نگاشتی چون $X \times A \to X$ که $(x, a) \to x \cdot a$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $a, b \in A$، $x, y \in X$، $\alpha \in \mathbb{F}$ شرایط زیر برقرار باشند، در آن‌صورت X یک **A-مدول راست** نامیده می‌شود:

(الف) $x \cdot (a + b) = x \cdot a + x \cdot b$ و $(x + y) \cdot a = x \cdot a + y \cdot a$؛

(ب) $x \cdot (ab) = (x \cdot a) \cdot b$ و $x \cdot (\alpha a) = \alpha(x \cdot a) = (\alpha x) \cdot a$.

یک **A-مدول چپ** به‌طریق مشابه قابل تعریف می‌باشد. همچنین هرگاه X هم A-مدول راست و هم A-مدول چپ باشد و برای هر $x \in X$ و $a, b \in A$ داشته باشیم

$$a \cdot (x \cdot b) = (a \cdot x) \cdot b,$$

آنگاه آن‌را یک **A-مدول** می‌نامند.

فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک فضای باناخ باشد، در این صورت X را یک **A-مدول راست باناخ** می‌نامند، هرگاه

(الف) X یک A-مدول راست باشد.

(ب) برای هر $a \in A$ و هر $x \in X$ داشته باشیم $\|x \cdot a\| \leq k\|x\| \, \|a\|$.

که در آن k یک عدد حقیقی مثبت ثابت است. A-مدول چپ باناخ و A-مدول باناخ به طریق مشابه قابل تعریف می‌باشند.

فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک A-مدول باناخ باشد. اگر برای هر $(a,x),(b,y) \in A\oplus X$ حاصل‌ضرب آنها را به‌صورت $(a,x)\cdot(b,y) = (ab, ay+xb)$ و نرم روی $A\oplus X$ را به‌صورت $\|(a,x)\| = \|a\|+\|x\|$ تعریف کنیم، آنگاه $A\oplus X$ مجهز شده با نرم و حاصل‌ضرب فوق تشکیل یک جبر باناخ می‌دهد که آن‌را جبر باناخ **گسترش مدولی** می‌نامند.

گزاره ۰.۳.۱. *اگر A یک جبر باناخ و X یک A-مدول باناخ باشد، آنگاه $(A\oplus X)^* = A^*\oplus X^*$، که در آن برای هر $(f,g)\in A^*\oplus X^*$ و هر $(a,x)\in A\oplus X$ داریم $(f,g)((a,x)) = f(a)+g(x)$ و $\|(f,g)\| = \max\{\|f\|,\|g\|\}$.*

برهان. به راحتی می‌توان حکم را اثبات نمود. □

لم ۰.۳.۲. *اگر A یک جبر باناخ و X یک A-مدول باناخ باشد، آنگاه X^{**} یک A^{**}-مدول باناخ است که در آن A^{**} مجهز به ضرب آرنز نوع اول شده باشد.*

برهان. اعمال مدولی A^{**} روی X^{**} با استفاده از ([۶]، صفحه ۲۷ و ۲۸) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

در ابتدا فرض کنید $x\in X$، $f\in X^*$، $\lambda\in X^{**}$ و $m\in A^{**}$. دراین‌صورت اعضای fx، λf از A^* و عضو mf از X^* را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle a,\lambda f\rangle = \langle fa,\lambda\rangle, \qquad \langle a, fx\rangle = \langle xa, f\rangle \qquad (a\in A),$$

$$\langle x, mf\rangle = \langle fx, m\rangle \qquad (x\in X).$$

سپس با فرض $\lambda \in X^{**}$ و $m \in A^{**}$، اعضای $m\lambda$ و λm از X^{**} را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle f, m\lambda\rangle = \langle \lambda f, m\rangle, \qquad \langle f, \lambda m\rangle = \langle mf, \lambda\rangle \qquad (f \in X^*).$$

حال باتوجه به اعمال فوق می‌توان خواص A^{**}-مدولی X^{**} را بررسی نمود. $\square$

گزاره زیر نشان می‌دهد که، دوگان دوم یک جبر باناخ گسترش مدولی، همراه با ضرب آرنز نوع اول، یک جبر باناخ گسترش مدولی می‌باشد.

گزاره ۳.۳.۰. *اگر A یک جبر باناخ و X یک A-مدول باناخ باشد، آنگاه به‌عنوان دو فضای باناخ، یکسانی $(A \oplus X)^{**} = A^{**} \oplus X^{**}$ برقرارمی‌باشد. همچنین اگر $\square$ ضرب آرنز نوع اول باشد، آنگاه برای هر $(m,\lambda),(n,\mu) \in (A \oplus X)^{**}$ داریم*

$$(m,\lambda)\,\square\,(n,\mu) = (m\,\square\,n, m\mu + \lambda n).$$

برهان. یکسانی دو فضای باناخ $(A \oplus X)^{**}$ و $A^{**} \oplus X^{**}$، با توجه به ([۶]، صفحه ۲۸) برقرار می‌باشد. فرض کنید $(n,\mu) \in A^{**} \oplus X^{**}$، $(g,f) \in (A \oplus X)^*$ و $(a,x) \in A \oplus X$. دراین‌صورت با استفاده از اعمال مدولی در لم ۲.۳.۰، می‌توان ثابت کرد که تساوی‌های زیر برقرار می‌باشند:

$$\begin{aligned}(g,f)\cdot(a,x) &= (ga + fx, fa),\\ (n,\mu)\cdot(g,f) &= (ng + \mu f, nf).\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $(m,\lambda) \in (A \oplus X)^{**}$،

$$\langle (m,\lambda)\,\square\,(n,\mu), (g,f)\rangle$$

$$= \langle (m,\lambda),(n,\mu)\cdot(g,f)\rangle = \langle (m,\lambda),(ng+\mu f, nf)\rangle$$

$$= \langle m, ng\rangle + \langle m,\mu f\rangle + \langle \lambda, nf\rangle = \langle m\,\Box\, n, g\rangle + \langle m\mu+\lambda n, f\rangle$$

$$= \langle (m\,\Box\, n, m\mu+\lambda n),(g,f)\rangle.$$

این نشان می‌دهد که $(m,\lambda)\,\Box\,(n,\mu) = (m\,\Box\, n, m\mu+\lambda n)$. $\square$

بعضی از خواص جبرهای باناخ گسترش مدولی در [۳۳] مورد بررسی قرار گرفته است.

۴.۰ جبر باناخ مثلثی

فرض کنید A و B دو جبر باناخ و X یک A-مدول چپ باناخ و یک B-مدول راست باناخ باشند به‌طوری‌که برای هر $a\in A$، $b\in B$ و $x\in X$ داشته باشیم $\|axb\|\leq \|a\|\,\|x\|\,\|b\|$. در این‌صورت **جبر باناخ مثلثی** متناظر با A، B و X با نماد τ نمایش داده می‌شود و عبارت است از مجموعه

$$\tau = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ \circ & b \end{pmatrix} : \ a\in A,\ x\in X,\ b\in B \right\},$$

به‌طوری‌که برای هر $\begin{pmatrix} a & x \\ \circ & b \end{pmatrix}\in\tau$ نرم تعریف شده روی τ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\left\| \begin{pmatrix} a & x \\ \circ & b \end{pmatrix} \right\| = \|a\| + \|x\| + \|b\|.$$

همچنین اعمال جبری τ همان اعمال جبری مربوط به ماتریس‌های ۲ $\times$ ۲ درنظر گرفته می‌شود. بعضی از خواص جبرهای باناخ مثلثی از جمله ضرب‌های آرنز روی τ^{**} در [۱۲] مورد مطالعه قرار گرفته است.

گزاره ۱.۴.۰. *هر جبر باناخ مثلثی را می‌توان به‌عنوان یک جبر باناخ گسترش مدولی درنظر گرفت، به‌عبارت دیگر کلاس جبرهای باناخ گسترش مدولی دربردارنده جبرهای باناخ مثلثی*

می‌باشد.

برهان. فرض کنید τ یک جبر باناخ مثلثی باشد. در این‌صورت نشان می‌دهیم که

$$\tau = (A \oplus_1 B) \oplus X,$$

که در آن X به‌عنوان یک $(A \oplus_1 B)$-مدول باناخ مطابق با اعمال مدولی زیر درنظر گرفته شده است. برای هر $(a,b) \in A\oplus_1 B$ و هر $x \in X$ تعریف کنید $x\cdot(a,b) = x\cdot b$ و $(a,b)\cdot x = a\cdot x$. به‌آسانی می‌توان نشان داد که X همراه با اعمال فوق یک $(A\oplus_1 B)$-مدول باناخ است. همچنین نگاشت $\theta : \tau \to (A \oplus_1 B) \oplus X$ که $\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix} \to ((a,b),x)$ یک یکسانی طولپا بین دو جبر باناخ τ و $(A \oplus_1 B) \oplus X$ تعریف می‌نماید. $\square$

۵.۰ فضای شاخص‌ها

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. دراین‌صورت هر همریختی ناصفر مانند $\varphi : A \to \mathbb{C}$ یک **شاخص** روی جبر A نامیده می‌شود. فضای شاخص‌های A مجموعه تمام شاخص‌های روی جبر A می‌باشد که آن‌را با $\Delta(A)$ نمایش می‌دهیم. همچنین هر شاخص کراندار می‌باشد.

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد و $A^\# = A \oplus \mathbb{C}$. برای هر (a,λ) و (b,μ) از $A^\#$ تعریف کنید $(a,\lambda)(b,\mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$. همچنین $\|(a,\lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$. در این‌صورت $A^\#$ همراه با ضرب و نرم تعریف شده در فوق تبدیل به یک جبر باناخ یکدار می‌شود. $A^\#$ **یکدار سازی** جبر A نامیده می‌شود به‌طوری‌که A یک ایده‌آل بسته از $A^\#$ می‌باشد.

گزاره ۱.۵.۰. *هر شاخص روی جبر باناخ A را می‌توان به‌طور منحصر به‌فرد به یک شاخص روی $A^\#$ توسیع داد.*

برهان. فرض کنید $\varphi \in \Delta(A)$. برای هر $(a,\lambda) \in A^{\#}$ نگاشت $\varphi_1 : A^{\#} \to \mathbb{C}$ را به‌صورت $\varphi_1((a,\lambda)) = \varphi(a) + \lambda$ تعریف کنید. در این‌صورت $\varphi_1 \in \Delta(A^{\#})$. حال فرض کنید φ_2 شاخص دیگری روی $A^{\#}$ باشد که توسیعی از φ است، در این‌صورت باتوجه به این‌که $\varphi_1((0,1)) = \varphi_2((0,1)) = 1$ داریم

$$\begin{aligned}\varphi_2((a,\lambda)) &= \varphi_2((a,0)) + \lambda\varphi_2((0,1)) = \varphi(a) + \lambda\\ &= \varphi_1((a,0)) + \lambda\varphi_1((0,1)) = \varphi_1((a,\lambda)).\end{aligned}$$

بنابراین $\varphi_1 = \varphi_2$. $\square$

گزاره ۰.۵.۲. *هر شاخص روی جبر باناخ A را می‌توان به یک شاخص روی جبر A^{**} توسیع داد.*

برهان. فرض کنید $\varphi \in \Delta(A)$ و برای هر $m \in A^{**}$ نگاشت $\tilde{\varphi} : A^{**} \to \mathbb{C}$ را به‌صورت $\tilde{\varphi}(m) = m(\varphi)$ تعریف کنید. حال اگر $m,n \in A^{**}$، آنگاه با استفاده از قضیه گلدشتاین تورهای کراندار $(a_\alpha)_\alpha$ و $(b_\beta)_\beta$ در A چنان موجودند که $a_\alpha \xrightarrow{w^*} m$ و $b_\beta \xrightarrow{w^*} n$. بنابراین

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(m \,\square\, n) = (m \,\square\, n)(\varphi) &= (w^* - \lim_\alpha w^* - \lim_\beta \widehat{a_\alpha b_\beta})(\varphi)\\ &= \lim_\alpha \lim_\beta \varphi(a_\alpha)\varphi(b_\beta)\\ &= (w^* - \lim_\alpha \hat{a}_\alpha)(\varphi)(w^* - \lim_\beta \hat{b}_\beta)(\varphi)\\ &= m(\varphi)n(\varphi) = \tilde{\varphi}(m)\tilde{\varphi}(n).\end{aligned}$$

لذا $\tilde{\varphi} \in \Delta(A^{**})$. لازم به ذکر است که برای هر $a \in A$ منظور از $\hat{a}$ همان تصویر متعارف a در A^{**} می‌باشد. $\square$

۶.۰ گروه توپولوژیک

گروه G مجهز شده به یک توپولوژی را یک **گروه توپولوژیک** می‌نامند هرگاه نگاشت‌های $G \times G \to G$ و $G \to G$ که به‌ترتیب به‌صورت $(x, y) \to xy$ و $x \to x^{-1}$ تعریف می‌شوند پیوسته باشند.

گزاره ۱.۶.۰. *اگر G یک گروه توپولوژیک باشد و dy یک اندازه هارچپ روی G درنظرگرفته شود، آنگاه با تعریف حاصل‌ضرب $f * g(x) = \int f(y)g(y^{-1}x)dy$ برای هر $f, g \in L^1(G)$، که به نام پیچش f و g معروف است و نرم، $\|f\| = \int |f(y)|dy$، $L^1(G)$ تبدیل به یک جبر باناخ می‌شود.*

۷.۰ عناصر خودتوان و ایده‌آل چپ مدولی

عنصر a از جبر A را **خودتوان** می‌نامند، هرگاه $a^2 = a$. مجموعه همه عناصر خودتوان جبر A را با نماد $J(A)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱.۷.۰. *اگر A یک جبر و برای هر $a, b \in J(A)$ رابطه $\leq$ به‌صورت*

$$a \leq b \;\Leftrightarrow\; ab = ba = a$$

تعریف شود، آنگاه $(J(A), \leq)$ یک رابطه مرتب جزئی است.

برهان. واضح است که برای هر $a \in J(A)$ رابطه $a \leq a$ برقرار می‌باشد. حال فرض کنید $a \leq b$ و $b \leq c$، در این‌صورت $ab = ba = a$ و $bc = cb = b$. بنابراین $cba = ca$ و $abc = ac$. چون $bc = cb = b$، داریم $ab = ac$ و $ba = ca$. پس $ac = ca = a$ و درنتیجه $a \leq c$.

اگر $b \leq a$ و $a \leq b$، آنگاه $a = ba = ab$ و $b = ab = ba$. در نتیجه $a = b$. لذا $\leq$ پادمتقارن است. $\square$

هر عنصر **کمین** مجموعه $J(A) - \{0\}$ یک خودتوان کمین نامیده می‌شود.

گزاره ۲.۷.۰. *عنصر غیر صفر $a \in A$ یک خودتوان کمین است اگر و فقط اگر $a = a^2$ و $aAa = \mathbb{C}a$ ([۴]، صفحه ۱۵۷ گزاره ۳).*

فرض کنید E زیرفضایی از جبر A باشد. عنصر $u \in A$ **یکه مدولی راست** برای E نامیده می‌شود، هرگاه $\{a - au: \ a \in A\} \subset E$.

فرض کنید I یک ایده‌آل چپ جبر A باشد. I را **ایده‌آل چپ مدولی** می‌نامند، هرگاه یک یکه مدولی راست برای I موجود باشد.

ایده‌آل چپ مدولی I را **بیشین** می‌نامند، هرگاه $I \neq A$ و همچنین I مشمول در ایده‌آل چپ مدولی محض دیگری نباشد.

گزاره ۳.۷.۰. *فرض کنید A یک جبر باشد. در این‌صورت*

(الف) هر ایده‌آل چپ مدولی محض A، مشمول در یک ایده‌آل چپ بیشین می‌باشد.

(ب) هر ایده‌آل چپ مدولی بیشین، یک ایده‌آل چپ بیشین است.

([۴]، صفحه ۴۶، گزاره ۲).

گزاره ۴.۷.۰. *اگر A یک جبر باشد، آنگاه رادیکال جیکوبسون A که با نماد $\mathrm{rad}(A)$ نمایش داده می‌شود، اشتراک تمام ایده‌آل‌های چپ مدولی بیشین می‌باشد ([۴]، صفحه ۱۲۴، گزاره ۱۴).*

جبر A را **نیم‌ساده** می‌نامند، هرگاه $\mathrm{rad}(A) = \{0\}$.