۱۳۸۰ /۱۲/ ۲۰

بسما...الرحمن الرحیم

خودکاری و رابطه آن با دنباله رودین ـ شاپی‌رو

توسط

سیدعبدالصاحب موسوی

پایان نامه

ارائه شده به دانشکده تحصیلات تکمیلی بعنوان بخشی ازفعالیت های

تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی‌ارشد

دررشته

ریاضی محض

016352

از

دانشگاه شیراز

شیراز، ایران

ارزیابی وتصویب شده توسط کمیته‌پایان نامه بادرجه: خیلی‌خوب

امضاء اعضاء کمیته پایان نامه:

محسن تقوی، دانشیار ریاضی (رئیس کمیته) ....

عبدالعزیز عبدالهی، استادیار ریاضی ....

بهرام خانی‌رباطی، استادیار ریاضی ....

حیدر زاهدزاهدانی، استادیار ریاضی ....

شهریورماه ۱۳۸۰

۳۹۶۸۰

تقدیم به:

پدر بزرگوارم، مادر مهربانم

و

همسر عزیزم

۳۹۶۸۰

سپاسگزاری

بدینوسیله از استادن معظم و دلسوز، آقای دکتر محسن تقوی و آقای دکتر عبدالعزیز عبدالهی که در طول مدت تحصیلات دانشگاهیم و همچنین در زمان تکمیل رساله، این حقیر را مورد بذل و الطاف بیدریغ خویش قرار داده‌اند و مرا در این مرحله هدایت و راهنمایی کرده‌اند کمال تشکر و سپاس فراوان دارم. همچنین از اعضای کمیته پایان‌نامه آقای دکتر حیدر زاهدزاهدانی و آقای دکتر بهرام خانی‌رباطی که زحمت خواندن پایان‌نامه را برعهده گرفتند و مرا از تذکرات سودمند خود بهره‌مند ساختند تشکر و قدردانی می‌نمایم. همچنین از خانم نیک‌منش و آقای عبدالی که در تهیه و تنظیم این مقاله همکاری فراوان داشتند کمال تشکر را دارم.

چکیده

خودکاری و رابطه آن با دنباله رودین ـ شاپی‌رو

توسط

سیدعبدالصاحب موسوی

دنباله گولی ـ رودین ـ شاپی‌رو به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{cases} a(0) = 1 \\ a(2n+1) = (-1)^n a(n) \\ a(2n) = a(n), \quad n \geq 0 \end{cases}$$

این مقاله در سه فصل تنظیم شده است.

در فصل اول مقدمه‌ای بر دنباله گولی ـ رودین ـ شاپی‌رو و محاسبات عددی از این دنباله را داریم.

در فصل دوم ثابت می‌کنیم دنباله $\{\frac{S(n)}{\sqrt{n}}\}_{n=1}^{\infty}$ با شرایط $(S(n) = \sum_{i=1}^{n}, n = 0, 1, 2, \ldots)$ که از روی دنباله ساخته می‌شود در بازهٔ $[\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{6}]$ چگال است و حدبالایی و حدپایینی از این دنباله را تعیین می‌کنیم و در مورد چندین تابع که از آن نتیجه می‌شود بحث می‌کنیم.

در فصل سوم دنباله‌های تعمیم یافته رودین ـ شاپی‌رو و خودکاری را بیان و بررسی می‌کنیم.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فصل اول

مقدمه‌ای بر دنباله گولی - رودین - شاپی‌رو[1]

در این فصل ابتدا تعاریف اولیه و محاسبات عددی از این دنباله بیان می‌شود و آنها را اثبات می‌کنیم. بیشتر آنالیزدانان هماهنگ بر این باورند که چندجمله‌ای رودین - شاپی‌رو (Rudin-Shapiro polynomials) در سال ۱۹۵۱ (1951, M.S. Thesis [14] of H. S. Shapiro) بوجود آمدند. این تا اندازه‌ای درست است. همان طوری که خواهیم دید چندجمله‌ای‌های شاپی‌رو به درستی به وسیله شاپی‌رو در حدود سال ۱۹۵۰ بوجود آمدند اما منبع مستقل دیگری بیان می‌کند که این چندجمله‌ای‌ها اثر گولی (Goly) در سال ۱۹۵۱_۱۹۴۹ روی (Infrared spectrometry) می‌باشد. باید با اشاره خیلی کوتاه از این (infrared spectrometry) شروع کنیم و سپس دربارهٔ موضوع مستقل مبدأ ریاضی (mathematical origin) مربوط به شاپی‌رو (Shapiro) بحث کنیم.

مارسل گولی (Marcel Goly) جفت‌های $(a_0, a_1, \ldots, a_d)$ و $(b_0, b_1, \ldots, b_d)$ را دنباله‌های تکمیلی نامتناسب تعریف کرد. تعریف گولی می‌تواند مانند $a_k = \pm 1$ و $b_k = \pm 1$ برای همه kها و دو چندجمله‌ای $A(z) = \sum_{k=0}^{d} a_k z^k$ و $B(z) = \sum_{k=0}^{d} b_k z^k$ که در رابطه زیر صدق می‌کند شکل بپذیرد

$$|A(e^{it})|^2 + |B(e^{it})|^2 = 2d + 2.$$

دنباله‌های گولی (Goly) بطور گسترده بوسیله مهندسین مطالعه شده است و جدیدترین تحقیق دربارهٔ این موضوع در سال ۱۹۹۱ بوسیله کرور (M. Kervaire) و ایلیاهو (S. Eliahou) و

[1] Goly-Rudin-Shapiro

سفری (B. Saffari) انجام شده است.

البته چندجمله‌ای‌های رودین-شاپی‌رو (Rudin-Shapiro) حالتهای خاصی از جفت چندجمله‌ایهای گولی $((A(z), B(z))$ هستند وبعضی از خواص آنها برای گولی شناخته شده بود. اما همه تحقیقاتی که گولی (Goly) و پیروانش انجام می‌دادند حالت ترکیب داشت. هیچ تحلیلی دربرگیرنده کارشان نمی‌شد و آنها (Shapiro and Followers) تا سال ۱۹۸۰ از موازی بودن شاخه‌های ریاضی ناآگاه بودند به همین روش M. Kervaire، S. Eliahou، B. Saffari قسمت عمده‌ای از کارهای ترکیبی را در سال ۱۹۸۴ تا ۱۹۸۷ کشف کردند و تنها در اگوست سال ۱۹۸۷ بود که متوجه کار گولی (Goly) و پیروانش شدند.

اصل ریاضی (Shapiro, 1950-1951, Rudin rediscover 1959)

این ریاضی (آنالیز) تاریخچه خیلی پیچیده‌ای دارد. در سال آکادمیک، ۱۹۴۹ تا ۱۹۵۰ هارلد شاپی‌رو (Harold Shapiro) و یک دانشجوی فارغ‌التحصیل (D. J. Newman) در M.I.T گفتگوهای بحث‌انگیزی با مریدان داشتند. این بحث دربارهٔ قضیه (Fejer-Riesz Theorem) روی چندجمله‌ایهای مثلثاتی نامنفی (non-negative trigonometric polynomials) بود که منجر به اثبات نتایج آنالیزی خیلی خوبی بر روی چندجمله‌ایها شد که آنها را جفت چندجمله‌ای رودین-شاپی‌رو (P_m, Q_m) می‌نامیم.

در سال آکادمیک ۱۹۵۰ تا ۱۹۵۱، در طول دورهٔ فارغ‌التحصیلی در M.I.T با شرکت شاپی‌رو (H. S. Shapiro) و نیومن (D. J. Newman) و پروفسور رافل سلم (Raphael Salem) چندجمله‌ایهای تک مدولی (unimodular polynomials) $P(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k z^k$ را در نظر گرفتند و ثابت کردند که قضایای قدیمی از برنستین (Bernstein, 1914) و هاردی لیتلود (Hardy-Littlewood, 1916) مثالهایی از چندجمله‌ایهای تک‌مدولی از هر درجه‌ای را مهیا

می‌کند با

$$\max_{0 \le t \le 2\pi} |P(e^{it})| \le c(N+1)^{\frac{1}{2}},$$

که c مقداری کاملاً ثابت است. سلم (Salem) متذکر شد که مسئله وجود P در مورد چندجمله‌ایهای ۱$\pm$ هنوز باز است.

در نتیجه آن شاپی‌رو (Shapiro) فوراً به سلم (Salem) گفت که چندجمله‌ای با ثابت $c = \sqrt{2}$ به مسئله فقط برای درجه‌ای به شکل $N = 2^m - 1$ جواب می‌دهد در قضیه‌های بعدی شاپی‌رو (Shapiro) نتیجه‌اش را برای همه درجه‌های N بسط داد اما به جای $c = \sqrt{2}$ ثابت کرد $c = 2 + \sqrt{2}$. (cf. Shapiro's M.S. Thesis [14], 1951)

در سال ۱۹۵۳ خلاصه کوتاهی از کار شاپی‌رو (Shapiro) بر روی مسئله سلم (Salem) روشن شد ولی متأسفانه شاپی‌رو (Shapiro) رساله دکترا را منتشر نکرد. [۱۵]

بنابراین در سالن ۱۹۵۸، شاپی‌رو همان مسئله را برای آنالیز فوریه به والتر رودین (Walter Rudin) پیشنهاد کرد و او راه حلی [۱۰] خیلی شبیه به ساختار شاپی‌رو تهیه کرد که مقدار ثابت $c = 2 + \sqrt{2}$ به دست آورد که از مقدار ثابت شاپی‌رو ضعیف‌تر است. و در سال ۱۹۵۱ والتر رودین (Walter Rudin) متوجه شد که جوابش کشف مجددی از نتایج شاپی‌رو است و آن را در [۱۰] با رضایت شاپی‌رو همراه با چند مسئله دیگر منتشر کرد.

در آوریل ۱۹۹۱ (April, 1991) مهمترین نتیجه‌ای که روی c انتشار یافت این است که $c = \sqrt{2}$، اما شاپی‌رو گمان کرد که این نتیجه خوشایند نیست. بهترین cی ممکن، به احتمال قوی $c < 1/4$ است.

اگر ما مسئله اکسترمال سلم (Salem's extermal problem) را روی چندجمله‌ایهای ۱$\pm$ اصلاح کنیم با قرارداد کردن این موضوع که چندجمله‌ای P جمع پسین چند سری توانی ثابت است که مقدار c به طور مؤثر تغییر می‌کند.

بهترین نتیجه شناخته شده $c = (۲ + \sqrt{۲})\sqrt{\frac{۳}{۵}} = ۲/۶۴۴۰۰۰$ و $c = \sqrt{۶} = ۲/۴۴۶۰۰۰$

است اما همچنین بهترین cی ممکن ناشناخته است.

۱.۱ تعریف دنباله گولی-رودین-شاپی‌رو[۲]

دنباله گولی-رودین-شاپی‌رو $\{a(n)\}_{n=۰}^{\infty}$ به صورت

$$\begin{cases} a(۰) = ۱ \\ a(۲n+۱) = (-۱)^n \quad a(n) \\ a(۲n) = a(n), \qquad n \geq ۰ \end{cases}$$

تعریف می‌شود.

۱.۱.۱: دنباله‌های $\{t(n)\}_{n=۰}^{\infty}$ و $\{S(n)\}_{n=۰}^{\infty}$ روی دنباله گولی-رودین-شاپی‌رو $\{a(n)\}_{n=۰}^{\infty}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$S(n) = \sum_{k=۰}^{n} a(k) \quad . \quad t(n) = \sum_{k=۰}^{n} (-۱)^k a(k)$$

بعضی از مقادیر این دنباله‌ها در جدول (۱.۱.۱) زیر نشان داده شده است.

با توجه به جدول زیر مقادیر دنباله $\{a(n)\}_{n=۱}^{\infty}$ همواره ۱- و ۱ می‌باشد و چون $a(۰) = ۱$،

بنابراین شرط لازم و کافی برای اینکه $S(n)$ زوج باشد آن است که n فرد باشد.

[۲] Goly-Rudin-Shapiro

n	$a(n)$	$t(n)$	$S(n)$	n	$a(n)$	$t(n)$	$S(n)$
۰	۱	۱	۱	۸	۱	۱	۵
۱	۱	۰	۲	۹	۱	۰	۶
۲	۱	۱	۳	۱۰	۱	۱	۷
۳	−۱	۲	۲	۱۱	−۱	۲	۶
۴	۱	۳	۳	۱۲	−۱	۱	۵
۵	۱	۲	۴	۱۳	−۱	۲	۴
۶	−۱	۱	۳	۱۴	۱	۳	۵
۷	۱	۰	۴	۱۵	−۱	۴	۴

جدول (۱.۱.۱)

۲.۱.۱ قضیه: اگر $\varepsilon_r = ۰$ یا ۱ و $k \geq ۰$ و $n = \sum_{r=۰}^{k} \varepsilon_r ۲^r$ باشد آنگاه

$$a(n) = (-۱)^{\sum_{r=۰}^{k-۱} \varepsilon_r \varepsilon_{r+۱}}$$

اثبات: با استفاده از استقراء روی k قضیه را ثابت می‌کنیم

برای $k = ۰$ داریم $n = \varepsilon_۰$ که در آن $\varepsilon_۱ = ۰$ و $\varepsilon_۰ = ۰$ یا ۱ بنابراین $\varepsilon_۰\varepsilon_۱ = ۰$ و همچنین $n = ۰$ یا $n = ۱$ و حکم درست می‌باشد

فرض کنیم $n = \sum_{r=۰}^{k+۱} \varepsilon_r ۲^r$ و قضیه برای مقدار k برقرار باشد.

اگر $\varepsilon_۰ = ۰$ آنگاه n زوج است و داریم

$$\begin{aligned} n &= \sum_{r=۱}^{k+۱} \varepsilon_r ۲^r = ۲\sum_{r=۱}^{k+۱} \varepsilon_r ۲^{r-۱} \\ \Longrightarrow a(n) &= a(۲\sum_{r=۱}^{k+۱} \varepsilon_r ۲^{r-۱}) \\ &= a(\sum_{r=۱}^{k+۱} \varepsilon_r ۲^{r-۱}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{\sum_{r=1}^{k} \varepsilon_r \varepsilon_{r+1}} = (-1)^{\sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r \varepsilon_{r+1}} \\
\Longrightarrow a(n) &= (-1)^{\sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r \varepsilon_{r+1}}.
\end{aligned}
$$

اگر $\varepsilon_0 = 1$ آنگاه n فرد است و داریم

$$
\begin{aligned}
n &= 1 + \sum_{r=1}^{k+1} \varepsilon_r 2^r = 1 + 2\sum_{r=1}^{k+1} \varepsilon_r 2^{r-1} \\
\Longrightarrow a(n) &= a(1 + 2\sum_{r=1}^{k+1} \varepsilon_r 2^{r-1}) = (-1)^{\sum_{r=1}^{k+1} \varepsilon_r 2^{r-1}} a(\sum_{r=1}^{k+1} \varepsilon_r 2^{r-1}) \\
&= (-1)^{\varepsilon_1} a(\sum_{r=1}^{k+1} \varepsilon_r 2^{r-1}) = (-1)^{\varepsilon_1}(-1)^{\sum_{r=1}^{k} \varepsilon_r \varepsilon_{r+1}} \\
&= (-1)^{\varepsilon_0 \varepsilon_1}(-1)^{\sum_{r=1}^{k} \varepsilon_r \varepsilon_{r+1}} = (-1)^{\sum_{k=0}^{k} \varepsilon_r \varepsilon_{r+1}} \\
\Longrightarrow a(n) &= (-1)^{\sum_{r=0}^{k} \varepsilon_r \varepsilon_{r+1}}.
\end{aligned}
$$

این قضیه بیان می‌دارد که هرگاه n در مبنای ۲ باشد می‌توان به‌راحتی مقدار $a(n)$ را محاسبه کرد.

۳.۱.۱ مثال: اگر $n = 115$ آنگاه $a(115)$ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$
115 = (1110011)_2 \Longrightarrow a(115) = (-1)^3 = -1
$$

۲.۱ خاصیت اکسترمال

چند جمله‌ای $p_N(z) = \sum_{n<N} \varepsilon_n Z^n$ را در نظر می‌گیریم که در آن به‌ازای هر عدد صحیح n و $\varepsilon_n \in \{-1, +1\}$ قرار می‌دهیم.

$$
||P_N||_\infty = \max_{|z|=1} |P_N(z)|
$$

یک محاسبه مستقیم به ما می‌دهد که

$$
||P_N||_\infty \geq \sqrt{N} = ||P_N||_2.
$$

۲.۱.۱ قضیه: دنباله‌ای مانند $\{\varepsilon_n\}$ وجود دارد با شرایط ۱ـ یا ۱ $= \varepsilon_n$ به طوری که

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n e^{in\theta}\right| < 5N^{1/2} = 5\sqrt{N} \quad (0 \leq \theta < 2\pi; N = 1, 2, 3, \cdots).$$

اثبات: قرار می‌دهیم $P_0(x) = Q_0(x) = x$ و چند جمله‌ایهای p_k و Q_k را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} p_{k+1}(x) = p_k(x) + x^{2^k} Q_k(x), \\ Q_{k+1}(x) = p_k(x) - x^{2^k} Q_k(x). \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

اگر $p_k(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n e^{in\theta}$ آنگاه به‌ازای هر عدد صحیح n و ۱ـ یا ۱ $= \varepsilon_n$ داریم:

$$||p_k||_\infty = \max_{|z|=1} |p_k(z)|$$

حال اگر $p_k(e^{i\theta})$ به‌صورت فوق تعریف شده باشد و $N = 2^k$ و p_k مجموع جزئی از p_{k+1} باشد آنگاه برای $|x| = 1$ داریم.

$$|p_{k+1}(x)|^2 + |Q_{k+1}(x)|^2 = |p_k(x) + x^{2^k} Q_k(x)|^2 + |p_k(x) - x^{2^k} Q_k(x)|^2$$

$$= 2|p_k(x)|^2 + 2|Q_k(x)|^2.$$

و از طرفی چون $|p_0(x)|^2 + |Q_0(x)|^2 = 2$ نتیجه می‌گیریم که:

$$|p_k(e^{i\theta})|^2 + |Q_k(e^{i\theta})|^2 = 2^{k+1}$$

آنگاه

$$|p_k(e^{i\theta})| \leq 2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{k}{2}}.$$

اگر $S_n(p_k)$ و $S_n(Q_k)$ مجموع جزئی مرتبه nام از p_k و Q_k باشند آنگاه برای هر $1 \leq n \leq 2^k$ داریم.

$$\left.\begin{matrix} |S_n(p_k)(e^{i\theta})| \\ |S_n(Q_k)(e^{i\theta})| \end{matrix}\right\} \leq (2 + 2^{1/2})2^{k/2} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

اگر $k = ۰$ باشد آنگاه درستی رابطه فوق واضح است و فرض کنیم رابطه برای هر k برقرار باشد و فرض کنیم $S_n(P_{k+۱})$ و $S_n(Q_{k+۱})$ برای هر $۱ \leq n \leq ۲^{k+۱}$ برقرار باشد اگر $n \leq ۲^k$ آنگاه

$$|S_n(p_{k+۱})| = |S_n(Q_{k+۱})| = |S_n(P_k)| < (۲ + ۲^{۱/۲})۲^{\frac{(k+۱)}{۲}}$$

اگر $۲^k \leq n \leq ۲^{k+۱}$ آنگاه

$$|S_n(P_{k+۱})| \leq |p_k| + |S_{n-۲}(Q_k)| \leq ۲^{\frac{(k+۱)}{۲}} + (۲ + ۲^{\frac{۱}{۲}})۲^{k/۲}$$

$$= (۲ + ۲^{\frac{۱}{۲}})۲^{\frac{k+۱}{۲}}.$$

و به همین ترتیب برای $|S_n(Q_{k+۱})|$ برقرارست

حال اگر $۲^{k-۱} \leq N \leq ۲^k$ آنگاه

$$|S_N(p_k)(e^{i\theta})| \leq (۲ + ۲^{\frac{۱}{۲}})۲^{\frac{k}{۲}} \leq ۲(۱ + ۲^{\frac{۱}{۲}})N^{۱/۲} < ۵N^{۱/۲}$$

۳.۱ محاسبات عددی و نتایج آن

۱.۲.۱ تعریف: $S(k)$ را $S-$ مقدار در نقطهٔ $n = k$ می‌گوییم. که k عددی حسابی است.

۱.۳.۱ تعریف: گوئیم دنباله $\{S(n)\}_{n=۱}^{\infty}$ در نقطهٔ $n_۰$، دارای ماکزیمم موضعی بر بازهٔ $I_k = [۴^k, ۴^{k+۱} - ۱]$ است هرگاه برای هر $n \in I_k$

$$S(n_۰) \geq S(n)$$

۲.۳.۱ اکسترمم‌های موضعی دنباله $\{a(n)\}_{n=۱}^{\infty}$

مقادیر $S(n)$ به‌ازای $n = ۰, ۱, ۲, \dots, ۶۳$ در جدول (۱.۲.۱) نشان داده شده است و اکسترمم‌های موضعی آن قابل مشاهده است به عنوان مثال ۳ـمقدار و ۲ـمقدار به ترتیب ماکزیمم و مینیمم موضعی در نقاط $n = ۲$ و $n = ۳$ می‌باشد.

n	$S(n)$	n	$S(n)$	n	$S(n)$	n	$S(n)$
۰	۱	۱۷	۶	۳۳	۱۰	۴۹	۱۰
۱	۲	۱۸	۷	۳۴	۱۱	۵۰	۹
۲	۳	۱۹	۶	۳۵	۱۰	۵۱	۱۰
۳	۲	۲۰	۷	۳۶	۱۱	۵۲	۹
۴	۳	۲۱	۸	۳۷	۱۲	۵۳	۸
۵	۴	۲۲	۷	۳۸	۱۱	۵۴	۹
۶	۳	۲۳	۸	۳۹	۱۲	۵۵	۸
۷	۴	۲۴	۷	۴۰	۱۳	۵۶	۹
۸	۵	۲۵	۶	۴۱	۱۴	۵۷	۱۰
۹	۶	۲۶	۵	۴۲	۱۵	۵۸	۱۱
۱۰	۷	۲۷	۶	۴۳	۱۴	۵۹	۱۰
۱۱	۶	۲۸	۷	۴۴	۱۳	۶۰	۹
۱۲	۵	۲۹	۸	۴۵	۱۲	۶۱	۸
۱۳	۴	۳۰	۷	۴۶	۱۳	۶۲	۹
۱۴	۵	۳۱	۸	۴۷	۱۲	۶۳	۸
۱۵	۴	۳۲	۹	۴۸	۱۱		
۱۶	۵						

جدول (۱.۲.۱)

۴.۱ محاسبات عددی

با توجه به جدول (۱.۲.۱) در فصل اول مشاهده می‌شود که ۳ـمقدار، ۷ـمقدار و ۱۵ـمقدار،

ماکزیممهای موضعی به ترتیب در نقاط ۲، ۱۰ و ۴۲ هستند و همچنین ۳_مقدار و ۵_مقدار مینیمم‌های موضعی به ترتیب در نقاط ۶ و ۲۶ می‌باشند.

قرار می‌دهیم:

$$M_0 = 2,\ \ M_1 = 10,\ \ M_2 = 42,\ \ m_1 = 6,\ \ m_2 = 26$$

با در نظر گرفتن s_مقدارهای ماکزیمم و مینیمم این نقاط و n_مقدارهای متناظر با آنها و چند نقطه دیگر ۳۱، ۶۳، ۱۲۷، ۹، ۱۷، ۲۳ به ترتیب متناظر با n_مقدارهای $M_3 = 170$، $M_4 = 682$، $M_5 = 2730$، $m_3 = 106$ و $m_5 = 1706$ انتظار می‌رود که داشته باشیم:

:۱.۴.۱

$$\begin{cases} M_{k+1} = 4M_k + 2, & M_0 = 2 \\ S(M_k) = 2^{k+2} - 1, & k \geq 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} m_{k+1} = 4m_k + 2, & m_1 = 6 \\ S(m_k) = 2^k + 1, & k \geq 1 \end{cases}$$

از محاسبات بیان شده می‌توان دریافت:

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{2(2^2-1)}{3},\ M_1 = \frac{2(2^{2+2}-1)}{3},\ M_2 = \frac{2(2^{2.2+2}-1)}{3}, \\ M_3 &= \frac{2(2^{3.2+2}-1)}{3},\ \ldots,\ M_k = \frac{2(2^{2k+2}-1)}{3},\ldots \\ m_1 &= \frac{(5.4^1-2)}{3},\ m_2 = \frac{(5.4^2-2)}{3}, \\ m_3 &= \frac{(5.4)^3-2)}{3},\ \ldots,\ m_k = \frac{(5.4^k-2)}{3},\ldots \end{aligned}$$

اثبات: اثبات به استقراء روی n

$$\begin{cases} m_{n+1} = 4m_n + 2 & m_1 = 6 \\ m_n = \frac{5(4^n)-2}{3} & (n \geq 1) \end{cases}$$

دنباله بازگشتی $m_{n+1} = 4m_n + 2$ با شرط $m_1 = 6$ تعریف شده است ثابت می‌کنیم

$$m_n = \frac{5(4^n)-2}{3}$$