دانشگاه تربيت معلم

دانشكده علوم – گروه فيزيك

پايان نامه كارشناسي ارشد رشته فيزيك (گرايش اتمي مولكولي)

عنوان :

محاسبه نظري و بررسي ساختار باند فوتوني در يك بلور فوتونيكي دو بعدي ناهمسانگرد

تدوين

ندا يزداني

استاد راهنما :

محمد حسين مجلس آرا

شهريور ۱۳۸۸

چکیده :

در این پایان نامه ابتدا به معرفی بلورهای فوتونیکی به عنوان ساختاری که انقلابی در کنترل نور به پا کرده است می پردازیم. سپس اصول ریاضی حاکم بر آن را بررسی می کنیم. در ادامه نقص هایی که می توان در این نوع بلورها ایجاد کرد را نشان می دهیم. با ایجاد نقص در این بلورها می توان کار جایگزیده کردن نور یا هدایت انرژی نورانی، در مسیر خاصی و با فرکانس های خاصی را انجام داد. یکی از انواع نقص ها که قابلیت استفاده از بلور فوتونیکی به عنوان یک موج بر را ایجاد می کند، $CROW$، $(Coupled\ Resonator\ Optical\ Waveguide)$ را به صورت مفصل تری مورد بحث قرار می دهیم و در پایان از جفت شدگی دو $CROW$ که نمودار پاشندگی آنها نسبت به هم شیب کاملا عکس دارد استفاده کرده و با استفاده از مدوله سازی ضرایب شکست، ساختاری برای وارونه کردن زمانی پالس ورودی طراحی می کنیم. همین طور به معرفی و بحث مختصری راجع به روش دیفرانسیل های محدود در حوزه ی زمان، $(FDTD)\ finite-difference\ time-domain$، می پردازیم و کدی را که مورد استفاده قرار داده ایم معرفی می کنیم.

فهرست مطالب

فصل اول- مقدمه

۱-۱ کنترل خواص مواد ۱

۱-۲ بلورهای فوتونیکی ۲

فصل دوم- الکترومغناطیس در محیط هایی با ترکیبی از چند دی الکتریک

۲-۱ معادلات ماکروسکوپیک ماکسول ۷

۲-۲ مسئله ی ویژه مقداری در الکترومغناطیس ۱٤

۲-۳ خواص عمومی مدها ۱۷

۲-٤ میدان مغناطیسی در مقابل میدان الکتریکی ۲۰

۲-۵ خواص مقیاس بندی معادلات ماکسول ۲۲

۲-٦ مقایسه الکترودینامیک و مکانیک کوانتومی ۲۵

فصل سوم- تقارن ها و حالت جامد در الکترومغناطیس

۳-۱ استفاده از تقارن ها برای دسته بندی کردن مدهای الکترومغناطیسی ۲۸

۳-۲ تقارن انتقالی پیوسته ۳۳

۳-۳ ضریب هدایت ۳۹
۳-٤ تقارن انتقالی گسسته ٤۲
۳-٥ ساختارهای نواری فوتونیکی ٤۷
۳-٦ تقارن دورانی ومنطقه ی بریلوئن کاهش ناپذیر ٤۸
۳-۷ ناوردایی وارونی زمان ٥۱
۳-۸ مقایسه دوباره الکترودینامیک و کوانتوم مکانیک..... ٥۳

فصل چهارم- بلورهای فوتونیکی

٤-۱ بلورهای فوتونیکی یک بعدی ٥٥
٤-۲ مدهای ناپایدار در گاف بلور فوتونیکی ٥۷
٤-۳ بلورهای فوتونیکی دو بعدی ٦۰

فصل پنجم- معرفی نقص در بلورهای فوتونیکی و موج بر کاواک های کوپل شده

٥-۱ نقص در بلورهای فوتونیکی ٦۲
٥-۲ حالت غیر تبهگن ٦۸
٥-۳ حالت تبهگن ۷۱

فصل ششم- محاسبات و نتیجه گیری

٦-١ محاسبه ساختار باندی $CROW$ با کد $MATLAB$ ٧٤

٦-٢ توضیحاتی در مورد روش دیفرانسیل محدود در حوزه ی زمان $FDTD$ ٨٠

٦- ٣ شرایط مرزی ٩٠

٦-٤ عملیات وارونگی زمانی نور با اپتیک خطی و مدوله کننده ها با استفاده از کوپل شدگی دو $CROW$ ٩٤

نتایج ١٠٦

پیوست ١٠٨

فصل اول

مقدمه

۱_۱ _ کنترل خواص مواد

بسیاری از پیشرفت های ما در فناوری، نتیجه شناخت عمیق ما از خصوصیات مواد بوده است. گذار نیاکان ما از عصر سنگی به عصر آهن تا حد زیادی داستانی از افزایش شناخت بشر از فواید مواد طبیعی است.

انسان های ماقبل تاریخ ابزارهایی را بر پایه شناختشان از مقاومت سنگ و سختی آهن می ساختند.در هر دومورد، نوع بشر آموخته بود که موادی را از زمین استخراج کند که خواص ثابت در آنها سودمند بود. سرانجام مهندسین با ترکیب مواد موجود، موادی را تولید کردند که خواص مطلوب بیشتری داشتند. در واقع آنها یاد گرفتند که کارهای بیشتری از کارهایی که فقط با مواد خام موجود در زمین انجام می شود، انجام دهند.

امروزه ما مجموعه کاملی از مواد مصنوعی با خواص مکانیکی زیاد در اختیار داریم که آنها را مدیون پیشرفت ها در متالورژی، سرامیک و پلاستیک هستیم.

در این قرن کنترل ما بر روی مواد گسترش یافته و شامل خواص الکتریکی مواد نیز شده است. پیشرفت ها در فیزیک نیمه رسانا به ما اجازه کنترل خواص رسانایی برخی مواد را می دهد و بدین ترتیب انقلاب ترانزیستور در الکترونیک آغاز شد. تاثیر پیشرفت ها در این زمینه

بر زندگی ما غیرقابل انکار است. با سرامیک ها و آلیاژهای جدید، ابررساناهای دمای بالا ومواد دیگری اختراع شده اند که ممکن است پایه فناوری های آینده را شکل دهند.

در دهه های اخیر چشم انداز جدیدی باز شده است. در این مورد هدف کنترل خواص اپتیکی است. اگر بتوانیم موادی را طراحی کنیم که به امواج نوری در بازه فرکانس های خاصی پاسخ دهند، مثلا بازتاب کامل امواج نوری در فرکانس های خاصی، یا اجازه انتشار در جهت و فرکانس خاصی و یا جایگزیده کردن نور در یک فضای خاص، پیشرفت های زیادی ممکن خواهد شد. قبلا کابل های فیبر نوری که به سادگی نور را هدایت می کنند انقلابی در صنعت ارتباطات برپا کرده اند. طراحی لیزر، محاسبات با سرعت بالا و اسپکتروسکوپی تنها بخش کوچکی از دستاوردهای پیشرفت روی مواد اپتیکی می باشد.

۱_۲_ بلورهای فوتونیکی

می خواهیم بررسی کنیم که چه موادی برای کنترل ما بر انتشار نور به کار می ایند؟

برای پاسخ به این سوال مقایسه ای انجام می دهیم با مواد الکترونیکی که آنها را بهتر می شناسیم. یک شبکه بلور الگویی است که در آن اتم ها و یا مولکول ها به صورت تناوبی قرار دارند. بنابراین بلور، یک پتانسیل دوره ای برای الکترونی که می خواهد در میان آن حرکت کند از خود نشان میدهد. هم اجزاء سازنده بلور و هم هندسه شبکه خصوصیات هدایت را مشخص می کنند.

همواره این سوال مطرح بوده است که چرا الکترون ها درون یک بلور رسانا شبیه به ذرات گاز آزاد پخش می شوند؟ و چگونه از پراکنده شدن به وسیله اجزاء سازنده بلور اجتناب می کنند؟

پاسخ کوانتوم مکانیک به این سوال این است که الکترون ها به صورت امواج منتشر می شوند و امواج تحت شرایط خاصی بدون پراکندگی در طول یک پتانسیل، منتقل می شوند.(البته آنها به وسیله نقص ها پراکنده می شوند.) در هر صورت شبکه می تواند مانع انتشار امواج خاصی شود.

ممکن است در ساختار باند انرژی بلور گاف وجود داشته باشد، به این معنی که الکترون ها از انتشار در جهت خاصی با انرژی خاصی منع شوند. اگر پتانسیل شبکه به اندازه کافی قوی باشد، گاف می تواند به همه ی جهت های ممکن گسترش یابد و در نتیجه یک گاف نواری کامل داریم. برای مثال در نیمه رساناها یک گاف کامل بین باند هدایت و باند ظرفیت وجود دارد. نظیر اپتیکی بلورهای الکتریکی که الکترون ها درون آنها منتشر می شوند، بلورهای فوتونیکی هستند. در بلورهای فوتونیکی اتم ها و مولکول ها به وسیله ی دی الکتریک هایی با ضرایب شکست مختلف جایگزین می شوند. در چنین بلورهایی پتانسیل های تناوبی با تابع دی الکتریک تناوبی (یا به طور معادل، ضریب شکست تناوبی) جایگزین می شوند.اگر ثابت های دی الکتریک مواد در بلور فوتونیکی به اندازه کافی با هم فرق داشته باشند و جذب نورهم توسط مواد حداقل باشد،شکست و بازتابش نور از مرزها (فصول مشترک) می تواند پدیده های زیادی برای فوتون ها مشابه با الکترون ها در پتانسیل های متناوب ایجاد کند.

بنابراین یکی از راه های کنترل نور، بلور فوتونیکی است. ما می توانیم بلورهای فوتونیکی طراحی کنیم که دارای گاف نواری فوتونیکی باشند و بنابراین جلوی انتشار نور با فرکانس خاصی و در جهات خاصی را بگیرند. همین طور می توانیم بلورهای فوتونیکی طراحی کنیم که بتوانند نور را تنها در جهات خاصی ازخود عبور دهند.

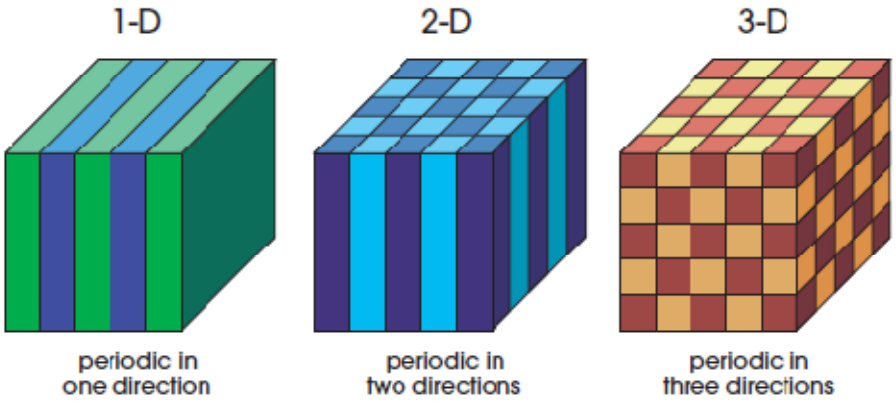
موج برها و کاواک های فلزی به طور گسترده ای در کنترل انتشار میکروموج ها مورد استفاده قرار می گیرند. دیواره های کاواک فلزی اجازه انتشار موج الکترومغناطیسی را زیر یک فرکانس آستانه نمی دهند اما موجبر فلزی موج را تنها در طول محورش عبور می دهد[۱]. اگر توانایی کنترل انتشار امواج با فرکانس های بالاتراز میکروموج ها مثلا نور مرئی را داشته باشیم بسیار مفید خواهد بود اما می دانیم که انرژی نور مرئی به سرعت در طول اجزاء فلز تلف می شود بنابراین از روش های فوق نمی توان به طورعمومی برای کنترل انتشار امواج با فرکانس های بالاتراز میکروموج استفاده کرد. بلورهای فوتونیکی نه تنها خواص مفید موج برها و کاواک ها را دارند بلکه می توانند در بازه های فرکانسی گسترده ای به کار برده شوند. ما می توانیم یک بلور فوتونیکی با هندسه ای در ابعاد میلی متر برای کنترل میکروموج ها یا با ابعاد میکرون برای کنترل امواج مادون قرمز بسازیم.

همچنین آینه های دی الکتریکی که تشکیل شده اند از لایه های دی الکتریکی متفاوت یکی دیگر از وسایل اپتیکی است که استفاده زیادی از آن می شود. نور با طول موج مناسب وقتی به چنین ساختارهایی برخورد می کند به طور کامل بازتاب پیدا می کند. به این دلیل که موج در سطح هر لایه تا حد زیادی بازتاب پیدا می کند و اگر فضا تناوبی باشد بازتاب های

چندگانه به طور مخرب برهم نهی می کنند و این باعث حذف موج منتشر شونده می شود. این اثر شناخته شده که اولین بار توسط Lord Rayleight در سال۱۸۸۷ توضیح داده شد[۲]، اساس کار بسیاری از ابزارهای اپتیکی از قبیل آینه های دی الکتریک و فیلترهای دی الکتریک فابری-پرو است.

بلورهای فوتونیکی کم اتلافی که به طور دوره ای در یک بعد قرار داده شده اند بلورهای فوتونیکی یک بعدی را تشکیل می دهند. اگرچه این آینه ها استفاده زیادی دارند اما فقط نوری را منعکس می کنند که در راستای عمود یا نزدیک به عمود روی لایه های این ساختار فرود آید. اگر بلور فوتونیکی برای بعضی از فرکانس ها جلوی انتشار نور با هر قطبشی و در هر جهتی را بگیرد یا به عبارت دیگر منعکس کند، می گوییم بلور فوتونیکی دارای گاف نواری کامل فوتونیکی است. یک بلور فوتونیکی یک بعدی نمی تواند دارای گاف نواری کامل فوتونیکی باشد. برای ایجاد یک ساختار با گاف نواری کامل فوتونیکی باید دی الکتریک ها را در شبکه طوری قرار دهیم که در امتداد سه محور تناوب داشته باشند که این همان بلور فوتونیکی سه بعدی است [۳۰] .

یک مثال ساده از بلورهای فوتونیکی یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی در شکل زیر آمده است.



(۱ – ۱) مثال های ساده از بلورهای فوتونیکی یک، دو و سه بعدی. رنگ های مختلف نشان دهنده مواد با ثابت های دی الکتریک متفاوتند. یک بلور فوتونیکی، ساختار متناوبی از ماده دی الکتریک در طول یک، دو و یا سه محور می باشد.

فصل دوم

الکترومغناطیس در محیط هایی با ترکیبی از چند دی الکتریک

برای بررسی انتشار نوردر یک بلور فوتونیکی، معادلات ماکسول را در محیطی با ترکیبی از دی الکتریک ها بررسی می کنیم. در اینجا معادلات ماکسول به یک مساله ویژه مقداری هرمیتی خطی تبدیل می شود. این کار در الکترومغناطیس بسیار شبیه به معادله شرودینگر درمکانیک کوانتوم است و این به ما اجازه می دهد تا از نتایج مفید کوانتوم مکانیک نظیر تعامد مدها، تئوری وردشی و نظریه اختلال استفاده کنیم.

۲-۱- معادلات ماکروسکوپیک ماکسول

بر همه ی پدیده های ماکروسکوپیک الکترومغناطیس و از آن جمله انتشار نور در یک بلور فوتونیکی چهارمعادله ی ماکروسکوپیک ماکسول حاکم هستند[۳]:

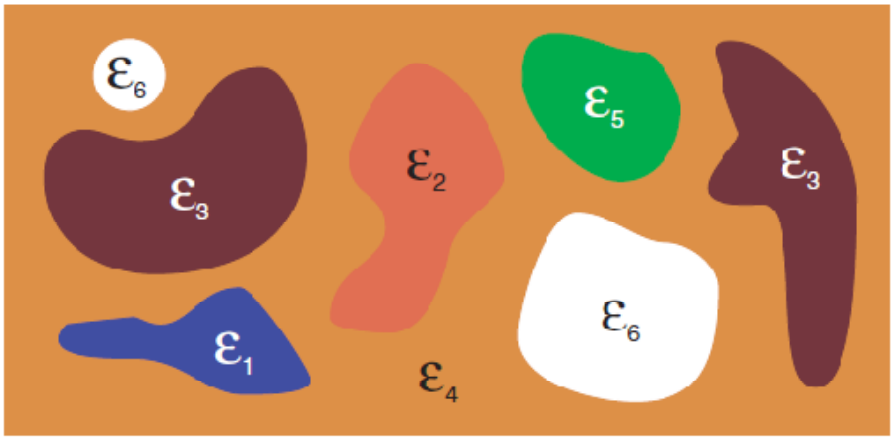
$$\nabla . \boldsymbol{B} = ۰ \qquad\qquad \nabla . \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = J + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (۱-۲)$$

$\boldsymbol{H}$ و $\boldsymbol{E}$ به ترتیب میدان های الکتریکی و مغناطیسی و $\boldsymbol{D}$ و $\boldsymbol{B}$ به ترتیب جابه جایی الکتریکی و القای مغناطیسی (چگالی میدان مغناطیسی) می باشند. همینطور ρ و J بارها و جریان های آزاد هستند.

مسئله مورد بررسی ما محیطی است با ترکیبی از چند دی الکتریک همسانگرد که البته لزوما به صورت دوره ای قرار نگرفته اند. همچنین محیط فاقد بار و جریان آزاد می باشد چون هیچ منبع بار یا جریان درون محیط قرار داده نشده است.

$$J = \rho = ۰$$



(۲ − ۱) – ترکیبی از نواحی ماکروسکوپیک شامل دی الکتریک های همگن. هیچ بار یا جریانی در محیط وجود ندارد.به طور کلی در معادله ی (۲ − ۱) ، $\varepsilon(\mathbf{r})$ می تواند دارای هر نوع وابستگی مکانی باشد. اما در این جا به مواد دی الکتریک همگن می پردازیم.

ساختار فوق تابعی از بردار مکان r می باشد.

رابطه ی بین $\boldsymbol{D}$ و $\boldsymbol{E}$ و همچنین $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{H}$ را می نویسیم :

نکته این که به صورت کاملا کلی مؤلفه های D_{i} را به جای میدان $\boldsymbol{D}$ و مؤلفه های E_{i} را به جای میدان $\boldsymbol{E}$ قرار می دهیم :

$$\frac{D_i}{\varepsilon_{\cdot}} = \sum_{\mathrm{j}} \varepsilon_{\mathrm{ij}}\, \mathrm{E_j} + \sum_{\mathrm{j,k}} \chi_{\mathrm{ijk}}\, \mathrm{E_j E_k} + \mathrm{O(E^{\text{٣}})} + \cdots \qquad (٢\text{-}٢)$$

در رابطه فوق $\varepsilon_{\cdot} \approx ٨.٨٥٤ \times ١٠^{-١٢}\, \frac{Farad}{m}$ گذردهی الکتریکی خلا می باشد.

این رابطه کمی پیچیده است اما برای اکثر مواد دی الکتریک می توان از تقریب های زیر استفاده کرد :

تقریب اول- فرض می کنیم شدت میدان به اندازه کافی کوچک است که بتوان در ناحیه خطی کار کرد.

بنابراین از χ_{ijk} (ومرتبه های بالاتر) می توان چشم پوشی کرد.

تقریب دوم- فرض می کنیم که ماده همسانگرد است بنابراین $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)$ و $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},\omega)$ با ضرب $\varepsilon_{\cdot}$ در یک تابع دی الکتریک اسکالر $\varepsilon(\boldsymbol{r},\omega)$ که گذردهی نسبی نامیده می شود به هم مربوط می شوند.

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},\omega) = \varepsilon_{\cdot}\varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)$$

تقریب سوم- در فرکانس هایی کار می کنیم که در آنها ε (ثابت دی الکتریک) به فرکانس وابسته نباشد. یعنی به جای $\varepsilon(\boldsymbol{r},\omega)$ داریم $\varepsilon(\boldsymbol{r})$.

تقریب چهارم- روی مواد بدون اتلاف متمرکز می شویم به این معنی که $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ مربوط به یک ماده، حقیقی و مثبت در نظر گرفته می شود.

حال با توجه به تقریب های فوق (که در اغلب اوقات صحیح است) داریم :

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_{\cdot}\varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \qquad (۳-۲)$$

و معادله مشابه ای برای $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_{\cdot}\mu(\boldsymbol{r})\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \qquad (٤-۲)$$

در رابطه فوق $\mu_{\cdot} = ٤\pi \times ۱۰^{-۱۷}\ \frac{\text{Henry}}{\text{m}}$ ،که گذردهی مغناطیسی خلا می باشد.

برای اکثر مواد دی الکتریک که با آنها کار می کنیم گذردهی نسبی مغناطیسی یعنی $\mu(\boldsymbol{r})$ بسیار نزدیک به یک می باشد. بنابراین رابطه $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ به صورت $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_{\cdot}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ درمی آید.

همچنین برای ضریب شکست در یک محیط داریم :

$$n = \sqrt{\mu\varepsilon} \underset{\mu\cong ۱}{\longrightarrow} \quad n = \sqrt{\varepsilon}$$

حال با توجه به فرض های موجود، چهار معادله ماکسول را بازنویسی می کنیم :

$$\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = ۰$$

$$\boldsymbol{\nabla}.\big(\varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\big) = ۰$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon_{\cdot}\varepsilon(\boldsymbol{r})\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \qquad (۵-۲)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\mu_{\cdot} \frac{\partial \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

به طور منطقی این سوال پیش می آید که آیا ما با محدود کردن خودمان به مواد خطی و بدون اتلاف، بعضی از پدیده های فیزیکی را از دست نخواهیم داد؟

این یک حقیقت قابل توجه است که بسیاری از خواص جالب و مفید، از موارد ساده ی مواد بدون اتلاف وخطی ناشی می شوند. به علاوه تئوری این گونه مواد برای کارها و تحقیقات عملی بسیار ساده تر و قابل فهم تر است و پایه دقیق و خوبی برای ساختن مواد پیچیده تر بنا می شود. ما در این پایان نامه توجه خود را روی مواد بی اتلاف و خطی معطوف می کنیم.

در حالت کلی $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{H}$ هر دو توابع پیچیده ای از زمان و مکان هستند. به دلیل خطی بودن معادلات ماکسول ما می توانیم وابستگی زمانی و مکانی را از هم جدا کنیم.قسمت زمانی را به صورت یک تابع هماهنگ در نظر می گیریم و می دانیم که مشکلی ایجاد نمی کند زیرا با توجه به آنالیز فوریه هر تابعی را می توان برحسب توابع هماهنگ نوشت[٤] .

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t} \qquad (٦-٢)$$

حال دو رابطه فوق را در معادلات ماکسول جاگذاری می کنیم:

$$\rho = J = ٠$$

۱) $\nabla . \boldsymbol{D} = ۰ \longrightarrow \quad \nabla . [\varepsilon_۰ \varepsilon(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})] = ۰ \longrightarrow \quad \nabla . [\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})] = ۰$

۲) $\nabla . \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = ۰ \longrightarrow \quad \nabla . \mu_۰ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = ۰ \longrightarrow \quad \nabla . \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = ۰$

دو معادله فوق نشان می دهد که شکل موج الکترومغناطیسی عرضی است. یعنی اگر یک موج تخت به صورت $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = a e^{i \boldsymbol{k} . \boldsymbol{r}}$ در نظر بگیریم، با توجه به معادله $\nabla . \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = ۰$ داریم:

$$\nabla . \left[\boldsymbol{a} e^{i \boldsymbol{k} . \boldsymbol{r}} \right] = ۰ \longrightarrow \quad \boldsymbol{a} . \boldsymbol{k} = ۰$$

و این یعنی راستای ارتعاش و انتشار بر هم عمودند و بنابراین موج عرضی است.

حال روی دو معادله دیگر متمرکز می شویم:

از معادله $(۲ - ۵)$ داریم :

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\mu_۰ \frac{\partial \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon_۰ \varepsilon(\boldsymbol{r}) \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \end{cases}$$

حال $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = e^{-i \omega t} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ و $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = e^{-i \omega t} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ را در معادله فوق قرار می دهیم:

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - i \omega \mu_۰ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = ۰ \qquad (۷-۲-۱)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) + i \omega \varepsilon_۰ \varepsilon(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = ۰ \qquad (۷-۲-۲)$$

معادله $(۲ - ۲ - ۷)$ را به صورت زیر می نویسیم :

$$\frac{1}{\varepsilon(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})+i\omega\varepsilon_{0}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=0$$

حال از معادله فوق کرل می گیریم :

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left[\frac{1}{\varepsilon(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\right]+i\omega\varepsilon_{0}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=0 \qquad (2-2-3)$$

حال معادله فوق را در $(2-2-1)$ جاگذاری می کنیم :

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left[\frac{1}{\varepsilon(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\right]=\frac{\omega^{2}}{c^{2}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \qquad (2-8)$$

معادله فوق معادله اصلی برای کار ماست. با معادله فوق و معادله $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{H}=0$ ، $\boldsymbol{H}$ به طور کامل مشخص می شود.

پس برای یک ساختار با $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ مشخص، ابتدا معادله $(2-8)$ را حل کرده و $\boldsymbol{H}$ را پیدا می کنیم. سپس با کمک معادله $(2-2-7)$ ، $\boldsymbol{E}$ را پیدا می کنیم.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{i}{\omega_{0}\varepsilon_{0}\varepsilon(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \qquad (2-9)$$

باید توجه شود که رابطه فوق در $\boldsymbol{\nabla}.[\varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})]=0$ صدق می کند زیرا دیورژانس هر کرلی صفر است.

۲-۲-مسئله ویژه مقدا ری در الکترومغناطیس

معادلات ماکسول برای یک مد هماهنگ در یک محیط با ترکیبی از دی الکتریک ها برای $\boldsymbol{H}$ به صورت $\boldsymbol{\nabla} \times \left[\frac{۱}{\varepsilon(\boldsymbol{r})} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\right] = \frac{\omega^{۲}}{c^{۲}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ درآمد.

همانطور که می بینیم معادله فوق یک معادله ویژه مقداری است.در واقع یک سری عملگر پیاپی روی $\boldsymbol{H}$ اثر می کنند. اگر عملگر $\hat{\theta}$ را به صورت $\widehat{\theta} = \boldsymbol{\nabla} \times \left[\frac{۱}{\varepsilon(\boldsymbol{r})} \boldsymbol{\nabla} \times\right]$ تعریف کنیم آنگاه می بینیم که :

$$\hat{\theta} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{\omega^{۲}}{c^{۲}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \qquad (۱۱ - ۲)$$

در واقع $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ ویژه بردارهای عملگر و $\frac{\omega^{۲}}{c^{۲}}$ ویژه مقدار عملگر θ می باشد که $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ الگوی میدان است و ω فرکانس مربوط به این الگوی میدان.

نکته قابل توجه این است که $\hat{\theta}$ یک عملگر خطی است و بنابراین ترکیب خطی جواب ها خود یک جواب مسئله است. بنابراین اگر مثلا $\boldsymbol{H}_{۱}$ و $\boldsymbol{H}_{۲}$جواب های مسئله باشند (هردو با فرکانس ω) ،آنگاه $\alpha \boldsymbol{H}_{۱}(\boldsymbol{r}) + \beta \boldsymbol{H}_{۲}(\boldsymbol{r})$ نیز جواب مسئله است.(β و α مقادیر ثابت هستند.) به عنوان مثال اگر یک مد معینی داشته باشیم می توانیم مدهای مجاز دیگری با همان فرکانس مثلا با دوبرابر کردن شدت میدان $(\beta = ۰ , \alpha = ۲)$ بسازیم. به این ترتیب میدان هایی با فرکانس مشابه که تنها در ضرایبشان با هم متفاوتند می توانند مدهای مشابه ای بسازند. رابطه $(۲ - ۸)$ یادآور معادله شرودینگر در مکانیک کوانتومی [۵,۶] است که در آن عملگر هامیلتونین روی تابع موج اثر می کرد.

برخی از خصوصیات اصلی ویژه توابع هامیلتونین به قرار زیر است :

۱- ویژه توابع راست هنجارند. ۲_ ویژه مقادیر حقیقی اند.

چنین خصوصیات مفیدی در فرمول بندی الکترومغناطیس هم وجود دارد. این خصوصیات چه در کوانتوم مکانیک وچه در فرمول بندی که در الکترومغناطیس به کار گرفتیم، براین حقیقت دلالت دارند که عملگر اصلی نوع خاصی از عملگرهای خطی است که به آن عملگر هرمیتی گفته می شود.

در اینجا می خواهیم نشان دهیم که منظور از هرمیتی بودن یک عملگر چیست :

ابتدا مشابه با ضرب داخلی دو تابع موج در مکانیک کوانتومی ،ضرب داخلی دو میدان برداری را تعریف می کنیم:

$$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}) \triangleq \int d^{۳}\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{F}^{*}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \qquad (۱۲-۲)$$

که $\boldsymbol{G}$ و $\boldsymbol{F}$ دو میدان برداری دلخواه می باشند و منظور از $\boldsymbol{F}^{*}$ مزدوج مختلط میدان برداری $\boldsymbol{F}$ است. به عنوان یک نتیجه ساده از تعریف فوق می توان ثابت کرد که : $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}) = (\boldsymbol{G},\boldsymbol{F})^{*}$. همچنین توجه کنید که $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F})$ همیشه حقیقی و مثبت است حتی اگر خود $\boldsymbol{F}$ مختلط باشد. (در حقیقت $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ یک مد هماهنگ سیستم الکترومغناطیسی ماست.)

با توجه به آزادی عمل در مقیاس یک مد با ضرب یک ضریب ثابت، اگر $\boldsymbol{F}$ یک مد از سیستم الکترومغناطیسی ما باشد، همواره می توان آن را در ثابتی ضرب کرد به طوری که داشته باشیم $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}) = ۱$. مثلا اگر برای میدان برداری $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r})$ داشته باشیم $(\boldsymbol{F}',\boldsymbol{F}') \neq ۱$، اگر بنویسیم :