وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (گرایش جبر)

حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها

توسط:

فرنگیس جوهری

استاد راهنما:

دکتر محسن پرویزی

استاد مشاور:

دکتر پیمان نیرومند

بهمن ماه ۸۹

بسم الله الرحمن الرحيم

به نام خدا

حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها

توسط:

فرنگیس جوهری

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض (گرایش جبر)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه:

دکتر محسن پرویزی استادیار دانشگاه فردوسی مشهد (استاد راهنما)

دکتر پیمان نیرومند استادیار دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر عبدالعلی بصیری استادیار دانشگاه دامغان (استاد داور)

دکتر محبوبه علیزاده استادیار دانشگاه گلستان (استاد داور)

دکتر علی پورموسوی استادیار دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

بهمن ماه ۸۹

تقدیم به

تقدیم قطره ای آب به دریا و شراره ی یک شمع به خورشید، پیش از آنکه گویای سپاس و قدردانی باشد، مایه ی شرمندگی است.

تقدیم به **پدرم** ؛

او که سحرگاهی پاییزی نگاهش را بر زندگی بست و حسرت لمس دستان پرمهرش همیشه در عمق نگاهم به وسعت تمام دنیا باقی خواهد ماند. پدرجان، سایه ی لبخند مهربانت را در واپسین لحظات دیدار همراه خواهم داشت. هزاران بوسه تقدیم بر آرامگاه وجودت.

تقدیم به بیکران مهر و عطوفت **مادرم** ؛

او که دریای مهربانی نگاهش بی‌پایان و آغوش گرم او پناهگاه تنهایی‌ام. مادرم، تپش‌های قلبت دلگرمی لحظه‌های زندگیست. هزاران بوسه تقدیم به دستانت خسته‌ات.

تقدیم به **برادران و خواهران عزیزم** ؛

که وجودشان گرمی بخش لحظات زندگیم است

سپاسگزاری

پروردگارا! ای هستی بخش وجود، مرا بر نعمات بی کرانت توان شکر نیست، ذره ذره وجودم برای تو و نزدیک شدن به تو می تپد. الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم، نه نردبانی برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه ای برای اسارت و نه دست مایه ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

اکنون که به لطف پروردگار بزرگ موفق به اتمام این مقطع از تحصیل گشته ام لازم می دانم از کسانی که در این مسیر مرا راهنمایی نموده اند، تشکر نمایم.

بر خود واجب می دانم مراتب سپاس و قدردانی عمیق قلبی خود را به خدمت استاد فرزانه و گرانقدرم جناب آقای دکتر محسن پرویزی که در طول دوران تحصیل و ارائه پایان نامه از چشمه جوشان دانش و اخلاق والاشان به قدر ظرفیت محدود خویش بهره مند گشته ام ابراز نمایم.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر پیمان نیرومند که مشاوره این پایان نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر را دارم.

از تمامی اساتیدی که در طول این مدت افتخار شاگردیشان را داشتم کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از زحمات پدر مرحومم و مادر عزیزتر از جانم و خواهر عزیزم حدیث که سربلندی امروزم را مدیون زحمات دیروز آن ها می دانم، سپاسگزارم.

در نهایت، سپاس و تشکر خود را تقدیم دوستان مهربانم می کنم که مرا در سختی ها تنها نگذاشتند و همواره در کنارم بودند.

فرنگیس جوهری

بهمن ماه ۸۹

چکیده

حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها

به وسیله‌ی:
فرنگیس جوهری

در این پایان‌نامه، ابتدا حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها را تعریف می‌کنیم که از آن تعریف تانسور مربعی ناآبلی یک گروه نتیجه می‌شود. سپس تانسور مربعی ناآبلی گروه‌های چهارگان با مرتبه‌ی $4m$ را به‌دست آورده که از آن تانسور مربعی ناآبلی گروه‌های دووجهی نتیجه می‌شود. همین‌طور تانسور مربعی ناآبلی گروه‌های فرادوری محاسبه می‌شود. جداولی توسط آر. براون[۱] و ال. جی. لودِی[۲] در سال ۱۹۸۷ با استفاده از نرم افزارها ارائه شده است که در این جداول تانسور مربعی گروه‌های با مرتبه‌ی کمتر یا مساوی ۳۰ بررسی شده است. هم‌چنین یک کران برای مرتبه‌ی حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی دو گروه که مرتبه‌ی آن‌ها توانی از عدد اول است را نشان می‌دهیم، لذا کرانی را که رکو[۳] برای تانسور مربعی $p-$گروه‌های متناهی به‌دست آورد می‌توان بهبود بخشید.

با استفاده از نرم افزار گپ[۴] مرتبه‌ی حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی $G \otimes H$ برای همه‌ی زیرگروه‌های نرمال G و H از گروه کواترنیون از مرتبه‌ی ۳۲ را محاسبه کرده، بدین وسیله جدولی ارائه می‌دهیم که مرتبه‌ی حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی $G \otimes H$ را با کرانی که به‌دست آوردیم مقایسه می‌کند، این جدول در سال ۱۹۹۸ توسط گراهام الیس[۵] محاسبه شده است.

واژه‌های کلیدی: *$p-$گروه‌های متناهی، حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی، تانسور مربعی ناآبلی.*

---

[۱] R. Brown

[۲] J. -L. Loday

[۳] Rocco

[۴] GAP

[۵] G. Ellis

فهرست مطالب

فهرست مطالب ... **ه**

فهرست جدول‌ها ... **ز**

۱ پیش‌نیازها ... **۳**

۱-۱ مفاهیم و تعاریف مقدماتی ... ۴

۱-۲ گروه‌های آزاد و آبلی آزاد ... ۶

۱-۳ $p-$گروه‌های متناهی ... ۱۰

۱-۴ حاصل‌ضرب تانسوری آبلی ... ۱۳

۱-۵ حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها ... ۱۷

۱-۶ نتایج اساسی در مورد تانسور مربعی یک گروه ... ۳۹

۲ گروه‌های چهارگان و فرادوری ... **۶۳**

۲-۱ خصوصیات تابعگری ... ۶۴

۲-۲ حاصل‌ضرب تانسور مربعی گروه‌های چهارگان و دووجهی ... ۸۱

۲-۳ حاصل‌ضرب تانسور مربعی گروه‌های فرادوری ... ۹۶

۲-۴ تانسور مربعی گروه‌های متناهی با مرتبه‌ی کوچکتر یا مساوی از ۳۰ ... ۱۰۹

۳ حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی گروه‌های از مرتبه‌ی توانی یک عدد اول ... **۱۱۴**

۳-۱ قضایای اصلی ... ۱۱۵

۳-۲ جدول ... ۱۴۳

مراجع ... **۱۴۶**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۱۴۸
واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۱۵۲

فهرست جدول‌ها

۲-۱ ساختار گروه‌های با مرتبه‌ی کوچکتر یا مساوی۳۰ . . . . ۱۱۰
۲-۲ ادامه جدول۱-۲ . . . . ۱۱۱
۲-۳ تانسور مربعی گروه‌های متناهی با مرتبه‌ی کوچکتر یا مساوی ۳۰ . . . . ۱۱۱
۲-۴ تانسور مربعی گروه‌های متناهی با مرتبه‌ی کوچکتر یا مساوی ۳۰ . . . . ۱۱۲
۲-۵ مولدهای تانسور مربعی با روابط تعریف شده بین آن‌ها برای ۱۱ گروه از جدول ۲-۱ . . . . . . ۱۱۳

۳-۱ اعمال مزدوج از زیرگروه‌های G روی زیرگروه‌های H ۱۴۳
۳-۲ ادامه جدول۳ − ۱ . . . . ۱۴۳
۳-۳ مرتبه حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی زیرگروه‌های نرمالG و H از Q_{16} ۱۴۴
۳-۴ ادامه جدول۳ − ۳ . . . . ۱۴۵

پیشگفتار

حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی $G \otimes H$ از گروه‌های G و H توسط آر. براون[۶] و جی. ال. لودِی[۷] در [۴] و [۵] معرفی شده است. این تعریف از کاربردهایی در نظریه‌ی هموتوپی [۸] که از یک تعمیم قضیه‌ی ون کمپن[۹] به‌وجود آمده است. مطالب این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌های [۵] و [۳] و [۶] می‌باشد و شامل۳ فصل است:

فصل اول، با عنوان پیش‌نیازها مطرح شده است، در بخش‌های اول تا چهارم آن به بیان قضایا و تعاریف مقدماتی می‌پردازیم که در فصول بعدی مورد نیازند.

در بخش پنجم، حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها را تعریف می‌کنیم که تانسور مربعی گروه حالت خاصی از آن است. در بخش ششم، به معرفی مربع خارجی ناآبلی گروه G و $\Gamma-$تابعگر وایت هد[۱۰] برای گروه‌های آبلی می‌پردازیم. مطالب فصل اول برگرفته از [۵] و [۳] می‌باشد.

فصل دوم، در بخش اول به بیان این مطلب می‌پردازیم که این گزاره نشان می‌دهد که تحت شرایطی خاص، حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی روی حاصل‌ضرب مستقیم توزیع می‌شود.

در بخش دوم، حاصل‌ضرب تانسور مربعی گروه‌های چهارگان و دووجهی را به‌دست می‌آوریم و در بخش سوم حاصل‌ضرب تانسور مربعی گروه فرادوری را محاسبه می‌کنیم. در آخر این فصل جدول‌هایی ضمیمه شده است. جدول ۲-۱ اطلاعاتی در مورد تانسور مربعی همه‌ی گروه‌های متناهی با مرتبه‌ی کوچکتر یا مساوی ۳۰ می‌دهد که این جداول با استفاده از نرم افزارها به‌دست آمده است و تانسور مربعی همه گروه‌ها در این جدول به جز ۱۱ گروه را می‌توان از گزاره‌های ۶.۱.۲ تا ۱۶.۳.۲ به‌دست آورد. برای ۱۱ گروه باقیمانده از جدول ۲-۱، مولدهای تانسور مربعی با روابط تعریف شده بین آن‌ها در ۲-۵ آمده است. این جداول برگرفته از [۳] است.

در فصل سوم، یک کران برای مرتبه‌ی حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی $G \otimes H$ که G یک $p-$گروه متناهی و

---

[۶] R. Brown

[۷] J. -L. Loday

[۸] Homotopy

[۹] Van Kampen

[۱۰] Whitehead's $\Gamma-$functor

H یک $q-$گروه متناهی است را به‌دست می‌آوریم. در انتها جداولی ضمیمه شده است که در این جداول $G \otimes H$ مرتبه‌ی حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی را برای همه‌ی زیرگروه‌های نرمال G و H از گروه کواترنیون با مرتبه **۳۲**، که با استفاده از نرم افزار گپ[۱۱] به‌دست آمده است، این فصل برگرفته از [۷] می‌باشد.

[۱۱] GAP

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل مفاهیم و قضایایی که در فصل‌های بعد مورد نیاز است را بیان می‌کنیم. این فصل شامل شش بخش است، بخش اول برخی مفاهیم و تعاریف مقدماتی، بخش دوم گروه آزاد و آبلی آزاد مورد بررسی قرار می‌دهیم. بخش سوم $p-$ گروه‌های متناهی، بخش چهارم حاصل‌ضرب تانسوری آبلی، بخش پنجم حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی و در بخش ششم نتایج اساسی در مورد تانسور مربعی یک گروه، مورد بررسی قرار خواهند گرفت. دو بخش اخیر برگرفته از [۳] و [۵] می‌باشند.

۱-۱ مفاهیم و تعاریف مقدماتی

در این بخش تعاریف، قضایا، اصطلاحاتی که در فصل‌های بعد و در اثبات قضایا مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و X مجموعه‌ای ناتهی باشد. اگر تابعی مانند $G \times X \longrightarrow X$ با ضابطه $(g,x) \longmapsto g\,x$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر g_1 و g_2 از G و هر x از X، شرایط زیر برقرار باشند

الف) $1\,x = x$،

ب) $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$،

دراین‌صورت گوییم G بر X عمل می‌کند.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و X مجموعه‌ای ناتهی باشد گوییم G بر X به‌طور بدیهی عمل می‌کند هرگاه به‌ازای هر g از G و هر x از X، داشته باشیم $g\,x = x$.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد، دراین‌صورت نمای[1] G به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$exp(G) = min\Big\{n \in \mathbb{Z} \,\Big|\, \forall\, g \in G \;\;:\;\; g^n = 1\Big\}.$$

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد و $H \leq G$. زیرگروه K از G را یک متمم[2] (در G) گوییم هرگاه $G = HK$ و $H \cap K = 1$.

لم ۵.۱.۱. *هرگاه $f : G \longrightarrow H$ یک همریختی گروهی و N یک زیرگروه نرمال از G مشمول در هسته‌ی f باشد، آن‌گاه همریختی منحصربه‌فردی مانند*

$$\bar{f} : \frac{G}{N} \longrightarrow H$$
$$aN \longmapsto f(a), \qquad \forall a \in G$$

وجود دارد که $Im\ f = Im\ \bar{f}$ و $\ker\ \bar{f} = \dfrac{\ker\ f}{N}$. به‌خصوص $\bar{f}$ یکریختی است اگر و فقط اگر f یک بروریختی باشد و $\ker\ f = N$.

اثبات. به صفحه‌ی ۶۷ از [۱۰] مراجعه شود. □

[1] Exponent

[2] Complement

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و Ω یک مجموعه باشد. درنظر می‌گیریم

$$\alpha : G \times \Omega \longrightarrow G$$
$$(g, \omega) \longmapsto g^{\omega}.$$

دراین‌صورت یک گروه عملگر راست سه‌تایی (G, Ω, α) است که شامل گروه G و مجموعه Ω که دامنه عملگر نامیده می‌شود و تابع α می‌باشد که تابع α_ω القا شده به وسیله α که به‌ازای هر $\omega \in \Omega$، $g \longmapsto g^{\omega}$ یک درون‌ریختی از G باشد. دراین‌صورت G را یک $\Omega-$گروه می‌نامیم.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و A یک گروه آبلی باشد، دراین‌صورت A را یک $G-$مدول[۳] می‌نامند هرگاه G دامنه‌ی عملگر باشد.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم G و K دو $\Omega-$گروه باشند و $\beta : G \longrightarrow K$ یک همریختی باشد. دراین‌صورت β را $\Omega-$همریختی گوییم، هرگاه به‌ازای هر $g \in G$ و $\omega \in \Omega$، داشته باشیم $\beta(g^{\omega}) = (\beta g)^{\omega}$.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم G و K دو $\Omega-$گروه باشند و $\beta : G \longrightarrow K$ یک یکریختی باشد. دراین‌صورت G و K را $\Omega-$یکریخت گوییم، هرگاه β یک $\Omega-$یکریختی باشد.

لم ۱۰.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه و N زیرگروه نرمال G باشد. اگر گروه خارج قسمتی G/N دوری و N زیرگروه مرکزی باشد، آن‌گاه G آبلی است.*

اثبات. واضح است. $\square$

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم $G = \{g_i \mid i \in I\}$ گروه ضربی و R حلقه‌ای یکدار باشد. هم‌چنین فرض کنیم $R(G)$ مجموعه‌ی متشکل از تمام حاصل‌جمع‌های صوری

$$\sum_{i \in I} a_i g_i$$

که $a_i \in R$ و $g_i \in G$، و در آن همه‌ی a_iها، به جز تعداد متناهی از آن‌ها، صفر هستند. قانون حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب دو عنصر از $R(G)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\sum_{i \in I} a_i g_i + \sum_{i \in I} b_i g_i = \sum_{i \in I} (a_i + b_i) g_i,$$
$$\Big(\sum_{i \in I} a_i g_i\Big)\Big(\sum_{i \in I} b_i g_i\Big) = \sum_{i \in I} \Big(\sum_{g_j g_k = g_i} a_j b_k\Big) g_i,$$

$R(G)$ با این اعمال یک حلقه است که آن را حلقه‌ی گروهی[۴] G روی R می‌نامند، $1_R 1_G$ عنصر واحد $R(G)$ می‌باشد.

---

[۳] G-module

[۴] Group ring

تعریف ۱.۱.۱۲. گروه G با نمایش

$$\langle x, y |\ x^{2} = 1,\ xyx = y\rangle$$

را گروه دووجهی نامتناهی می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنیم A زیرگروه G باشد. دراین‌صورت همریختی $\beta : G \longrightarrow A$ را یک توکشیده[۵] می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر $a \in A$، $\beta(a) = a$.

تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنیم $\left\{G_i |\ i \in I\right\}$ خانواده‌ای ناتهی از گروه‌ها باشد. حاصل‌ضرب آزاد این خانواده یک گروه مانند G، همراه با خانواده‌ای از همریختی گروه‌ها مانند $\left\{\tau_i : G_i \to G |\ i \in I\right\}$ می‌باشد، به‌طوری‌که به‌ازای هر گروه H و خانواده‌ی $\left\{\varphi_i : G_i \to H |\ i \in I\right\}$ از همریختی گروه‌ها، همریختی یکتایی مانند $\varphi : G \longrightarrow H$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $i \in I$، $\tau_i\varphi = \varphi_i$. حاصل‌ضرب آزاد[۶] خانواده‌ی $\left\{G_i |\ i \in I\right\}$ را با $\prod^{*}_{i\in I} G_i$ نشان می‌دهیم.

۱-۲ گروه‌های آزاد و آبلی آزاد

در این بخش گروه‌های آزاد و آبلی آزاد را تعریف کرده و به بیان چند لم و قضیه می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. گروه F همراه با تابع $i : X \longrightarrow F$ را بر X آزاد[۷] گوییم، هرگاه به‌ازای هر گروه مانند G و هر تابع مانند $f : X \longrightarrow G$ یک همریختی یکتا مانند $f_1 : F \longrightarrow G$ موجود باشد به‌طوری‌که $f_1 i = f$.

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنیم F یک گروه آزاد بر مجموعه‌ی X باشد، دراین‌صورت عدد اصلی X را رتبه‌ی[۸] F می‌نامیم.

قضیه ۱.۲.۳ (خاصیت تصویری گروه آزاد[۹]). *فرض کنیم F یک گروه آزاد روی مجموعه‌ی X باشد و G و H دو گروه و $\alpha : F \longrightarrow H$ یک همریختی و $\beta : G \longrightarrow H$ یک برویختی از گروه‌ها باشند. دراین‌صورت همریختی مانند $\delta : F \longrightarrow G$ وجود دارد به‌طوری‌که $\beta\delta = \alpha$.*

اثبات. به صفحه‌ی ۴۹ از [۱۴] مراجعه شود. □

قضیه ۱.۲.۴. *هر گروه دلخواه تصویر همریخت یک گروه آزاد است.*

---

[۵] Retraction

[۶] Free product

[۷] Free group

[۸] Rank

[۹] Projective property

اثبات. به صفحه‌ی ۶۶ از [۱۰] مراجعه شود. □

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه و X یک مجموعه‌ی مولد برای G و F یک گروه آزاد روی X باشد به‌طوری‌که $G \cong F/R$. دراین‌صورت F/R را یک نمایش آزاد[۱۰] برای گروه G می‌نامیم.

قضیه ۶.۲.۱ (نیلسن-شرایر[۱۱]). *فرض کنیم F یک گروه آزاد و $H \leq F$ باشد. دراین‌صورت H آزاد است. به‌علاوه اگر r رتبه‌ی F و t اندیس H در F هر دو متناهی باشند آن‌گاه رتبه‌ی H نیز متناهی و برابر با $(r-۱)t+۱$ است.*

اثبات. به صفحه‌ی ۱۵۳ از [۱۴] مراجعه شود. □

گزاره ۷.۲.۱. *اگر F یک گروه آزاد نادوری باشد، آن‌گاه F' یک گروه آزاد از رتبه‌ی نامتناهی است.*

اثبات. به صفحه‌ی ۱۵۷ از [۱۴] مراجعه شود. □

حال به تعریف گروه آبلی آزاد می‌پردازیم.

قضیه ۸.۲.۱. *شرایط زیر در مورد گروه آبلی F معادلند*

الف) *F یک پایه‌ی ناتهی دارد،*

ب) *F مجموع مستقیم داخلی خانواده‌ای ناتهی از زیرگروه‌های دوری است،*

پ) *F یکریخت با مجموع مستقیم نسخه‌هایی از گروه جمعی $\mathbb{Z}$ از اعداد صحیح است،*

ت) *مجموعه‌ای ناتهی مانند X و تابعی چون $\iota : X \longrightarrow F$ وجود دارند که به‌ازای هر گروه آبلی G و تابع $f : X \longrightarrow G$، همریختی یکتایی از گروه‌ها مانند $f_۱ : F \longrightarrow G$ وجود دارد به‌طوری‌که $f_۱\iota = f$.*

اثبات. به صفحه‌ی ۱۱۰ از [۱۰] مراجعه شود. □

تعریف ۹.۲.۱. گروه آبلی F صادق در شرایط قضیه‌ی ۸.۲.۱ یک گروه آبلی آزاد[۱۲] بر مجموعه‌ی X نامیده می‌شود.

لم ۱۰.۲.۱. *فرض کنید F گروه آزادی روی مجموعه‌ی X باشد. برای هر $x \in X$ تابع $\sigma_x : F \longrightarrow \mathbb{Z}$ را به‌صورت $\sigma_x(x_{i_۱}^{\alpha_۱} x_{i_۲}^{\alpha_۲} \cdots x_{i_n}^{\alpha_n})$ تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت $f \in F'$ اگروتنهااگر $\sigma_x(f) = ۰$.*

اثبات. به صفحه ۵۰ از [۱۴] مراجعه کنید. □

---

[۱۰] Free presentation

[۱۱] Nielsen-Schreier

[۱۲] Free abelian group

لم ۱.۲.۱۱. *فرض کنیم F گروه آزاد بر مجموعه‌ی X باشد. F' زیرگروه مشتق F باشد دراین‌صورت F/F' روی مجموعه $\{xF' \mid x \in X\}$ یک گروه آبلی آزاد از عدد اصلی X است.*

اثبات. واضح است F/F' یک گروه آبلی است کافیست نشان دهیم $A = \{xF' \mid x \in X\}$ یک پایه برای F/F' است. فرض کنیم f عنصری در F باشد. چون F گروه آزاد بر مجموعه‌ی X است دراین‌صورت $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد $f = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$ که $r_i \in \mathbb{Z}$ و به‌ازای هر $1 \leq i \leq k$ داریم $x_i \in X$، درنتیجه

$$fF' = (x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k})F' = (x_1^{r_1} F')(x_2^{r_2} F') \cdots (x_k^{r_k} F'),$$

بنابراین $F/F' = \langle A \rangle$. اکنون نشان می‌دهیم A مستقل خطی است. فرض کنیم $n_1, n_2, \ldots, n_k$ اعداد طبیعی باشند دراین‌صورت

$$(x_1^{r_1} F')^{n_1} (x_2^{r_2} F')^{n_2} \cdots (x_k^{r_k} F')^{n_k} = F',$$

درنتیجه داریم

$$(x_1^{r_1})^{n_1} (x_2^{r_2})^{n_2} \cdots (x_k^{r_k})^{n_k} F' = F',$$

چون F/F' آبلی است پس می‌توان فرض کرد x_iها متمایزند لذا

$$(x_1^{r_1})^{n_1} (x_2^{r_2})^{n_2} \cdots (x_k^{r_k})^{n_k} \in F'. \tag{1.1}$$

با استفاده از لم ۱.۲.۱۰ داریم $r_1 n_1 = r_2 n_2 = \ldots = r_k n_k = 0$ پس A مستقل خطی است. لذا با توجه به تعریف ۱.۲.۹، F/F' یک گروه آبلی آزاد از عدد اصلی X است. □

قضیه ۱.۲.۱۲. *فرض کنیم G یک گروه آبلی با تولید متناهی باشد. دراین‌صورت یا G آبلی آزاد است یا اعداد صحیح مثبت و منحصربه‌فردی (که لازم نیست متمایز باشند) مانند $m_1, m_2, \ldots, m_t$ وجود دارند به‌طوری‌که $m_1 > 1$، $m_1 | m_2 | \cdots | m_t$ و*

$$G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_t} \oplus F$$

که در آن گروه F آبلی آزاد است.

اثبات. به صفحه‌ی ۱۱۰ از [۱۰] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۲.۱۳. گروه G در شرط زنجیر افزایشی[13] بر زیرگروه‌ها صدق می‌کند، اگر به‌ازای هر زنجیر

$$G_1 \leq G_2 \leq \cdots$$

از زیرگروه‌های G، عدد صحیحی مانند n موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $i \geq 1$، $G_{n+i} = G_n$.

[13] Ascending chain condition

لم ۱۴.۲.۱. *هر زیرگروه از گروه آبلی با تولید متناهی، با تولید متناهی است.*

اثبات. به صفحه‌ی ۱۲۱ از [۱۰] مراجعه شود. □

لم ۱۵.۲.۱. *هر گروه آبلی با تولید متناهی در شرط زنجیر افزایشی بر زیرگروه‌ها صدق می‌کند.*

اثبات. فرض کنیم G یک گروه آبلی با تولید متناهی باشد که $G = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$. که برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i \in G$. اکنون حکم را با استقرا روی n که تعداد مولدهای G است نشان می‌دهیم. فرض کنیم حکم برای گروه‌هایی که تعداد مولدهای آن‌ها از n کمتر برقرار باشد. فرض کنیم زنجیر زیر

$$N_1 < N_2 < \cdots$$

یک زنجیر افزایشی از زیرگروه‌های G و هم‌چنین فرض کنید N زیرگروه نرمال G باشد. دراین‌صورت زنجیرهای افزایشی

$$N_1 \cap N < N_1 \cap N < \cdots < N_m \cap N < \cdots$$

و

$$N_1 N/N < N_2 N/N < \cdots < N_m N/N < \cdots$$

وجود دارند. چون طبق لم ۱۴.۲.۱ زیرگروه نرمال N با تولید متناهی و گروه خارج قسمتی G/N یک گروه آبلی با تولید متناهی که تعداد مولدهای آن کمتر از n است لذا بنابر فرض استقرا در شرط زنجیرهای افزایشی صدق می‌کنند بنابراین یک عدد صحیح مانند t وجود دارد به‌طوری‌که

$$N_t \cap N = N_{t+1} \cap N = \cdots \quad \text{و} \quad N_t N/N = N_{t+1} N/N = \cdots .$$

کافی است نشان دهیم که $N_{t+1} \subseteq N_t$. فرض کنیم $x \in N_{t+1}$ چون $N_{t+1} \subseteq N_{t+1}N = N_t N$، دراین‌صورت $y \in N_t$ و $n \in N$ وجود دارند به‌طوری‌که $x = yn$. لذا

$$n = y^{-1}x \in N \cap N_{t+1} = N \cap N_t,$$

آن‌گاه $y^{-1}x \in N_t$ پس $x \in N_t$. بنابراین G در زنجیر افزایشی بر زیرگروه‌هایش صدق می‌کند. □

لم ۱۶.۲.۱. *هر درون‌ریختی پوشا از یک گروه آبلی با تولید متناهی، یکریختی است.*

اثبات. فرض کنیم G یک گروه آبلی با تولید متناهی و $f : G \longrightarrow G$ بروریختی باشد. زنجیر افزایشی زیر

$$\ker\ f \leq \ker\ f^2 \leq \cdots$$

زنجیری از زیرگروه‌های نرمال G است که با توجه به لم ۱۵.۲.۱، یک عدد صحیحی مانند n وجود دارد به‌طوری که

$$\ker\ f^n = \ker\ f^{n+1} = \cdots .$$

چون f بروریختی است به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ f^n نیز چنین است. هرگاه a در هسته‌ی f باشد، آن‌گاه به‌ازای $b \in G$، $a = f^n(b)$ و $e = f(a) = f^{n+1}(b)$. درنتیجه، $b \in \ker\ f^{n+1} = \ker\ f^n$. که ایجاب می‌کند $a = f^n(b) = e$. لذا، f تکریختی و درنتیجه خودریختی است. □

۱-۳ $p-$گروه‌های متناهی

در این بخش مفهوم گروه پوچ توان را تعریف کرده و قضیه‌هایی در مورد $p-$گروه‌های متناهی، که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم x و y عناصر دلخواه گروه G باشند. جابه‌جاگر x و y و مزدوج x توسط y را به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف شده

$$[x,y] = x\,y\,x^{-1}y^{-1},$$
$$^{y}x = y\,x\,y^{-1}.$$

در حالت کلی، یک جابه‌جاگر ساده از وزن n مرتب شده از چپ به‌طور استقرایی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = [[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], x_n] \qquad n \geq 2$$

که x_i، جابه‌جاگر از وزن یک در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنیم X_1 و X_2 دو زیرمجموعه غیرتهی از گروه G باشند. دراین‌صورت زیرگروه جابه‌جاگر X_1 و X_2 را به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle$$

به‌علاوه هرگاه $(n \geq 2)$ $X_n, \cdots, X_2, X_1$ زیرمجموعه‌های غیرتهی از گروه G باشند، زیرگروه جابه‌جاگر $X_n, \cdots, X_2, X_1$، به‌طور استقرایی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$[X_1, X_2, \cdots, X_n] = [[X_1, X_2, \dots, X_{n-1}], X_n]$$

به‌ویژه $G' = [G,G]$ زیرگروه جابه‌جاگر گروه G است که به آن زیرگروه مشتق [14] گروه G گوییم. جابه‌جاگر $[X_1, X_2, X_2, \cdots, X_2]$ که X_2، n مرتبه تکرار شده باشد را با نماد $[X_1,\ {}_nX_2]$ نمایش می‌دهیم. به‌طور مشابه $[{}_nX_1, X_2]$ نیز قابل تعریف است.

قضیه ۳.۳.۱. *فرض کنیم G یک گروه و z, y, x عناصر دلخواهی از گروه G باشند. دراین‌صورت*

$$[x, y\,z] = [x,y]\ {}^{y}[x,z] \quad , \quad [x\,y, z] = {}^{x}[y,z]\,[x,z].$$

[14] Derived subgroup

اثبات. ابتدا عبارت $[x, y\,z] = [x, y]\,{}^{y}[x, z]$ را ثابت می‌کنیم.

$$\begin{aligned}[x, y\,z] &= xyzx^{-1}(yz)^{-1}\\ &= (xyx^{-1}y^{-1})y(xzx^{-1}z^{-1})y^{-1}\\ &= [x, y]^{y}[x, z].\end{aligned}$$

عبارت $[x\,y, z] = {}^{x}[x, z][y, z]$ به‌طور مشابه ثابت می‌شود. □

قضیه ۱.۳.۴. *فرض کنیم H، K و L زیرگروه‌هایی از گروه دلخواه G باشند. دراین‌صورت*

۱) $[H, K] = [K, H]$.

۲) *اگر $H \trianglelefteq G$، آن‌گاه $[H, G] \trianglelefteq H$.*

۳) *اگر $H, K \trianglelefteq G$، آن‌گاه $[H, K] \trianglelefteq G$.*

۴) *اگر $K \trianglelefteq G$ و $K \le H$ باشد آن‌گاه $H/K \le Z\big(G/K\big)$ اگر و تنها اگر $[H, G] \le K$.*

اثبات. به [۱] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۳.۵. فرض کنیم G یک گروه دلخواه باشد. یک زنجیر از زیرگروه‌های گروه G به‌صورت

$$G_{0} = \{e\} \le G_{1} \le \cdots \le G_{n} \le G_{n+1} \le \cdots$$

را سری مرکزی[۱۵] گویند هرگاه به‌ازای هر i، $G_i \trianglelefteq G$ و $G_{i+1}/G_i \subseteq Z(G/G_i)$.

تعریف ۱.۳.۶. گروه G را پوچ‌توان[۱۶] گویند، اگر دارای یک سری مرکزی باشد که به G ختم شود.

قضیه ۱.۳.۷. *اگر p عددی اول باشد آن‌گاه هر $p-$گروه متناهی، پوچ‌توان است.*

اثبات. به صفحه‌ی ۱۱۸ از [۱۴] مراجعه شود. □

قضیه ۱.۳.۸. *اگر G یک گروه پوچ توان و $1 \neq N \triangleleft G$ باشد آن‌گاه $N \cap Z(G) \neq 1$.*

اثبات. به صفحه‌ی ۱۲۴ از [۱۴] رجوع شود. □

نتیجه ۱.۳.۹. *هرگاه N یک زیرگروه نرمال مینیمال از گروه پوچ توان G باشد، دراین‌صورت $N \le Z(G)$.*

اثبات. از قضیه‌ی ۱.۳.۸ نتیجه می‌شود. □

---

[۱۵] Central series

[۱۶] Nilpotent