بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

مطالعه سیستمهای دینامیکی آشوبناک کوپل شده برپایه نظریه گراف وکاربردآنها

استاد راهنما

دکتر صدیف احدپور کلخوران

استاد مشاور

داوود منظوری

توسط

یاسر صدرا

دانشگاه محقق اردبیلی

شهریور ۱۳۸۹

دانشکده علوم

مطالعه سیستمهای دینامیکی آشوبناک کوپل شده برپایه نظریه گراف وکاربردآنها

توسط

یاسر صدرا

پایان نامه برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته فیزیک نظری

از

دانشگاه محقق اردبیلی

اردبیل- ایران

ارزیابی و تصویب شده توسط کمیته پایان نامه با درجه:

دکتر صدیف احدپور کلخوران (استاد راهنما و رئیس کمیته)	**استادیار**
داوود منظوری (استاد مشاور)	**مربی**
دکتر قادر نجارباشی (داور داخلی)	**استادیار**
دکتر محمدرضا ابوالحسنی (داور خارجی)	**استادیار**

شهریور- ۱۳۸۹

خدای خوبم...پروردگارم...مهربانم...شکرگزارم همه لحظات خوشی را که برایم رقم زده ای. شاکرم تمام لحظاتی که به مذاقم دشوار است اما می‌دانم که مرحله‌ای است برای تعالی من...شکرگزارم برای صبری که در پذیرفتن این لحظات به من عطا می‌کنی...خوب من...ممنونم از آنچه سر راهم قرار می‌دهی تا ببینم و بشنوم و بخواهم. ممنونم از همه آنچه که برایم می‌خواهی و همه آنچه از خواسته ام که با همه بزرگی و محبتت اجابت می‌کنی. تو را ستایش می‌کنم و سپاس می‌گویم برای توجه و عنایتی که به ما داری و برای پنجره های تازه ای که به سوی ما و زندگیمان می‌گشایی. می‌دانم که شکرگزاری من هیچ گاه شایسته عنایات و نعمتهای بی‌کران تو نخواهد بود...

اما باز تو را شکرگزارم که شکرگزاریت را بر زبانم جاری می‌سازی و باز شاکرم که زبانی به من دادی تا وسیله‌ای برای شکرگزاریت شود...مرا یاری کن تا همواره شکرگزار باشم...*آمین*.

تقدیم به پدر و مادرم

زیباترین معنای گیتی

تقدیم به همسر فرهیخته و مهربانم

خانم زهرا آراسته فرد

تقدیم به خواهر و برادران بزرگوارم

سمیه جان، محمود جان و علی جان

تقدیر و تشکر:

از استاد راهنمای گرانقدرم جناب آقای دکتر احدپور که راهنمایی و هدایت بنده را در طول تحصیلم داشته اند، کمال تشکر و قدردانی را می‌نمایم.

از اساتید ارجمندم جناب آقای دکتر رضایی، جناب آقای دکتر نجارباشی و جناب آقای دکتر ذوالفقارپور و جناب آقای استاد منظوری نیز کمال تشکر را دارم.

و از دوستان خوبم که همیار و همراه من بودند، ممنون و متشکرم.

نام خانوادگی دانشجو: صدرا	**نام**: یاسر

عنوان پایان نامه: مطالعه سیستمهای دینامیکی آشوبناک کوپل شده برپایه نظریه گراف وکاربردآنها

استاد راهنما: دکتر صدیف احدپور کلخوران

استاد مشاور: داوود منظوری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته**: فیزیک **گرایش**: نظری **دانشگاه**: محقق اردبیلی

دانشکده: علوم- گروه فیزیک **تاریخ فارغ التحصیلی**: ۸۹/۶/۲۷ **تعداد صفحه**: ۹٦ صفحه

کلید واژه‌ها: سیستمهای دینامیکی، آشوب، رندوم، گرافهای پدیداری، رمزنگاری، مولدهای اعداد رندومی، گرافهای پدیداری دودویی.

چکیده:

دراین پایان‌نامه، ابتدا یک مقدمه کوتاهی برای سیستمهای دینامیکی بیان می‌کنیم. سپس، نظریه گراف را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. یکی از شاخه‌های نظریه گراف، شبکه‌های پیچیده می‌باشد. با استفاده از گراف پدیداری که یک شبکه پیچیده می‌باشد، سیستمهای دینامیکی گسسته آشوبناک و رندومی و کاربردهای آنها در نظریه اطلاعات و رمزنگاری را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم. درپایان، دو مولد اعداد شبه رندومی را پیشنهاد می‌کنیم و همچنین گراف پدیداری دودویی(BVG) که مدل جدیدی از گراف پدیداری است را معرفی می‌کنیم.

فهرست مطالب

فصل سوم: بحث و نتیجه‌گیری

فصل اول

مقدمه

فصل اول

مقدمه

سیستمهای دینامیکی یکی از اساسی ترین مباحث در علم فیزیک می‌باشند. آغاز مطالعات این سیستمها به اواسط سالهای ۱۶۰۰ میلادی برمی‌گردد، زمانیکه نیوتن با استنتاج از قانون کپلرتوانست قوانینی را در خصوص حرکت اجسام بدست آورد و با استفاده از آنها حرکت سماوی را مورد بررسی قرار دهد. از این پس بود که مطالعه سیستمهای دینامیکی بصورت مدلهایی از معادلات دیفرانسیل آغاز شد.

پیشرفتهای بیشتر در این زمینه با کار پوانکاره بعد از سالهای ۱۸۰۰ بدست آمد. همچنین او اولین کسی بود که تئوری آشوب[1] را مطرح کرد. یعنی در سیستمهای قطعی، رفتار غیرپریودیک، شدیدا حساس به شرایط اولیه است. درنتیجه پیشگویی روابط طولانی ممکن نیست. لورنتس در سال ۱۹۶۳ برای اینکه بینشی در مورد پیشگویی وضع هوا داشته باشد، مدل ساده شده قوانین همرفت در اتمسفررا مورد مطالعه قرار داد. او با استفاده از این قوانین، معادلاتی را ابداع کرد و دریافت که حل معادلاتش هرگز به یک حالت تعادل یا پریودیک منجرنمی‌شود. او نتیجه گرفت که این نوع سیستمها دریک مدل غیرپریودیکی وبی نظم نوسان می‌کنند. به اینگونه سیستمها، سیستمهای دینامیکی آشوبناک می‌گویند.

سیستمهای دینامیکی آشوبناک یکی از اساسی ترین مباحث در فیزیک نظری می‌باشند. با توجه به تعدد کاربرد سیستمهای دینامیکی آشوبناک همچون نظریه پردازش داده ها، ارتباطات دیجیتالی، فشرده سازی داده ها، رمزنگاری و رمزگشایی و نوفه زدایی و ...، همواره

1. Chaos Theory

مورد نظر و علاقه محققان فیزیک نظری و بیشتر پژوهشگران رشته های ریاضی و مهندسی بوده است.

از مهمترین روشهای آنالیز سیستمهای دینامیکی آشوبناک و رندومی می‌توان به ابزارهای استانداردی مانند، تابع همبستگی، طیف توانی، وابستگی زمانی انحراف از استاندارد اشاره کرد. در این روشها، سیستمهای دینامیکی آشوبناک و رندومی را می‌توان با انتقال به فضای فاز و تقسیم‌بندی فضا به تعداد معینی از بلوکها، در قالب محاسبه فراوانی در بلوکها مورد بررسی قرار داد. درنتیجه می توان آنتروپی کولموگروف- سینایی و نمای لیاپانوف را که نشاندهنده وضعیت سیستم اند، برای چنین سیستمهایی بدست آورد.

روش دیگری که امروزه برای آنالیز سیستمهای دینامیکی آشوبناک و رندومی مورد استفاده قرار می گیرد، آنالیز با استفاده از نظریه گراف است. آغاز نظریهٔ گراف به سدهٔ هجدهم بر می‌گردد. اولر ریاضیدان بزرگ، مفهوم گراف را برای حل مسئله پل‌های کونیگسبرگ[1] ابداع کرد. اما رشد و پویایی این نظریه عمدتاً مربوط به نیم سدهٔ اخیر و با رشد علم انفورماتیک بوده‌است. از گراف‌ها همچنین در شبکه‌ها، شبکه‌ها پیچیده، آنالیز سیستمهای دینامیکی، نظریه اطلاعات، رمز نگاری، طراحی مدارهای الکتریکی, اصلاح هندسی خیابان‌ها برای حل مشکل ترافیک،و.... استفاده می‌شود. مهم‌ترین کاربرد گراف، مدل‌سازی پدیده‌های گوناگون و بررسی بر روی آنهاست.

یکی از روشهای آنالیز سیستمهای دینامیکی با استفاده از گراف، بازآرایی سیستم دینامیکی برپایه گراف است. بدین صورت که یک سیستم دینامیکی با d کوپلاژ مختلف(ارتباط بین اجزا سیستم دینامیکی) در نظرمی‌گیریم، بطوریکه رئوس گراف نشاندهنده اجزا سیستم دینامیکی و یالهای بین رئوس گراف نشاندهنده ارتباط بین اجزا سیستم دینامیکی(کوپلاژها) باشند. روش دیگر برای آنالیز سیستمهای دینامیکی با استفاده از گراف، بازآرایی سری زمانی

1. The Konigsberg Bridge Problem

استخراج شده از سیستم دینامیکی برپایه گراف است. بطوریکه رئوس گراف نشاندهنده مولفه های سری زمانی استخراج شده از سیستم دینامیکی و یالهای بین رئوس گراف نشاندهنده ارتباط مولفه های سری زمانی استخراج شده از سیستم دینامیکی می‌باشند.

در فصل بعد آنرا بطور مفصل مطالعه خواهیم کرد. این روش امروزه کاربردهای فراوانی در علوم مختلف همچون نظریه اطلاعات (آنالیز دنباله های دودویی رندومی، آشوبناک، فراکتالی و ...) دارد که ما در فصل بحث و نتیجه گیری آنرا نیز بطور مفصل بیان خواهیم کرد.

فصل دوم

بررسی منابع و روشها

فصل دوم:

بررسی منابع و روشها

دراین فصل ضمن مروری اجمالی برتحقیقات انجام شده در زمینه سیستمهای دینامیکی[1]، روشهای تحقیق ونتایج بدست آمده از آنها بیان گردیده و به معرفی روشهای مورد استفاده برای بیان مباحث پژوهش پرداخته می‌شود. بررسی پیشینه سیستمهای دینامیکی نشان می دهد که مطالعه این سیستمها به سال۱٦٨٧ میلادی برمی‌گردد، زمانیکه نیوتن با استنتاج از قانون کپلرتوانست قوانینی را در خصوص حرکت اجسام بدست آورد و با استفاده از آنها حرکت سماوی را مورد بررسی قرار دهد. از این پس بود که مطالعه سیستمهای دینامیکی بصورت مدلهایی از معادلات دیفرانسیل آغاز شد. از آنجا که عنوان سیستمهای دینامیکی به سیستمهایی داده می‌شود که در گذر زمان دستخوش تحول می‌شوند، لذا یک سیستم دینامیکی را می‌توان توسط سه پارامتر زمان، حالتها و قاعده‌هایی که بیانگر نحوه تحول این سیستمهاست، شکل داد. برای درک سیستم دینامیکی بایستی بر شرایط اولیه حاکم بر سیستم و شرایط مرزی آن احاطه داشت(۱٦،۱۷). براساس این مطالعات، سیستمهای دینامیکی را با توجه به رابطهایی که میان پارامتر سرعت و موقعیت در آنها وجود دارد، به دو گروه تقسیم می‌نمایند:

- **سیستمهای دینامیکی خطی:** سیستمهایی که در آنها یک رابطه خطی میان سرعت و موقعیت برقرار می‌شود، سیستمهای خطی به شمار می‌آیند. تکامل تدریجی سیستمهای دینامیکی خطی نیز فرآیندی خطی است. اگر دو جواب برای سیستم خطی داشته باشیم مجموع آنها نیز یک جواب برای سیستم است. هم چنین سیستمهای خطی از این قابلیت برخوردار هستند که آنها را می‌توان با تجزیه مسئله به

1. Dynamical systems

اجزا کوچکتر مورد بررسی قرار داده و سپس با جمع بندی نتایج، به تحلیل کلی آنها اقدام کرد و این از جمله مواردی است که تحلیل سیستمهای خطی را آسان می‌سازد (مانند آنالیز فوریه، مباحث برهم نهی و ...). در نهایت می‌توان گفت که تجزیه و تحلیل معادلات مربوط به این سیستمها شناخته شده است.

- **سیستمهای دینامیکی غیرخطی:** در سیستمهای دینامیکی غیرخطی رابطه میان سرعت و موقعیت غیرخطی می‌باشد. در چنین سیستمی اگر دو جواب داشته باشیم مجموع آنها جواب دیگر سیستم نمی‌باشد. سیستم دینامیکی غیرخطی را نمی‌توان به اجزا کوچکتر تقسیم نموده و هر یک را جداگانه حل کرد، بلکه باید کل سیستم را با هم و یکجا مطالعه و بررسی کرد (برای مثال، وقتی که قسمتهایی از یک سیستم تداخل می-کنند یا با هم کار می‌کنند، یک برهمکنش غیرخطی اتفاق می‌افتد و اصل برهم نهی شکست می‌خورد). پس می‌توان گفت که معادلات مربوط به تحول در این سیستمها حل تحلیلی ندارند و یا حل تحلیلی آنها بسیار مشکل است.

برای تجزیه و تحلیل چنین معادلاتی، دینامیک غیرخطی که در سه بعد منجر به آشوب می‌گردد مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ از اینرو برای تحلیل سیستمهای غیرخطی، آشنایی با یک سری مفاهیم اولیه مانند: نقاط ثابت[۱] و دو شاخه شدنها[۲] (در یک بعد)، سیکلهای محدود[۳] (در دو بعد) و فراکتالها یعنی اشکالی با ابعاد غیر صحیح (در سه بعد) لازم است. این مفاهیم در ادامه مورد بحث قرار خواهند گرفت. سیستمهای دینامیکی غیرخطی را می‌توان به دو طریق مورد مطالعه قرار داد:

- در صورتی که تحول در سیستم نسبت به زمان به صورت پیوسته باشد از معادله دیفرانسیل استفاده می‌شود، مانند معادله نوسانگر هماهنگ میرا یا معادله گرم.

- اما اگر سیستم به صورت گسسته با زمان تحول یابد، به عبارت دیگر در صورتی که زمان به عنوان عامل جداگانه‌ای در نظر گرفته شود، سیستم در قالب نگاشتهای تکرار[٤] مطالعه می‌گردد، مانند، نگاشت لجستیک[٥].

1. Fixed Points 2. Bifurcations 3. Limit Cycles 4. Iterated maps 5. Logistic map

مطالعه سیستمهای دینامیکی غیرخطی هم اکنون سرلوحه مطالعات در بسیاری از علوم از جمله در: فیزیک، نجوم، ریاضیات، بیولوژی، شیمی، اقتصاد، علوم کامپیوتر، هواشناسی و علوم پزشکی می‌باشد.

از آنجائیکه توصیف سیستمهای دینامیکی گسسته در زمان با کمک معادله حالت ویا نگاشتهای تکرار صورت می پذیرد، لذا دراین نوع سیستمها، رابطه‌ای بصورت$x_{n+1}=\mathcal{F}(x_n)$ مابین نقاطی که سیستم انتخاب می‌کند، وجود دارد. این نقاط باهم تشکیل یک مدار می‌دهند(۱۸). براین اساس، منظور از نگاشت، رابطه‌ای تابعی است از$\mathcal{F}:\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ که$\mathcal{R}$ ، مجموعه‌ای است از نقاط حقیقی که بوسیله آن مدار$\mathcal{O}(x_0)$ از نقاط$x_0\in\mathcal{R}$ در قلب گروهی از نقاط تعریف می‌شود:

$$\mathcal{O}(x_0)=(x_0,\mathcal{F}^2(x_0),\mathcal{F}^3(x_0),\dots) \qquad (۱-۲)$$

معادله حالت مرتبه اول با درنظرگرفتن$x_n=\mathcal{F}^n(x_0)$، بصورت زیر بیان می‌گردد:

$$x_{n+1}=\mathcal{F}(x_n). \qquad (۲-۲)$$

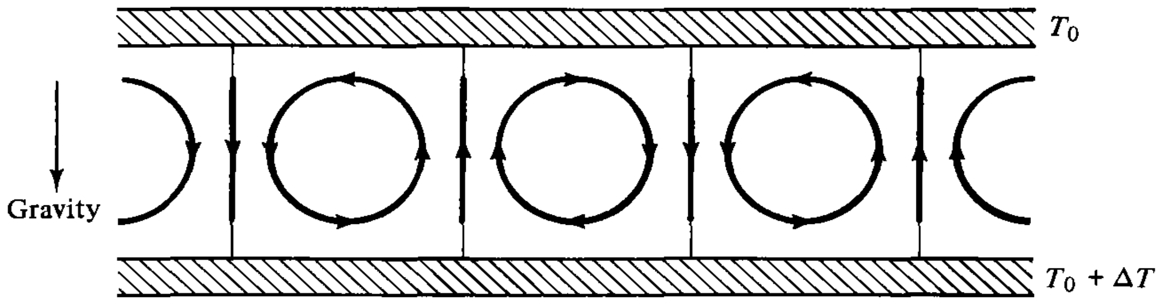
با در نظرگرفتن اینکه رابطه فوق مبنای قاعده‌ای است که براساس آن، نگاشت صورت می‌گیرد، لذا درصورت تمایل می‌توان نگاشتها را براساس چند متغیره بودن آنها، طی (نگاشت لورنتس، نگاشت تنت و ...) و غیرخطی بودن آنها(نگاشت لجستیک، نگاشت هنون و ...)، ویا بعد وابسته به نگاشتها طبقه بندی کرد(۱۸،۱۹).

۲-۱ نگاشتهای خطی:

همانگونه که قبلا اشاره شد، در نگاشتهای خطی، یک رابطه خطی بین سرعت و موقعیت وجود دارد. در ادامه مثالهایی از نگاشتهای خطی یک بعدی ویا دو بعدی که از شهرت بیشتری برخوردار هستند، آورده می‌شود.

نگاشت لورنتس:

لورنتس بر مبنای آزمایش رایلی- بنارد[1]، حرکت سیالی را توصیف نمود. بدین صورت که حرکت سیال مابین دو صفحه تحت تاثیر نیروی جاذبه و برمبنای اختلاف دمای میان این دو صفحه برقرار شده است(شکل(۲-۱)).



شکل ۲-۱: شمای آزمایش رایلی- بنارد

او در سال ۱۹٦۳ مدلی ریاضی راتحت عنوان معادلات لورنتس برای تشریح پدیده فوق معرفی کرد. درحین مطالعه عددی مدل فوق، لورنتس توانست توسط نگاشتی یک متغیره به پژوهش این پدیده بپردازد. این نگاشت را بدین صورت نشان داد(۱٦،۱۸):

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & 0 \le x_n \le \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x_n & \frac{1}{2} \le x_n \le 1, \end{cases} \qquad (۳-۲)$$

نگاشت تنت:

نگاشت تنت توسط معادله (۲-۳) معرفی می‌شود. همانگونه که مشخص است، این نگاشت مشابه با نگاشت لورنتس می‌باشد با این تفاوت که از پارامتر متغیری r که در محدوده$[0,1]$ تغییر می‌کند، بهره مند است. این نگاشت نیز در محدوده$[0,1]$ $x \in$ صورت می‌گیرد. این نگاشت از دو نقطه ثابت که هر دو ناپایدار نیز می‌باشند، برخوردار است(۱٦،۱۸).

1. Rayleigh-Benard

$$x_{n+1}=\begin{cases} rx_n & 0\le x_n\le \frac{1}{2}, \\ r-rx_n & \frac{1}{2}\le x_n\le 1, \end{cases} \tag{۲-٤}$$

نگاشت بکر:

نگاشت بکر را می‌توان توسط رابطه زیر معرفی کرد(۱۸):

$$x_{n+1}=\begin{cases} 2x_n & 0\le x_n\le \frac{1}{2}, \\ 2x_n-1 & \frac{1}{2}\le x_n\le 1, \end{cases}$$

وبه عنوان نمونه ای از نگاشتهای دوبعدی خطی می‌توان به نگاشت دوبعدی که بر مبنای نگاشت بکرایجادشده است، اشاره کرد. پارامتر α در نگاشت زیر، مقداری مابین $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ است(۱٦).

$$(x_{n+1},y_{n+1})=\begin{cases} (2x_n,y_n) & 0\le x_n\le \frac{1}{2}, \\ \left(2x_n-1,\alpha y_{n+\frac{1}{2}}\right) & \frac{1}{2}\le x_n\le 1, \end{cases} \tag{۲-۵}$$

۲-۲ نگاشتهای غیرخطی:

باتوجه به اینکه نگاشتهای غیرخطی فاقد رابطه خطی میان سرعت و موقعیت می‌باشند، در زیر به ذکر مثالهایی که از اهمیت بیشتری برخوردارند، می‌پردازیم.

نگاشت هنون[1]:

نگاشتی دوبعدی و غیرخطی است که توسط هنون، منجم فرانسوی درسال ۱۹۷٦ معرفی شده است. این نگاشت از جمله مشهورترین نگاشتهایی است که بصورت وسیع مورد مطالعه قرار گرفته است(۱۸).

1. Henon map