نام خانوادگی دانشجو: حسینی	نام: علی اکبر
عنوان پایان نامه: حل عددی معادلات انتگرال فردهلم با استفاده از ترکیب توابع بلاک – پالس و سری تیلور	
استاد راهنما: دکتر فرشید میرزائی	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه ملایر–گروه ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: مهر ماه ۱۳۹۰ تعداد صفحات: ۱۰۶	
کلید واژه: معادلات انتگرال فردهلم خطی، توابع متعامد بلاک – پالس، بسط سری تیلور، ترکیب توابع بلاک – پالس و سری تیلور، عملگرهای ماتریسی	

چکیده:

در این پایان نامه، هدف اصلی بحث در مورد ترکیب توابع بلاک – پالس و سری تیلور و استفاده از آن برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم خطی می‌باشد. این پایان نامه شامل چهار فصل می‌باشد که به صورت زیر مرتب شده است. در فصل اول مقدمه‌ای کوتاه در مورد معادلات انتگرال و تعاریف لازم آورده شده است. فصل دوم به روش بسط سری تیلور و کاربرد آن برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم خطی اختصاص یافته است. در فصل سوم توابع متعامد بلاک – پالس معرفی شده و خواص آن مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل چهارم به معرفی ترکیب توابع بلاک – پالس و سری تیلور، بررسی خواص آن و همچنین استفاده از آن برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم خطی مورد مطالعه قرار گرفته است. در هر فصل چندین مثال عددی نیز برای ارائه کارائی این روش‌ها آورده شده است.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا سیر تاریخی پیدایش و تکامل معادلات انتگرال را بررسی می‌کنیم. سپس انواع دسته‌بندی معادلات انتگرال را مشخص می‌کنیم و در ادامه توابع متعامد بلاک–پالس، سری تیلور و در انتها ترکیب توابع بلاک – پالس و سری تیلور را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۱ تاریخچه معادلات انتگرال

معادلات دیفرانسیل و معادلات با مشتقات جزئی از شاخه‌های مهم در ریاضیات می‌باشد که به دلیل کاربردهای فراوان در علوم مهندسی جایگاه ویژه‌ای را در بین شاخه‌های ریاضی به خود اختصاص می‌دهند و به دلیل همین کاربردهای فراوان در علوم، حل اینگونه معادلات مورد توجه بسیاری از محققان و دانشمندان ریاضی بوده است.

لیکن در حل دسته‌ای از این معادلات به معادلاتی می‌رسیم که در آنها تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود. این پدیده که امروز برای ما خیلی آشنا به نظر می‌رسد، منجر به پیدایش شاخه‌ای جدید از علوم ریاضی به نام معادلات انتگرال شده است. در ابتدا حل اینگونه معادلات تحت عنوان معکوس گرفتن از انتگرال تلقی می‌شد، لیکن اولین بار اصطلاح معادله انتگرال به وسیله بویس‌ریموند[۱] پیشنهاد شد. اما در عمل لاپلاس[۲] اولین کسی بود که در سال ۱۷۸۲ معادله انتگرالی به صورت زیر معرفی کرد:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} y(s) ds.$$

معادله انتگرال ارائه شده توسط لاپلاس بعدها تبدیل لاپلاس نامیده شد، که کاربردهای فراوانی برای حل معادلات دیفرانسیل دارد. در جریان تکامل و پیشرفت ریاضیات در سال ۱۸۱۱ فوریه[۳] روی نظریه حرارت کار کرد و مقالاتی از خود به جای گذاشت. سپس در سال ۱۸۲۳ آبل[۴] در مساله خود

[۱] Bose reymond
[۲] Laplace
[۳] Fourier
[۴] Abel

که به مساله مکانیکی آبل معروف است، معادله انتگرال

$$y(t) = \int_{0}^{t} (t-s)^{-\alpha} y(s) ds,$$

را برای حل مساله خویش مطرح نمود. و نیز در سال ۱۸۲۶ پواسن[۱] که روی نظریه مغناطیس کار می‌کرد، به معادله انتگرال

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_{0}^{t} k(t,s) y(s) ds,$$

رسید. پواسن برای حل این معادله، تابع $y(t)$ را به کمک سری توانی با پارامتر λ بسط داد و توانست این مساله را حل نماید. لیوویل[۲] در سال ۱۸۳۲ در حل دسته خاصی از معادلات دیفرانسیل، از معادلات انتگرال استفاده نمود و بعد از وی در سال ۱۸۷۰، نیومن[۳] با تبدیل مساله دیریکله به یک معادله انتگرال از دیگر کسانی بودند که نقش موثری در تکامل نظریه معادلات انتگرال داشتند.

اصطلاح نوع اول و دوم که امروز در معادلات انتگرال به کار می‌رود اولین بار توسط هیلبرت[۴] پیشنهاد شد. البته قبل از هیلبرت معادلات آبل و لیوویل به فرمهای زیر مطرح بود که هر دو از نمونه‌های مهم در معادلات انتگرال هستند:

$$f(t) = \int_{a}^{t} k(t,s) y(s) ds, \quad \text{(معادله انتگرال آبل)}$$

$$y(t) = f(t) + \int_{a}^{t} k(t,s) y(s) ds, \quad \text{(معادله انتگرال لیوویل)}$$

که در آنها $f(t)$ و $k(t,s)$ توابعی معلوم و $y(t)$ تابعی مجهول می‌باشد.

پوانکاره[۵] در سال ۱۸۹۶ معادله انتگرال را در رابطه با یک معادله دیفرانسیل جزئی مطرح نمود. در همان سال که پوانکاره، معادله انتگرال را در خصوص معادله دیفرانسیل جزئی به کار می‌برد دانشمند ایتالیایی به نام ولترا[۶] نظریه معادلات انتگرال را مطرح کرد و گام موثری در پیشرفت معادلات انتگرال برداشت. چند سال بعد در حدود سال‌های ۱۹۰۰ تا ۱۹۰۳ ریاضیدان سوئدی به نام فردهلم[۷] جهت

[۱] Poisson
[۲] Liouville
[۳] Neuman
[۴] Hilbert
[۵] Poincare
[۶] Volterra
[۷] Fredholm

حل مساله دیریکله از معادلات انتگرال نوع دوم استفاده کرد. معادله انتگرال فردهلم به صورت زیر است:

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)y(s)ds \quad ; \quad a \leq t \leq b, \tag{۱.۱}$$

که شامل دسته‌بندی خاصی از معادلات انتگرال ولترا نیز بود. تحقیقات فردهلم منجر به ارائه قضایای فردهلم گردید که از قضایای بنیادی در معادلات انتگرال می‌باشد.

ارائه یک سمینار توسط اریک هولمگر[۱] در سال ۱۹۰۱ بر روی کارهای فردهلم، علاقه هیلبرت را به تحقیق روی معادلات انتگرال برانگیخت و او در حل بسیاری از مسائل ریاضی و فیزیک از معادلات انتگرال بهره گرفت. هیلبرت فاصله[۰, ۱] و هسته $k(t,s)$ را پیوسته فرض کرد. یکی از کارهای مهم هیلبرت فرمول بندی مساله معادلات دیفرانسیل مقادیر مرزی به صورت معادله انتگرال است.

در اوایل نیمه دوم قرن بیستم، تحقیقات زیادی روی جواب معادله انتگرال توسط هرمن ویل[۲] در ارتباط با اینکه به ازای چه مقادیری از λ معادله انتگرال (۱.۱) جواب دارد، صورت گرفت.

مطالعه معادلات انتگرال به عنوان بخش مهمی از ریاضیات کاربردی همچنان ادامه دارد به طوری که در سال‌های اخیر هم زمان با ارائه کارهای نظری برای معادلات انتگرال، روش‌های عددی مبتنی بر روش‌های بسط[۳]، گالرکین[۴] و هم محلی (کالوکیشن)[۵]، موجک‌ها[۶] و غیره توسط محققین زیادی از جمله $K.\ E.\ Atkinson$[۱]، $H.\ Brunner$[۴]، $S.\ Kumar$[۱۷]، $P.\ Linz$[۲۰] و $I.\ Sloan$[۳۲] ارائه شده است. لازم به ذکر است که در حالت کلی بسیاری از معادلات انتگرال به صورت تحلیلی قابل حل نیستند و برای حل آنها از روش‌های عددی (تقریبی) استفاده می‌شود.

۳.۱ تعاریف و دسته‌بندی معادلات انتگرال

با توجه به توسعه معادلات انتگرال و کاربردهای آن یک تقسیم بندی جامع برای آنها ضرورت دارد. از یک طرف انواع معادلات انتگرال در مسائل مختلف فیزیک و مهندسی ظاهر می‌شود و از طرف دیگر روش‌های ارائه شده برای حل انواع مختلف این نوع معادلات متفاوت هستند. با توجه به موارد بالا

---
۱ Erik Holmger
۲ Hermann Weyl
۳ Expansion
۴ Galerkin
۵ Collocation
۶ Wavelets

لازم است که دسته بندی بر حسب نوع تابع مجهول در زیر علامت انتگرال و حد متغیر انتگرال مورد نظر در انتگرال گیری انجام گیرد.

تعریف ۱.۳.۱:

یک معادله انتگرال عبارت است از معادله‌ای که، تابع مجهول زیر یک یا چند علامت انتگرال ظاهر شود و براساس اینکه تابع مجهول به چه صورت در معادله ظاهر شود، به انواع مختلف از معادلات انتگرال منجر می‌شود.

مثال ۲.۳.۱:

معادلات زیر نمونه‌هایی از معادلات انتگرال است که در آنها $a \leq t \leq b$ می‌باشد.

$$y(t) = \int_a^b k(t,s)y(s)ds, \tag{۲.۱}$$

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)y(s)ds, \tag{۳.۱}$$

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)y^{۲}(s)ds, \tag{۴.۱}$$

در معادلات فوق $y(t)$ تابع مجهول و $f(t)$ و $k(t,s)$ توابعی معلوم می‌باشند و همچنین λ عددی حقیقی یا مختلط و معلوم می‌باشد. در ادامه بحث دسته‌بندی از معادلات انتگرال براساس خطی یا غیر خطی را توضیح می‌دهیم.

۱.۳.۱ معادلات انتگرال خطی

تعریف ۳.۳.۱:

معادله‌ای که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر شود، معادله انتگرال خطی[۱] گویند. به عبارت دقیق‌تر اگر معادله انتگرال را به صورت یک عملگر روی تابع مجهول به صورت

$L(y(t)) = f(t),$

در نظر بگیریم و برای هر مقادیر ثابت $c_۱$ و $c_۲$ داشته باشیم:

[۱] Linear integral equations

$L(c_۱y_۱(t)+c_۲y_۲(t))=c_۱L(y_۱(t))+c_۲L(y_۲(t)),$

یعنی L یک عملگر خطی باشد، آنگاه معادله انتگرال متناظر $L(y(t))=f(t)$ را معادله انتگرال خطی گویند. این یک معیار کلی برای تعیین خطی بودن معادله انتگرال است.

فرم عمومی معادلات انتگرال خطی به شکل زیر می‌باشد:

$$h(t)y(t)=f(t)+\lambda\int_a k(t,s)y(s)ds, \tag{۵.۱}$$

که حد بالایی انتگرال می‌تواند متغیر یا ثابت باشد و $f(t)$، $h(t)$ و $k(t,s)$ توابعی معلوم و $y(t)$ تابع مجهول می‌باشد، همچنین $\lambda\neq ۰$ عددی حقیقی یا مختلط می‌باشد.

۱) معادله انتگرال فردهلم خطی

اگر در رابطه (۵.۱) کران بالایی انتگرال را مقدار ثابت b قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$h(t)y(t)=f(t)+\lambda\int_a^b k(t,s)y(s)ds\ , \tag{۶.۱}$$

معادله بالا را معادله انتگرال فردهلم خطی گویند.

اگر در رابطه (۶.۱)، $h(t)=۰$ قرار دهیم، معادله حاصل را معادله انتگرال فردهلم خطی نوع اول گویند و به شکل زیر می‌باشد:

$$f(t)+\lambda\int_a^b k(t,s)y(s)ds=۰\ .$$

و اگر در رابطه (۶.۱)، $h(t)=۱$ قرار دهیم، معادله حاصل را معادله انتگرال فردهلم خطی نوع دوم گویند و به شکل زیر می‌باشد:

$$y(t)=f(t)+\lambda\int_a^b k(t,s)y(s)ds\ .$$

البته رابطه (۶.۱) زمانی که $h(t)\neq ۰$ و $h(t)\neq ۱$ باشد، معادله انتگرال فردهلم خطی نوع سوم نامیده می‌شود.

۲) معادله انتگرال ولترا خطی

اگر در رابطه (۵.۱) کران بالایی انتگرال را متغیر t قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$h(t)y(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t,s)y(s)ds \quad ; \quad a \leq t \leq b \; , \tag{۷.۱}$$

معادله بالا را معادله انتگرال ولترا خطی گویند. دسته بندی معادلات انتگرال ولترا مانند دسته بندی معادلات انتگرال فردهلم می‌باشد.

تعریف ۴.۳.۱:

فضای برداری X را با یک ضرب داخلی تعریف شده روی آن، فضای ضرب داخلی گویند هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (که $\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط می‌باشد) داشته باشیم:

الف) برای هر $x \neq 0$ $(x,x) > 0$،

ب) $(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$،

ج) $(x,y) = \overline{(y,x)}$،

د) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$.

با استفاده از روابط فوق رابطه‌ی زیر را داریم:

$$(z, \alpha x + \beta y) = \overline{\alpha}(z,x) + \overline{\beta}(z,y)$$

هر فضای ضرب داخلی با نُرم $\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$ یک فضای نُرم دار خطی است.

تعریف ۵.۳.۱:

هر فضا با ضرب داخلی که نسبت به نُرم القا شده به وسیله ضرب داخلی، کامل باشد یک فضای هیلبرت [۱] می‌نامیم.

تعریف ۶.۳.۱:

فضای نُرم دار خطی X را کامل گوئیم هرگاه هر دنباله کُوشی در آن به نقطه‌ای از X همگرا باشد. مهمترین فضای هیلبرت در بحث معادلات انتگرال، فضای $L^2(D)$ است که در آن ضرب داخلی به

[۱] Hilbert space

فرم زیر می‌باشد:

$$\forall\, f,g \in L^2(D) \quad ; \quad (f,g) = \int_D f(x)g^*(x)dx \;, \tag{۸.۱}$$

و در آن علامت $(*)$ مزدوج مختلط تابع مورد نظر می‌باشد.

۲.۳.۱ هسته بطور مربع انتگرال پذیر

تعریف ۷.۳.۱:

هسته $k(t,s)$ را بطور مربع انتگرال پذیر[1] گویند، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

الف) $\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 dsdt < \infty$،

ب) $\int_a^b |k(t,s)|^2 ds < \infty$ برای هر t در بازه $[a,b]$،

ج) $\int_a^b |k(t,s)|^2 dt < \infty$ برای هر s در بازه $[a,b]$.

در ضمن وقتی $k(t,s) \in L^2(D)$ نرم آن را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\|k(t,s)\|_2 = \left(\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 dtds\right)^{\frac{1}{2}} . \tag{۹.۱}$$

تعریف ۸.۳.۱:

دنباله غیر بدیهی $\{b_i(t)\}_{i=0}^{\infty}$ از توابع حقیقی (یا مختلط) در $L^2(a,b)$ متعامد[2] به وزن $w(t)$ نامیده می‌شود هرگاه :

$$\Big(w(t)b_i(t), b_j(t)\Big) = \begin{cases} d_i > 0 \;, & i = j \\ 0 \;, & i \neq j \end{cases} \quad ; \quad i,j = 0,1,2,\ldots \quad , \tag{۱۰.۱}$$

و متعامد یکه نامیده می‌شود هرگاه:

$$\Big(w(t)b_i(t), b_i(t)\Big) = 1 \quad ; \quad i = 0,1,2,\ldots \quad . \tag{۱۱.۱}$$

[1] L_2−Function
[2] Orthogonal

در مجموعه‌های متعامد هدف آن است که هر تابع $f(t) \in L^{۲}(a,b)$ را به صورت زیر:

$$f(t) = \sum_{i=۰}^{\infty} c_i b_i(t),$$

بسط دهیم. این کار همواره امکان پذیر نیست، اما چنانچه این عمل میسر باشد آنگاه:

$$c_i = (f(t), b_i(t)) \quad ; \quad i = ۰, ۱, ۲, \dots \quad ,$$

و $\{c_i\}_{i=۰}^{\infty}$ را ضرایب فوریه $f(t)$ نسبت به دنباله $\{b_i(t)\}$ می‌نامیم.
اگر $\{a_i\}_{i=۰}^{\infty}$ یک دنباله دلخواه باشد ثابت می‌شود که:

$$\|f(t) - \sum_{i=۰}^{N} c_i b_i(t)\|^{۲} \leq \|f(t) - \sum_{i=۰}^{N} a_i b_i(t)\|^{۲} \quad ,$$

یعنی خطای میانگین مجذورات برای سری با ضرایب فوریه می‌نیمم مقدار را داراست.

تعریف ۹.۳.۱:

مجموعه متعامد یکه $\{b_i(t)\}_{i=۰}^{\infty}$ کامل نامیده می‌شود اگر

$$\forall \;\; f(t) \in L^{۲}(a,b) \;\; , \;\; (f(t), b_i(t)) = ۰ \;\; ; \;\; i = ۰, ۱, ۲, \dots \quad , \qquad (۱۲.۱)$$

باشد آنگاه:

$$f(t) = ۰ \quad , \quad \text{تقریبا همه جا} \quad .$$

برای جزئیات بیشتر به مرجع [۱۹] مراجعه شود.

قضیه ۱.۳.۱:

اگر $\{b_i(t)\}_{i=۰}^{\infty}$ یک مجموعه متعامد یکه در $L^{۲}(a,b)$ باشد و $f(t) \in L^{۲}(a,b)$ و $\{c_i\}_{i=۰}^{\infty}$ ضرایب فوریه تابع $f(t)$ نسبت به دنباله $\{b_i(t)\}_{i=۰}^{\infty}$ باشد آنگاه:

$$\lim_{N \to +\infty} \|f(t) - \sum_{i=۰}^{N} c_i b_i(t)\| = ۰ \quad ,$$

اگر و تنها اگر $\{b_i(t)\}_{i=۰}^{\infty}$ کامل باشد.
برای اثبات به مراجع [۸] و [۳۳] مراجعه شود.

قضیه ۲.۳.۱:

اگر A یک زیر مجموعه متعامد یکه از فضای هیلبرت H باشد، آنگاه شرایط زیر با هم معادلند.

الف) به ازای هر $y \in H$ داریم: $\|y\|^2 = \sum_{x\in A} |(y,x)|^2$، (اتحاد پارسوال [۱])

ب) A کامل است،

ج) A یک پایه متعامد یکه برای H می‌باشد.

برای اثبات به مراجع [۸] مراجعه شود.

نتیجه ۱.۳.۱ :

بنابر قضیه قبل اگر A، یک مجموعه متعامد یکه کامل از فضای هیلبرت H باشد، آنگاه هر عضو $y \in H$ را می‌توان به صورت سری فوریه

$$\sum_{x\in A} (y,x)x \ ,$$

بسط داد که سری فوریه مذکور به y همگرا است.

[۱] Parseval's identiy

فصل ۲

استفاده از بسط سری تیلور برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم خطی