دانشگاه سمنان

دانشکده علوم پایه

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

گراف‌های جبری

توسط

اسما کرمی زنجیرانی

استاد راهنما

دکتر علی معدنشکاف

استاد مشاور

دکتر ناهید اشرفی

آبان ۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحیم

قدردانی

خداوند منان را سپاس می‌گویم که توفیق انجام کاری هر چند کوچک را در راستای علم به من عطا فرمود.

من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

حال که به یاری خداوند موفق به انجام این پایان نامه شده‌ام، بر خود واجب می‌دانم مراتب سپاسم را به محضر بزرگانی که مرا در این راه یاری نموده‌اند اعلام نمایم: از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر علی معدنشکاف بخاطر راهنمایی‌های ارزنده و بی‌دریغشان تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از سرکار خانم دکتر ناهید اشرفی که از کمک‌های ایشان در طول تحصیل، بهره بسیار بردم، نیز کمال تشکر را دارم. همچنین از جناب آقای دکتر علیرضا اشرفی و جناب آقای دکتر رحمان بهمنی که داوری این مجموعه را بر عهده داشتند سپاس گزارم. همچنین از خانواده و تمام دوستان عزیزم به خصوص از دوست همیشه همراهم منصوره، تقدیر و تشکر می‌نمایم.

تقدیم به :

ساحت مقدس امام زمان (عج)

که توجهات ایشان الهام بخش سختی‌های راه بود.

پدر و مادر عزیزم

آنان‌که وجودم برایشان همه رنج و وجودشان برایم همه مهر است. آنان که راستی قامتم در شکستگی قامتشان تجلی یافت. مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند. فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایه جاودانه من است. در برابر وجود گرمشان زانوی ادب بر زمین می نهم و با قلبی مملو از عشق و محبت بر دستانشان بوسه می‌زنم. سر و وجودشان همیشه سرسبز و استوار باد.

چکیده

نیم گروه S را که برای هر $s \in S$ عضو یکتای s^{-1} از S موجود باشد به طوری که $ss^{-1}s = s$ و $s^{-1}ss^{-1} = s^{-1}$، نیم گروه معکوس گویند. در این پایان نامه با تعریف عمل جزئی نیم گروه معکوس S روی یک مجموعه آشنا می‌شویم. به مجموعه حاصل که به این عمل مجهز شده است یک Sـعمل جزئی می گوییم. سپس Sـگراف ها معرفی می‌شوند. یک Sـگراف یک پنج تایی (X, V, E, ι, τ) می‌باشد که در آن X یک Sـعمل جزئی (چپ)، V و E دو Sـزیرعمل جزئی (چپ) جدا از هم X می‌باشند که $X = V \cup E$. ι و τ دو نگاشت $\iota, \tau : E \longrightarrow V$ هستند که برای هر $e \in E$ و $s \in S$ اگر $e \in D_s$ آن‌گاه $\iota e, \tau e \in D_s$، همچنین داریم $s\iota e = \iota(se)$ و $s\tau e = \tau(se)$. سپس به هر Sـگراف، گراف خارج قسمتی و گراف نیم گروه‌های معکوس آن را نظیر می‌کنیم. در خاتمه همه این ساختارها را با چند مثال توصیف می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: نیم گروه معکوس، رابطه ترتیب طبیعی، Sـعمل جزئی، روابط گرین، Sـگراف، گراف خارج قسمتی، گراف نیم گروه‌های معکوس

مقدمه

اخیراً مطالعات زیادی درباره عمل نیم گروه‌ها روی مجموعه‌ها انجام شده است. لذا طبیعی به نظر می‌رسد که عمل نیم گروه‌ها روی مجموعه‌های با ساختارهای مشخص، مانند گراف‌ها و درخت‌ها بررسی شوند.

هدف از نگارش این پایان نامه مطالعه عمل نیم گروه‌های معکوس روی گراف‌ها است که در مرجع[٦] مورد بررسی قرار گرفته است. مجموعه حاضر مشتمل بر چهار فصل می‌باشد. در فصل اول مفاهیم مقدماتی گراف‌ها و عمل گروه‌ها روی مجموعه‌ها آورده شده است. در فصل دوم نیم گروه معکوس S تعریف می‌شود. نیم گروه معکوس متقارن $\mathcal{I}_X$ که شامل همه نگاشت‌های جزئی یک به یک روی مجموعه X می‌باشد، معرفی می‌شود. سپس متناظر با نمایش کیلی در گروه‌ها، نمایش پرستون — وگنر[١] نیم گروه معکوس S که با تکریختی $\rho : S \longrightarrow \mathcal{I}_S$ مشخص می‌شود را مطالعه می‌کنیم. همچنین رابطه ترتیب جزئی طبیعی " $\leq$ " که برای هر $a, b \in S$، به صورت، $a \leq b$ اگر و تنها اگر عضو خودتوان e از S موجود باشد که $a = eb$، تعریف می شود، مورد بررسی قرار گرفته، احکام معادلی برای آن ثابت می کنیم که در فصل های بعدی از آنها استفاده می کنیم. در فصل سوم عمل جزئی چپ (راست) نیم گروه معکوس S روی مجموعه ناتهی X تعریف می‌شود. دامنه عمل هر $s \in S$ که به صورت $D_s = \{x \in X \mid sx \in X\}$ می‌باشد نشان می‌دهد که در یک عمل جزئی چپ (راست) $s \in S$ روی هر $x \in X$ لزوماً عمل نمی‌کند. در فصل چهارم با تعمیم این بحث به گراف‌ها، Sـگراف‌ها همانند Sـعمل‌ها معرفی و مورد مطالعه قرار می‌گیرند. در آخر با نسبت دادن یک نیم گروه معکوس به هر یال و هر رأس یک Sـگراف، گراف نیم گروه‌های معکوس را توصیف می‌کنیم.

---

[١] Pereston - Vagner

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل با تعاریف و نکات مورد نیاز در فصل‌های بعد، آشنا خواهیم شد. در بخش اول مفاهیم اولیه مربوط به رابطه‌ها را بیان می‌کنیم و در بخش دوم مفاهیم مورد نیاز درباره گراف‌ها آورده شده است.

۱.۱ رابطه‌های دوتایی و برخی از خواص آن‌ها

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. هر زیر مجموعه R از $X \times X$ را یک رابطه روی X گویند.

اگر R یک رابطه روی مجموعه ناتهی X باشد آن‌گاه $R^{-۱} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$ معکوس رابطه R نامیده می‌شود. هرگاه $(x,y) \in R$ می‌گوییم x رابطه R با y دارد و بجای آن می‌نویسیم xRy.
رابطه جامع روی X، رابطه‌ای است که در آن هر عنصر از X با هر عنصر دیگر X رابطه دارد. این رابطه همان $X \times X$ می‌باشد که آن را با ∇_X نیز نمایش می‌دهند. همچنین قرار می‌دهیم $۱_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$ و تعریف می‌کنیم $R \circ R = R^۲$، $R \circ R \circ R = R^۳$، ... و

$$R^\infty = \bigcup \{R^n \mid n \geq ۱\}$$

توجه می‌کنیم که اگر ρ و σ روابط روی X باشند آن‌گاه $(x,y) \in \rho \circ \sigma$ اگر و تنها اگر $z \in X$ موجود باشد به قسمی که $(x,z) \in \rho$ و $(z,y) \in \sigma$.

نکته ۲.۱.۱

۱) فرض کنید R رابطه‌ای روی مجموعه X باشد. در این صورت $R = (R^{-1})^{-1}$.

۲) اگر ρ و σ رابطه‌هایی روی مجموعه X باشند به طوری که $\rho \subseteq \sigma$ آن‌گاه $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$.

تعریف ۳.۱.۱ رابطه R روی مجموعه X که در سه خاصیت زیر صدق کند را رابطه هم‌ارزی روی X گویند.

۱) به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم xRx. یعنی $1_X \subseteq R$. (خاصیت انعکاسی)

۲) اگر xRy آن‌گاه yRx. (خاصیت تقارنی)

۳) اگر xRy و yRz آن‌گاه xRz. (خاصیت تعدی)

خاصیت تقارنی را می‌توان به صورت $R \subseteq R^{-1}$ بیان کرد. در صورت متقارن بودن رابطه R، با توجه به نکته ۲.۱.۱، داریم $R^{-1} \subseteq R$. لذا می‌توان شرط تقارنی R را با $R = R^{-1}$ یکی گرفت. بنابراین در یک رابطه هم‌ارزی مثل R روی مجموعه X داریم $R = R^{-1}$ و $R = 1_X \circ R \subseteq R \circ R$. لذا شرط تعدی بودن رابطه R را با شرط $R \circ R = R$ می‌توان جایگزین کرد.

تعریف ۴.۱.۱ کوچکترین رابطه هم‌ارزی شامل R را رابطه هم‌ارزی تولید شده توسط R گوییم و آن را با R^e نمایش می‌دهیم.

نکته ۵.۱.۱ رابطه R^e برابر با اشتراک همه رابطه‌های هم‌ارزی شامل R می‌باشد.

لم ۶.۱.۱ برای هر رابطه R روی مجموعه X داریم

$$R^e = [R \cup R^{-1} \cup 1_X]^\infty$$

برهان: قرار دهید $S = R \cup R^{-1} \cup 1_X$. ابتدا نشان می‌دهیم S^∞ متعدی است. بدین منظور فرض می‌کنیم $(x,y),(y,z) \in S^\infty$. پس $m,n \in \mathbb{N}$ وجود دارند به طوری که $(x,y) \in S^m$ و $(y,z) \in S^n$. لذا $(x,z) \in S^m \circ S^n \subseteq S^\infty$. پس S^∞ متعدی است.

از آنجایی که $1_X \subseteq S \subseteq S^\infty$، پس S^∞ انعکاسی است. بدیهی است که S متقارن نیز می‌باشد. بنابراین S^n نیز متقارن است. زیرا اگر $(x,y) \in S^n$ آن‌گاه $x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in X$ وجود دارند به طوری که $(x,x_1) \in S, (x_1,x_2) \in S, ..., (x_{n-1},y) \in S$. از تقارنی بودن S داریم که $(y,x_{n-1}) \in S, (x_{n-1},x_{n-2}) \in S, ..., (x_1,x) \in S$. لذا $(y,x) \in S^n$. اما این نشان می‌دهد که S^∞ متقارن است. زیرا اگر $(x,y) \in S^\infty$ آن‌گاه $n \in \mathbb{N}$ موجود است به قسمی که $(x,y) \in S^n$. لذا $(y,x) \in S^n$. پس $(y,x) \in S^\infty$. بنابراین $S^\infty = [R \cup R^{-1} \cup 1_X]^\infty$ رابطه هم‌ارزی شامل R می‌باشد.

حال فرض کنید σ رابطه هم‌ارزی دیگری روی X، شامل R باشد. در این صورت داریم $1_X \subseteq \sigma$ و $R^{-1} \subseteq \sigma^{-1} = \sigma$. بنابراین $S = R \cup R^{-1} \cup 1_X \subseteq \sigma$. لذا $S \circ S \subseteq \sigma \circ \sigma = \sigma$. به طور کلی برای $n \geq 1$ داریم $S^n \subseteq \sigma$. پس $S^\infty \subseteq \sigma$.

پس نشان دادیم S^∞ کوچکترین رابطه هم‌ارزی شامل R روی X می باشد. لذا با توجه به تعریف ۴.۱.۱، داریم $R^e = [R \cup R^{-1} \cup 1_X]^\infty$. □

اگر ρ و σ روابط هم‌ارزی روی X باشند، آن‌گاه رابطه هم‌ارزی تولید شده توسط $\rho \cup \sigma$ را با $\rho \vee \sigma$ نشان می‌دهند. به عبارت بهتر $(\rho \cup \sigma)^e = \rho \vee \sigma$.

قضیه ۷.۱.۱ فرض کنیم ρ و σ روابط هم‌ارزی روی مجموعه X باشند. در این صورت داریم

$$\rho \vee \sigma = (\rho \circ \sigma)^{\infty} = (\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \sigma \circ \rho) \cup (\rho \circ \sigma \circ \rho \circ) \cup \ldots$$

برهان: طبق لم بالا و این که $\rho \vee \sigma$ رابطه هم‌ارزی تولید شده توسط $\rho \cup \sigma$ است داریم

$$\rho \vee \sigma = (\rho \cup \sigma)^{e} = R^{\infty}$$

که در آن $R = (\rho \cup \sigma) \cup (\rho \cup \sigma)^{-1} \cup 1_X = \rho \cup \sigma$. تساوی آخر به این دلیل است که $\rho = \rho^{-1}$، $\sigma = \sigma^{-1}$، $1_X \subseteq \rho$ و $1_X \subseteq \sigma$. از آنجا که $\rho \subseteq \rho \cup \sigma$ و $\sigma \subseteq \rho \cup \sigma$ لذا $\rho \circ \sigma \subseteq (\rho \cup \sigma) \circ (\rho \cup \sigma) = (\rho \cup \sigma)^{2}$. با استقرا روی $n \geq 1$ داریم $(\rho \circ \sigma)^{n} \subseteq (\rho \cup \sigma)^{2n}$. پس

$$(\rho \circ \sigma)^{\infty} \subseteq (\rho \cup \sigma)^{\infty} = \rho \vee \sigma$$

برای نشان دادن عکس جزئیت، توجه می‌کنیم که چون ρ و σ رابطه‌های هم‌ارزی هستند پس $\rho \subseteq \rho \circ \sigma$ و $\sigma \subseteq \rho \circ \sigma$. بنابراین $\rho \cup \sigma \subseteq \rho \circ \sigma$. پس داریم

$$\rho \vee \sigma = (\rho \cup \sigma)^{\infty} \subseteq (\rho \circ \sigma)^{\infty}$$

در نتیجه $\rho \vee \sigma = (\rho \circ \sigma)^{\infty}$. □

۲.۱ درآمدی بر گراف‌ها

تعریف ۱.۲.۱ گراف G یک سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \Psi_G)$، متشکل از مجموعه ناتهی $V(G)$ی رأس‌ها، مجموعه $E(G)$ی یال‌ها، مجزا از $V(G)$ و تابع وقوع Ψ_G است که به هر یال G یک جفت نامرتب (نه لزوماً متمایز) از رأس‌های G را نظیر می‌کند. اگر e یک یال و u و v رأس‌هایی باشند به قسمی که $\Psi_G(e) = uv$، آن‌گاه می‌گویند e، رأس u را به رأس v وصل می کند. رأس‌های u و v را دو انتهای e می‌نامند.

تعداد یال‌های واقع بر یک رأس v را درجه v می‌گویند و با $\deg(v)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲.۲.۱ گراف سودار D یک سه‌تایی مرتب $(V(D), A(D), \Psi_D)$ است که متشکل از مجموعه ناتهی $V(D)$ی رأس‌ها، مجموعه $A(D)$ی کمان‌ها مجزا از $V(D)$ و یک تابع وقوع Ψ_D است که به هر کمان D یک جفت مرتب (نه لزوماً مجزا) از رأس‌های D نظیر می‌کند.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنید G یک گراف با مجموعه رئوس V و V' زیرمجموعه ناتهی V باشد. زیرگرافی از G را که مجموعه‌ی رأس‌هایش V' است و مجموعه‌ی یال‌هایش مجموعه‌ای از آن یال‌های G است که هر دو انتهایشان در V' است، زیرگراف القا شده به وسیله V' می‌نامند و با $G[V']$ نشان می‌دهند.

دو رأس u و vی G را همبند خوانند اگر مسیری بین این دو در G موجود باشد. همبندی، یک رابطه هم‌ارزی در مجموعه رأس‌های V است. بنابراین افرازی از V به زیرمجموعه‌های ناتهی V_1، V_2،...، V_w وجود دارد به طوری که دو رأس u و v همبندند اگر و تنها اگر u و v هر دو متعلق به یک مجموعه V_i باشند. زیرگراف‌های $G[V_1]$، $G[V_2]$، ... ، $G[V_w]$ را مؤلفه‌های G می‌نامند. اگر G دارای دقیقاً یک مؤلفه باشد، G همبند است. در غیر این صورت G را ناهمبند گوییم.

۳.۱ عمل گروه روی یک مجموعه (Gـمجموعه)

در این بخش G را یک گروه که e عضو همانی آن است در نظر می‌گیریم و با عمل گروه روی یک مجموعه آشنا می‌شویم. مجموعه مجهز شده به عمل فوق را Gـمجموعه می‌نامیم. همچنین پایدارسازها و مدارهای یک Gـمجموعه را نیز تعریف کرده، خواص آن‌ها بررسی می‌شود.

تعریف ۱.۳.۱ مجموعه ناتهی X را Gـمجموعه (چپ) گویند، هرگاه G با جایگشت‌ها روی آن عمل کند. یعنی همریختی گروهی $\rho : G \longrightarrow SymX$، که $SymX$ گروه متقارن (جایگشت‌ها) روی X

است، موجود باشد. برای هر $g \in G$ داریم $\rho(g) : X \longrightarrow X$، لذا برای هر $x \in X$، $\rho(g)(x)$ را با gx نمایش می‌دهیم.

لم ۲.۳.۱ مجموعه ناتهی X یک Gـمجموعه است، اگر و تنها اگر عمل $* : G \times X \longrightarrow X$ موجود باشد به طوری که داشته باشیم:

۱) به ازای هر $x \in X$، $e * x = x$،

۲) برای هر $g_1, g_2 \in G$ و هر $x \in X$، $(g_1 g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$.

برهان: به سادگی معادل بودن این لم با تعریف Gـمجموعه، به دست می‌آید. □

تعریف ۳.۳.۱ فرض کنیم X و Y دو Gـمجموعه هستند. تابع $f : X \longrightarrow Y$ را Gـنگاشت می‌گویند، هرگاه برای هر $x \in X$ و هر $g \in G$ داشته باشیم $f(gx) = gf(x)$.

تعریف ۴.۳.۱ فرض کنید X یک Gـمجموعه و $x \in X$ باشد. Gـمدار x را که با Gx نمایش می‌دهند، برابر است با $Gx = \{gx \mid g \in G\}$.

نکته ۵.۳.۱

۱) اگر X، Gـمجموعه باشد، آن‌گاه رابطه زیر یک رابطه هم‌ارزی روی X است.

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \exists g \in G \; ; \; x_1 = gx_2$$

کلاس‌های حاصل از این رابطه همان Gـمدارها هستند. زیرا اگر کلاس هم‌ارزی شامل x را با $\bar{x}$ نشان دهیم آن‌گاه داریم

$$\bar{x} = \{y \in X \mid y \sim x\} = \{y \in X \mid \exists g \in G;\ y = gx\} = \{gx \mid g \in G\} = Gx \subseteq X$$

۲) برای هر $x \in X$، Gx، Gـزیرمجموعه X می‌باشد.

تعریف ۶.۳.۱ فرض کنیم X، Gـمجموعه است. برای هر $x \in X$، مجموعه $\{g \in G \mid gx = x\} \subseteq G$ را Gـپایدارساز x گویند و با G_x نمایش می‌دهند.

تذکر ۷.۳.۱ الف) G_x زیرگروهی از G است.

زیرا از Gـمجموعه بودن X داریم $e \in G_x$. پس $G_x \neq \emptyset$. برای هر $g, g_1, g_2 \in G_x$ داریم

۱) $x = ex = g^{-1}gx = g^{-1}(gx) = g^{-1}x$، پس $g^{-1} \in G_x$.

۲) $(g_1 g_2^{-1})x = g_1(g_2^{-1}x) = g_1 x = x$. لذا $g_1 g_2^{-1} \in G_x$.

بنابراین G_x زیرگروه G می‌باشد.

ب) برای هر $g \in G$ داریم $G_{gx} = gG_xg^{-1}$.

زیرا برای هر $h \in G_{gx}$ داریم

$$(g^{-1}hg)x = g^{-1}(hgx) = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = ex = x$$

پس $g^{-1}hg \in G_x$. بنابراین $h = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in gG_xg^{-1}$. لذا $G_{gx} \subseteq gG_xg^{-1}$.

برعکس، اگر $h \in gG_xg^{-1}$، آن‌گاه $k \in G_x$ موجود است به طوری که $h = gkg^{-1}$. اما $h = gkg^{-1} \in G_{gx}$. زیرا

$$(gkg^{-1})(gx) = (gkg^{-1}g)x = (gke)x = (gk)x = g(kx) = gx$$

بنابراین $gG_xg^{-1} \subseteq G_{gx}$. پس داریم $G_{gx} = gG_xg^{-1}$.

قضیه ۸.۳.۱ مجموعه Gx، با هم‌مجموعه‌های چپ G_x در G که با G/G_x نشان داده می‌شود Gـیکریخت می‌باشد.

برهان: ابتدا نشان می‌دهیم $G/G_x = \{gG_x \mid g \in G\}$ یک Gـمجموعه است. برای این منظور، عمل $* : G \times G/G_x \longrightarrow G/G_x$ را با ضابطه $(g, g'G_x) \mapsto (gg')G_x$ برای هر $g, g' \in G$، تعریف می‌کنیم. در این صورت $e * g'G_x = (eg')G_x = g'G_x$ و برای هر $g_1, g_2 \in G$ داریم

$$(g_1 g_2) * (g'G_x) = (g_1 g_2 g')G_x = g_1(g_2 g'G_x) = g_1 * (g_2 * g'G_x)$$

تعریف می‌کنیم $\varphi : G/G_x \longrightarrow Gx$ که $gG_x \mapsto gx$. ثابت می‌کنیم φ خوش تعریف، Gـنگاشت، یک به یک و پوشا است.
نگاشت φ خوش تعریف است، زیرا اگر $g_1 G_x = g_2 G_x$ آن‌گاه $g_2^{-1} g_1 \in G_x$. لذا $(g_2^{-1} g_1)x = x$. چون X، Gـمجموعه است، لذا $g_1 x = g_2 x$. بنابراین $\varphi(g_1 G_x) = g_1 x = g_2 x = \varphi(g_2 G_x)$. اگر عکس خوش تعریفی را بنویسیم یک به یک بودن φ به دست می‌آید. اما برای پوشایی φ، فرض کنیم $h \in Gx$. لذا $g \in G$ موجود است به قسمی که $h = gx$. پس $\varphi(gG_x) = gx = h$.
برای اتمام برهان، کافی است نشان دهیم φ، Gـنگاشت است. برای هر $g' \in G$ و $gG_x \in G/G_x$ داریم $\varphi(g'(gG_x)) = \varphi(g'gG_x) = (g'g)x = g'(gx) = g'\varphi(gG_x)$. لذا φ، Gـنگاشت است. پس $G/G_x \cong Gx$. □

تعریف ۹.۳.۱ مجموعه خارج قسمتی Gـمجموعه X، برابر با مجموعه Gـمدارها می‌باشد که با $G \setminus X$ نمایش داده می‌شود. به عبارت دیگر $G \setminus X = \{Gx \mid x \in X\}$.

فصل ۲

نیم گروه و نیم گروه معکوس

در این فصل با تعریف نیم گروه و نیم گروه معکوس آشنا می شویم. خواص و قضیه‌های مربوط به نیم گروه معکوس بیان خواهد شد. روابط هم ارزی گرین که اولین بار توسط گرین[۱] در سال ۱۹۵۱ مطرح شد را بیان می کنیم. این روابط نقش اساسی در توسعه نظریه نیم گروه‌ها دارند. همچنین در این فصل نمایشی از نیم گروه معکوس را خواهیم دید که به نمایش پرستون — وگنر معروف می‌باشد. با یک رابطه ترتیب جزئی که روی نیم گروه تعریف می‌شود، آشنا می‌شویم.

این فصل پیش زمینه‌ی مهمی برای فصل سوم می باشد.

۱.۲ نیم گروه و خواص آن

تعریف ۱.۱.۲ فرض کنید S یک مجموعه ناتهی باشد.مجموعه S، همراه با عمل شرکت پذیر $\cdot$ را نیم گروه گوییم. به عبارت دیگر برای هر $x, y, z \in S$ داریم $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$. برای سادگی $x\cdot y$ را با xy نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۲ مجموعه ناتهی T از S را زیرنیم گروه S گوییم، هرگاه $T^{2} \subseteq T$. یعنی برای هر $x, y \in T$ داشته باشیم $xy \in T$.

[۱] Green

تعریف ۳.۱.۲ زیرمجموعه A از نیم گروه S را یکانی راست گوییم، هرگاه

$$(\forall a \in A)(\forall s \in S); \quad sa \in A \Rightarrow s \in A$$

یکانی چپ گوییم، هرگاه

$$(\forall a \in A)(\forall s \in S); \quad as \in A \Rightarrow s \in A$$

و یکانی گوییم اگر هم یکانی راست و هم یکانی چپ باشد.

تعریف ۴.۱.۲ عنصر a از نیم گروه S را منظم گویند، هرگاه $x \in S$ موجود باشد به طوری که $axa = a$. نیم گروه S را منظم گویند، وقتی که همه عناصر آن منظم باشد.

عضوی از نیم گروه S مثل a، که برای هر $s \in S$ داشته باشیم $as = sa = a$ را "صفر" نیم گروه گویند. به همین دلیل این عنصر را با $\circ$ نمایش می‌دهیم.
عضوی مثل $b \in S$ که برای هر $s \in S$ داشته باشیم $bs = sb = s$، عنصر "یک" نیم گروه نامیده می‌شود و با ۱ نمایش داده می‌شود. هر نیم گروه لزوماً دارای این دو عنصر نیست، اما نیم گروهی که صفر داشته باشد را نیم گروه با صفر گویند و نیم گروه دارای یک را تکواره می‌نامند. اگر عنصر ۱ را به نیم گروه S اضافه کنیم آن‌گاه آن را با $S^{۱} = S \cup \{۱\}$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه همه روابط دوتایی روی مجموعه دلخواه X را با $\mathcal{B}_X$ نمایش دهیم. عمل دوتایی $\circ$ را برای $\rho, \sigma \in \mathcal{B}_X$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho \circ \sigma = \{(x, y) \in X \times X \mid \exists z \in X; \quad (x, z) \in \rho, (z, y) \in \sigma\}$$

در این صورت داریم

گزاره ۵.۱.۲ $(\mathcal{B}_X, \circ)$ نیم گروه است.

برهان: فرض کنید $\rho, \sigma, \tau \in \mathcal{B}_X$ آن‌گاه برای هر $x, y \in X$ داریم

$$\begin{aligned}(x,y) \in (\rho \circ \sigma) \circ \tau \quad &\Leftrightarrow \quad \exists z \in X : (x,z) \in \rho \circ \sigma, (z,y) \in \tau \\ &\Leftrightarrow \quad \exists z, u \in X : (x,u) \in \rho, (u,z) \in \sigma, (z,y) \in \tau \\ &\Leftrightarrow \quad \exists u \in X : (x,u) \in \rho, (u,y) \in \sigma \circ \tau \\ &\Leftrightarrow \quad (x,y) \in \rho \circ (\sigma \circ \tau)\end{aligned}$$

بنابراین $(\rho \circ \sigma) \circ \tau = \rho \circ (\sigma \circ \tau)$. در نتیجه $\circ$ شرکت پذیر است. □

برای هر $\rho \in \mathcal{B}_X$ دامنه و برد ρ به ترتیب برابر است با

$$\begin{aligned}Dom\rho &= \{x \in X \mid \exists y \in X; \;\; (x,y) \in \rho\} \\ Im\rho &= \{y \in X \mid \exists x \in X; \;\; (x,y) \in \rho\}\end{aligned}$$

برای هر $x \in X$ و هر $\rho \in \mathcal{B}_X$، زیرمجموعه $x\rho$ از X برابر است با

$$x\rho = \{y \in X \mid (x,y) \in \rho\}$$

بنابراین $x\rho \neq \emptyset$ اگر و تنها اگر $x \in Dom\rho$.

همچنین داریم $Im\rho^{-1} = Dom\rho$ و $Dom\rho^{-1} = Im\rho$.

اگر برای هر $x \in Dom\rho$ داشته باشیم $\mid x\rho \mid = 1$ آن‌گاه ρ را نگاشت جزئی روی X گوییم. این معادل با این است که برای هر $x, y_1, y_2 \in X$

$$(x, y_1) \in \rho, (x, y_2) \in \rho \Rightarrow y_1 = y_2$$

گزاره ۶.۱.۲ زیرمجموعه $\mathcal{P}_X$ از $\mathcal{B}_X$، شامل همه نگاشت‌های جزئی روی X، زیرنیم گروه $\mathcal{B}_X$ است.

برهان: فرض کنیم $\Phi, \Psi \in \mathcal{P}_X$ و $(x, y_1), (x, y_2) \in \Phi \circ \Psi$. بنابراین $z_1, z_2 \in X$ وجود دارند به طوری که $(x, z_1) \in \Phi$، $(z_1, y_1) \in \Psi$، $(x, z_2) \in \Phi$ و $(z_2, y_2) \in \Psi$. چون Φ، نگاشت جزئی است داریم $z_1 = z_2$ و چون Ψ نگاشت جزئی است داریم $y_1 = y_2$. پس $\Phi \circ \Psi \in \mathcal{P}_X$. □