بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان:

روش آشفتگی هموتوپی پیراسته و روش تجزیه آدومیان دوگامی برای حل معادلات انتگرال

استاد راهنما:

دکتر حسن حسین زاده

استاد مشاور:

دکتر حسین جعفری

نگارش:

عادل بابائی کفشگری

شهریور ماه ۱۳۹۰

تقدیم به:

پدر مهربان و مادر صبورم

قدردانی

سپاس خداوندی را که سخنوران از ستودن او عاجزند و حساب گران از شمارش نعمت‌های او ناتوان و تلاش گران از ادای حق او درمانده‌اند. خدایی که افکار ژرف اندیش، ذات او را درک نمی‌کنند و دست غوّاصان دریای علوم به او نخواهد رسید.

اکنون وقت آن است تا سپاسگزار بزرگوارانی باشم که خوشه‌چین خوان علم و اخلاق‌شان بودم. ابتدا سپاس بیکران و خالصانه خویش را نثار پدر و مادر مهربانم می‌کنم که همواره حامی و مشوق من بوده‌اند، سپس از استاد مهربانم دکتر حسن حسین زاده به پاس تمام راهنمایی‌ها و زحماتشان صمیمانه سپاسگزارم و همچنین از جناب دکتر حسین جعفری کمال تشکر را دارم.

چکیده:

در این پایان نامه، پس از بیان تعاریف اولیه و مفاهیم پایه‌ای در مورد معادلات انتگرال و هموتوپی، به بررسی روش‌های حل معادلات انتگرال می‌پردازیم. سپس روش تجزیه آدومیان و روش آشفتگی هموتوپی برای حل معادلات انتگرال را مورد بررسی قرار می‌دهیم و هم ارزی این دو روش را در حل معادلات غیر خطی نشان می‌دهیم.

سرانجام روش‌های تجزیه آدومیان دو گامی و آشفتگی هموتوپی پیراسته که بهبود روش‌های پیشین هستند را معرفی و تشریح کرده و از آنها در حل معادلات انتگرال استفاده می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال، روش تجزیه آدومیان، روش آشفتگی هموتوپی، روش تجزیه آدومیان دو گامی، روش آشفتگی هموتوپی پیراسته.

فهرست مندرجات

پیش گفتار:

یکی از شاخه‌های علم ریاضی که کاربردهای فراوانی در مسائل مهندسی و فیزیک دارد، معادلات انتگرال است. تاکنون روش‌های گوناگونی برای حل معادلات انتگرال به کار گرفته شده‌اند. از جمله این روش‌ها، روش محاسبه مستقیم، روش جایگذاری‌های متوالی و ... هستند. در اوائل دهه ۱۹۸۰، روش تجزیه [۱و۲] توسط آدومیان [۱] برای حل انواع مختلف معادلات غیر خطی، معرفی و تشریح شد. یک بهبود از این روش توسط وزواز[۲] معرفی شد [۸] که برای معادلات انتگرال فردهلم [۳] و ولترا[۴] ناهمگن قابل به کارگیری است. باید توجه کرد که یک شرط لازم برای اعمال این روش مورد نیاز است و آن این که قسمت ناهمگن معادله را بتوان به صورت جمع لااقل دو جمله نشان داد. یکی از مشکلات استفاده از این روش این است که مقیاس تقسیم قسمت ناهمگن معادله به دو قسمت عملی، به خوبی توضیح داده نشده است. روش تجزیه آدومیان دو گامی [۷] که توسط لئو[۵] مطرح گردید، این مشکل را برطرف کرده و همچنین در بسیاری از مسائل، حجم محاسبات را کمتر می‌کند. همچنین یکی از روش‌های تشریح شده برای حل معادلات انتگرال، روش آشفتگی هموتوپی [۴] است که توسط هی [۶] معرفی و تشریح شده است که در واقع یک ترکیب از روش آشفتگی سنّتی و روش هموتوپی در توپولوژی است. برای معادلات انتگرال فردهلم با هسته‌های جدایی پذیر، یک بهبود از این روش به نام روش آشفتگی هموتوپی پیراسته [۳و۵]، مطرح گردیده است که در آن از پارامترهای شتاب دهنده استفاده می‌شود. این روش سرعت همگرایی روش آشفتگی هموتوپی را زیاد می‌کند و همچنین در حل بعضی از مسائل که روش آشفتگی هموتوپی قادر به حل آنها نمی‌باشد، این روش بهبود یافته به خوبی عمل می‌کند. در حل معادلات انتگرال فردهلم خطی با هسته‌های جدایی پذیر، این روش جواب دقیق را به دست می‌دهد، همچنین اگر این روش را برای حل معادله انتگرال فردهلم

[۱] Adomian
[۲] Wazwaz
[۳] Fredholm
[۴] Volterra
[۵] Luo
[۶] He

غیر خطی

$$u(x) = G(x) + \int_{0}^{1} K(x,t)T(u(t))dt, \quad 0 \le x \le 1,$$

به کار ببریم، مشاهده می‌کنیم که با داشتن تنها دو جمله از سری جواب، تقریب خوبی از جواب معادله به دست می‌آید.

این پایان نامه در ۴ فصل به صورت زیر تدوین شده است:

در فصل اول، به بیان تعاریف اولیه در زمینه معادلات انتگرال و هموتوپی می‌پردازیم.

در فصل دوم، به بررسی روش‌های حل معادلات انتگرال می‌پردازیم.

در فصل سوم، روش تجزیه آدومیان و تجزیه آدومیان بهبود یافته و روش آشفتگی هموتوپی معرفی و تشریح می‌گردد، سپس هم ارزی روش‌های تجزیه آدومیان و آشفتگی هموتوپی در حل معادلات، بررسی می‌شود [۷].

در فصل چهارم، روش تجزیه آدومیان دو گامی و روش آشفتگی هموتوپی پیراسته که در واقع بهبود روش‌های پیشین هستند معرفی و از آنها برای حل معادلات انتگرال بهره می‌گیریم.

فصل ۱

تعاریف پایه و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل به تعاریف اولیه در مورد معادلات انتگرال و تقسیم بندی آنها می‌پردازیم. سپس تبدیل معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال به یکدیگر مورد بررسی قرار می‌گیرد. در پایان تعاریف اولیه از هموتوپی ارائه می‌شود. مراجع [۹ و ۱۰] مراجع اصلی این فصل می‌باشند.

۲.۱ تعریف معادله انتگرال

یک معادله انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد.
یک نمونه از یک معادله انتگرال که در آن $u(x)$ تابع مجهولی است که باید معلوم شود به صورت زیر است:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt. \qquad (۱.۲.۱)$$

$K(x,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می‌شود. $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال هستند. باید توجه کرد که $K(x,t)$ و $f(x)$ از قبل معلوم هستند و λ هم یک پارامتر معلوم می‌باشد.

۳.۱ تقسیم بندی معادلات انتگرال

به طور کلی معادلات انتگرال را می‌توان به حالت‌های زیر تقسیم کرد:

۱.۳.۱ معادلات انتگرال نوع اول و دوم

اگر در معادله (۱.۲.۱)، $\phi(x) = ۰$ باشد معادله انتگرال از نوع اول نامیده می‌شود و اگر $\phi(x) = ۱$ باشد معادله انتگرال از نوع دوم می‌باشد.

۲.۳.۱ معادلات انتگرال فردهلم و معادلات انتگرال ولترا

اگر در معادله (۱.۲.۱)، حدود انتگرال عدد ثابت باشند معادله انتگرال را معادله انتگرال فردهلم می‌نامند.
اگر حدود انتگرال به متغیر معادله بستگی داشته باشد معادله انتگرال را معادله انتگرال ولترا می‌نامند.

۳.۳.۱ معادلات انتگرال همگن و غیر همگن

اگر در معادله انتگرال فردهلم نوع دوم و معادله انتگرال ولترا نوع دوم، شرط $f(x) = ۰$ برقرار باشد، آن گاه معادله حاصل را یک معادله همگن نامند. در غیر این صورت معادله مورد نظر را یک معادله انتگرال غیر همگن می‌گویند.

۴.۳.۱ معادلات انتگرال خطی و غیر خطی

معادله (۱.۲.۱) که در آن تابع مجهول $u(x)$ در زیر علامت انتگرال به صورت توان یک ظاهر می‌شود یک معادله انتگرال خطی نامیده می‌شود. اما زمانی که به جای $u(x)$ عبارتی نظیر $F(u(x))$ آورده شود معادله انتگرال غیر خطی خواهد بود.

۵.۳.۱ معادلات انتگرال – دیفرانسیل

اگر در معادله انتگرال، مشتق تابع مجهول در خارج از نماد انتگرال باشد آن معادله، معادله انتگرال ـدیفرانسیل نامیده می‌شود.

۶.۳.۱ معادلات انتگرال منفرد

هرگاه در معادله (۱.۲.۱)، حد پایین یا حد بالا یا هر دو حدود انتگرال گیری نامتناهی باشند معادله را معادله انتگرال منفرد می‌نامند. به علاوه اگر هسته معادلات انتگرال در یک نقطه یا در نقاط بیشتری از دامنه انتگرال گیری نامتناهی باشد باز هم این گونه معادلات را معادلات انتگرال منفرد می‌نامند.

۴.۱ جواب یک معادله انتگرال

یک جواب یک معادله انتگرال یا معادله انتگرال – دیفرانسیل روی فاصله انتگرال گیری یک تابع $u(x)$ است به طوری که آن تابع در معادله داده شده صدق کند.

مثال ۱: نشان دهید که $u(x) = e^x$ یک جواب از معادله انتگرال زیر است:

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt.$$

حل: با جایگذاری $u(x) = e^x$ در طرف راست (RHS) داریم:

$$RHS = 1 + \int_0^x e^t dt = 1 + [e^t]_0^x = e^x = u(x) = LHS$$

۵.۱ تبدیل معادلات انتگرال ولترا به معادلات دیفرانسیل معمولی

در این بخش روشی که معادلات انتگرال ولترا نوع دوم را به معادلات دیفرانسیل معادل تبدیل می‌کند ارائه می‌شود. این کار به سادگی با اعمال قاعده لایب نیتز[۱] در زمینه مشتق یک انتگرال انجام می‌شود.

قاعده لایب نیتز برای مشتق یک انتگرال

برای مشتق گرفتن از $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x,t)dt$ نسبت به x قاعده لایب نیتز به صورت زیر به کار می‌رود:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x,t)dt &= G(x,\beta(x))\frac{d\beta}{dx} \\ &- G(x,\alpha(x))\frac{d\alpha}{dx} + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial G}{\partial x}dt. \end{aligned} \qquad (۱.۵.۱)$$

که در آن $G(x,t)$ و $\frac{\partial G}{\partial x}$ توابعی پیوسته روی دامنه D می‌باشند و D ناحیه‌ای در صفحه است که شامل مستطیل R می‌باشد و $R = \{(x,t): \quad a \le x \le b, \quad t_۰ \le t \le t_۱\}$ در ضمن حدود انتگرال گیری یعنی $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ توابعی هستند که مشتق‌های پیوسته روی فاصله (a,b) دارند.

مثال ۲: $\frac{d}{dx}\int_۰^x (x-t)^۲ u(t)dt$ را پیدا کنید:

حل: در این مثال $\alpha(x) = ۰$ و $\beta(x) = x$، لذا $\alpha'(x) = ۰$ و $\beta'(x) = ۱$ و $\frac{\partial G}{\partial x} = ۲(x-t)u(t)$. با استفاده از قاعده (۱.۵.۱) داریم:

$$\frac{d}{dx}\int_۰^x (x-t)^۲ u(t)dt = \int_۰^x ۲(x-t)u(t)dt$$

اکنون به هدف اصلی یعنی تبدیل یک معادله انتگرال ولترا به یک معادله دیفرانسیل بر می‌گردیم. این کار به سادگی با مشتق گرفتن از دو طرف معادله انتگرال مورد نظر و استفاده از قاعده لایب نیتز انجام می‌شود.

[۱] Liebniz Rule

مثال ۳: معادله انتگرال زیر را به یک مسأله مقدار اولیه تبدیل کنید:

$$u(x) = x + \int_{\circ}^{x} (t-x)u(t)dt. \qquad (۲.۵.۱)$$

حل: با مشتق گرفتن از دو طرف معادله انتگرال به دست می‌آوریم:

$$u^{'}(x) = ۱ - \int_{\circ}^{x} u(t)dt, \qquad (۳.۵.۱)$$

از دو طرف معادله انتگرال ـدیفرانسیل (۳.۵.۱) مشتق می‌گیریم تا نماد انتگرال حذف شود، لذا به دست می‌آوریم:

$$u^{''}(x) = -u(x),$$

یا می‌توان نوشت:

$$u^{''}(x) + u(x) = \circ,$$

با جایگذاری $x = \circ$ در معادلات (۲.۵.۱) و (۳.۵.۱) به دست می‌آوریم که $u(\circ) = \circ$ و $u^{'}(\circ) = ۱$.

با ترکیب نتایج بالا مسأله مقدار اولیه مرتبه دوم معادل به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$u^{''}(x) + u(x) = \circ, \quad u(\circ) = \circ, \quad u^{'}(\circ) = ۱.$$

۶.۱ تبدیل مسائل مقدار اولیه به معادلات انتگرال ولترا

در این بخش روش تبدیل یک مسأله مقدار اولیه به یک معادله انتگرال ولترا را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

تبدیل انتگرال‌های چندگانه به انتگرال‌های یک گانه

$$\int_{0}^{x}\int_{0}^{x_1}\int_{0}^{x_2}\cdots\int_{0}^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n\cdots dx_1=\frac{1}{(n-1)!}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)dt. \qquad (1.6.1)$$

این یک دستور اساسی و مفید است و در روشی که برای انجام روش‌های تبدیلی ارائه می‌شود مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مثال ۴: انتگرال سه گانه زیر را به یک انتگرال یک گانه تبدیل کنید:

$$I(x)=\int_{0}^{x}\int_{0}^{x}\int_{0}^{x}u(t)dtdtdt,$$

حل: با استفاده از دستور (۱.۶.۱) و قرار دادن مقدار $n=3$ به انتگرال یک گانه زیر می‌رسیم:

$$I(x)=\frac{1}{2!}\int_{0}^{x}(x-t)^{2}u(t)dt.$$

اکنون به هدف اصلی خود در این بخش بر می‌گردیم و روش تبدیل یک مسأله مقدار اولیه به یک معادله انتگرال ولترا را با یک مثال تشریح می‌نماییم.

مثال ۵: معادله انتگرال ولترا معادل با مسأله مقدار اولیه زیر را پیدا کنید:

$$y''(x)+y(x)=\cos x, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1. \qquad (2.6.1)$$

حل: ابتدا قرار می‌دهیم:

$$y''(x)=u(x) \qquad (3.6.1)$$

با انتگرال گیری از دو طرف رابطه (۳.۶.۱) از صفر تا x و استفاده از شرط اولیه $y'(0)=1$ به دست می‌آوریم:

$$y'(x)=1+\int_{0}^{x}u(t)dt$$

انتگرال گیری از رابطه بالا و استفاده از شرط اولیه $y(\circ) = \circ$ منجر به رابطه زیر می‌شود:

$$y(x) = x + \int_\circ^x \int_\circ^x u(t)dtdt$$

با تبدیل انتگرال دو گانه مذکور به یک انتگرال یک گانه به وسیله دستور (۱.۶.۱) خواهیم داشت:

$$y(x) = x + \int_\circ^x (x-t)u(t)dt \qquad (۴.۶.۱)$$

با قرار دادن (۳.۶.۱) و (۴.۶.۱) در معادله (۲.۶.۱) معادله انتگرال ولترا زیر را که معادل مسأله مقدار اولیه (۲.۶.۱) می‌باشد به دست می آوریم:

$$u(x) = \cos x - x - \int_\circ^x (x-t)u(t)dt.$$

۷.۱ تبدیل مسائل مقدار مرزی به معادلات انتگرال فردهلم

در این بخش هدف بحث روی روش تبدیل یک مسأله مقدار مرزی به معادله انتگرال فردهلم معادل آن می‌باشد. روش کار مشابه روشی است که در بخش قبل بحث شد اما کمی به علت شرایط مرزی با آن متفاوت است. البته مهم است که به این نکته توجه کنیم که روند تبدیل مسائل مقدار مرزی به یک معادله انتگرال فردهلم مشکل‌تر ولی کمتر مورد نیاز است. برای ارائه تصور عملی و بهتر از این روش به اعمال آن روی یک مثال می‌پردازیم.

مثال ۶: هدف تعیین یک معادله انتگرال فردهلم متناظر با مسأله مقدار مرزی

$$y''(x) + y(x) = x, \quad \circ < x < \pi, \qquad (۱.۷.۱)$$

همرا ه با شرایط مرزی به صورت زیر می‌باشد:

$$y(\circ) = ۱, \quad y(\pi) = \pi - ۱.$$

حل: ابتدا قرار می‌دهیم:

$$y''(x) = u(x) \tag{۲.۷.۱}$$

با انتگرال گیری از دو طرف رابطه (۲.۷.۱) از ۰ تا x داریم:

$$\int_0^x y''(t)dt = \int_0^x u(t)dt,$$

و در نتیجه:

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x u(t)dt.$$

با انتگرال گیری از طرفین معادله بالا از ۰ تا x و استفاده از شرایط مرزی در $x = 0$ و تبدیل انتگرال دو گانه حاصل به یک انتگرال یک گانه به دست می آوریم:

$$y(x) = 1 + xy'(0) + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \tag{۳.۷.۱}$$

تنها چیزی که باید حساب کنیم $y'(0)$ می‌باشد که برای محاسبه آن در دو طرف معادله (۳.۷.۱) مقدار $x = \pi$ را قرار می‌دهیم و از شرط مرزی در $x = \pi$ استفاده می‌کنیم لذا داریم:

$$y(\pi) = 1 + \pi y'(0) + \int_0^\pi (\pi - t)u(t)dt.$$

با تعیین $y'(0)$ از معادله بالا به دست می آوریم:

$$y'(0) = \frac{1}{\pi}((\pi - 2) - \int_0^\pi (\pi - t)u(t)dt).$$

با قرار دادن عبارت بالا در رابطه (۳.۷.۱) نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + \tfrac{x}{\pi}((\pi - 2) - \textstyle\int_0^\pi (\pi - t)u(t)dt) \\ &\quad + \textstyle\int_0^x (x-t)u(t)dt. \end{aligned} \tag{۴.۷.۱}$$

با جایگذاری مقادیر (۲.۷.۱) و (۴.۷.۱) در رابطه (۱.۷.۱) به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} u(x) &= x - 1 - \tfrac{x}{\pi}((\pi - 2) - \textstyle\int_0^\pi (\pi - t)u(t)dt) \\ &\quad - \textstyle\int_0^x (x-t)u(t)dt. \end{aligned} \tag{۵.۷.۱}$$