بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ روی گروههای موضعاً فشرده

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

فاطمه ابطحی

استاد راهنما

دکتر فرید بهرامی

۱۳۸۱

دل سراپرده محبت اوست / دیده آیینه دار طلعت اوست

من که سر درنیاورم به دو کون / گردنم زیر بار منت اوست

تو و طوبی و ما و قامت یار / فکر هر کس به قدر همت اوست

گر من آلوده دامنم چه عجب / همه عالم گواه عصمت اوست

من که باشم در آن حرم که صبا / پرده دار حریم حرمت اوست

بی خیالش مباد منظر چشم / زانکه این گوشه جای خلوت اوست

هر گل نو که شد چمن آرای / ز اثر رنگ و بوی صحبت اوست

دور مجنون گذشت و نوبت ماست / هر کسی پنج روز نوبت اوست

ملکت عاشقی و گنج طرب / هر چه دارم ز یمن همت اوست

من و دل گر فدا شدیم چه باک / غرض اندر میان سلامت اوست

فقر ظاهر مبین که حافظ را / سینه گنجینه محبت اوست

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

۱۳۸۲ /۷/ ۲۰

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی خانم فاطمه ابطحی

تحت عنـــوان

میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ روی گروههای موضعاً فشرده

در تاریخ ۸۱/۷/۸ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرارگرفت.

۱ ـ استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر فرید بهرامی
۲ ـ استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر قدسیه وکیلی
۳ـ استاد داور ۱	دکتر علی رجالی
۴ ـ استاد داور ۲	دکتر رسول نصر

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر بیژن طائری

بر خود لازم می دانم از همه کسانی که مرا در انجام این پایان نامه یاری کرده‌اند تشکر نمایم. خصوصاً از آقای دکتر بهرامی و آقای دکتر نصر که راهنمایی و داوری اینجانب را عهده دار بوده اند و از خانم دکتر وکیلی و آقای دکتر رجالی که زحمت بازخوانی این رساله را متقبل شده‌اند و در طول این مدت مرا راهنمایی کرده‌اند کمال تشکر را دارم.

تقدیم به

پدر گرامی و مادر عزیزم

که در همهٔ مراحل زندگی یار و مشوق

من بوده اند

فهرست مطالب

فصل هفتم

چکیده:

تلاشهای جدید توسط مؤلف های گوناگون ، بررسی مفهوم میانگین پذیری و میانگین پذیری ضعیف جبرهای باناخ تعریف شده روی گروه های موضعاً فشرده است.یکی از ابزارهای اصلی در این زمینه این است که هر تصویر هومومورفیسم پیوسته از یک جبر میانگین پذیر ، میانگین پذیر است.در این پایان نامه ،این موضوع در خصوص میانگین پذیری ضعیف مورد بررسی قرار می گیرد. این خاصیت برای میانگین پذیری ضعیف در حالت کلی درست نیست ؛اما می توان شرایطی مناسب برقرار کرد تا این نتیجه برای میانگین پذیری ضعیف جبرهای باناخ نیز صادق شود. در ادامه میانگین پذیری ضعیف $M(G)$ مورد بررسی قرار گرفته ثابت می شود که اگر G یک گروه موضعاً فشرده و همبند ، G_d میانگین پذیر و $M(G)$ میانگین پذیر ضعیف باشد آن گاه G گروه بدیهی است.همچنین ثابت می شود که برای گروه موضعاً فشرده G ، $L^1(G)$ همواره میانگین پذیر ضعیف است و در پایان نشان داده می شود که میانگین پذیری (ضعیف) $L^1(G)^{**}$ ، میانگین پذیری (ضعیف) $M(G)$ را نتیجه می دهد.

فصل اول
مقدمه

فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک A-دو مدول باناخ باشد. نگاشت خطی و کراندار $D : A \longrightarrow X$ را یک مشتق نامیم اگر

$$D(ab) = D(a).b + a.D(b) \qquad a, b \in A$$

فضای تمام مشتق ها روی A را با $Z^1(A, X)$ نشان می دهیم. D را یک مشتق داخلی نامیم اگر $\xi \in X$ موجود باشد به طوریکه برای هر $a \in A$ ، $D(a) = a.\xi - \xi.a$. به سادگی می توان نشان داد که فضای مشتق های داخلی که آن را با $B^1(A, X)$ نشان می دهیم یک زیر فضای خطی از $Z^1(A, X)$ است. فضای خارج قسمت مشتق ها به مشتق های داخلی را با $H^1(A, X)$ نشان می دهیم. جبر باناخ A را انقباض پذیر نامیم اگر برای هر A-دو مدول باناخ X ، $H^1(A, X) = \{0\}$. A را میانگین پذیر نامیم اگر برای هر A-دو مدول باناخ X ، $H^1(A, X^*) = \{0\}$ و آن را میانگین پذیر ضعیف نامیم اگر $H^1(A, A^*) = \{0\}$. ثابت می شود که اگر A یک جبر باناخ جابجایی باشد آن گاه میانگین پذیری ضعیف A معادل این است که هر مشتق از A در A^* صفر باشد.

حال فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این صورت $A = L^1(G)$ انقباض پذیر است اگر

و تنها اگر G متناهی باشد.A میانگین پذیر است اگر و تنها اگر G میانگین پذیر باشد و A همواره میانگین پذیر ضعیف است.هر C^*-جبر A میانگین پذیر است اگر و تنها اگر هسته ای باشد و A همواره میانگین پذیر ضعیف است.تا به حال بررسی های زیادی روی مفهوم میانگین پذیری برای جبرهای گوناگون تعریف شده روی گروه های موضعاً فشرده انجام شده است. هدف این است که این تحقیق با تأکید روی میانگین پذیری ضعیف دنبال شود. همچنین میانگین پذیری ضعیف برای کلاس های خاصی از جبرهای باناخ مورد بررسی قرار می گیرد.

یکی از قضایای مهم در خصوص میانگین پذیری این است که هر تصویر پیوسته از یک جبر میانگین پذیر ، میانگین پذیر است.همین نتیجه در خصوص میانگین پذیری ضعیف در مورد جبرهای جابجایی برقرار است ولی در حالت کلی درست نیست.

چنانچه اشاره گردید هدف اصلی در این پایان نامه بررسی خاصیت های میانگین پذیری و میانگین پذیری ضعیف دسته ای از جبرهای باناخ است.بر این مبنا فصول مختلف این پایان نامه به صورت زیر ترتیب یافته است:

در فصل دوم این پایان نامه که شامل سه بخش است ، به بیان مقدمات مورد نیاز برای فصل های بعد می پردازیم. در بخش اول با گروه های توپولوژیک ، در بخش دوم با اندازه هار و انتگرال هار و در بخش سوم با مفهوم جبر و جبر باناخ آشنا می شویم.در فصل سوم که مشتمل بر دو بخش است ، وارد مباحث اصلی می شویم. در بخش اول میانگین پذیری جبرهای باناخ و در بخش دوم میانگین پذیری ضعیف جبرهای باناخ را مورد بررسی قرار داده،قسمتی از قضایای اصلی این پایان نامه را بیان و اثبات می کنیم.در فصل چهارم که مشتمل بر دو بخش است ، ابتدا فضای $LUC(G)$ را معرفی می کنیم و سپس در بخش دوم با زیر فضاهای درون گرای چپ از یک جبر باناخ آشنا می شویم.
هدف اصلی این پایان نامه از فصل پنجم شروع می شود.در بخش اول گروه های میانگین پذیر را تعریف می کنیم و بعضی از قضایای مهم در این زمینه را بیان می کنیم.به دلیل این که گروه های میانگین پذیر مورد بحث ما نیست ، از آوردن اثبات این قضایا خودداری می کنیم.در بخش دوم میانگین پذیری ضعیف $M(G)$ را مورد بررسی قرار داده ثابت می کنیم اگر G یک گروه موضعاً فشرده و همبند و $M(G)$ میانگین پذیر ضعیف و G_d میانگین پذیر باشد آن گاه $G=\{e\}$.

در فصل ششم هدف اصلی بررسی میانگین پذیری ضعیف $L^1(G)$ است.ابتدا در بخش اول مطالب مورد نیازی را در خصوص انتگرال های برداری بیان می کنیم و مقدماتی را فراهم می کنیم تا در بخش دوم ثابت کنیم که اگر G یک گروه موضعاً فشرده باشد آن گاه $L^1(G)$ میانگین پذیر ضعیف است.
فصل هفتم در واقع فصل نتیجه گیری است.در بخش اول ثابت می کنیم که میانگین پذیری $L^1(G)^{**}$ میانگین پذیری $M(G)$ را نتیجه می دهد و در بخش دوم این موضوع را در مورد میانگین پذیری ضعیف ثابت می کنیم.

فصل دوم

در این فصل که مشتمل بر سه بخش است ، به جمع آوری مقدماتی می پردازیم که در فصل های بعد مورد استفاده قرار می گیرند . در بخش اول با گروه های توپولوژیک آشنا شده برخی از خواص این گروه ها بیان و اثبات می گردد . همچنین یک مثال جالب در این زمینه ارائه می شود . در بخش دوم با استفاده از قضیه نمایش ریس و یک قضیه اساسی دیگر ، اندازه هار راست و اندازه هار چپ را معرفی کرده تابع مدولار را به عنوان پل ارتباطی بین اندازه هار راست و اندازه هار چپ معرفی می کنیم و در بخش سوم مفهوم جبر و جبر باناخ را بیان کرده $*$-جبر باناخ و C^*-جبر باناخ و W^*-جبر باناخ را معرفی می کنیم و بعضی از خواص این فضاها را ذکر می کنیم .

۲−۱ گروههای توپولوژیک

در این بخش به تعریف گروه توپولوژیک[۱] می‌پردازیم و بعضی از خاصیتهای آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

(۲−۱−۱) تعریف: یک گروه توپولوژیک عبارتست از سه‌تایی $< G, ., \tau >$ بطوریکه:

i) $< G, . >$یک گروه و $< G, \tau >$ یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد.

ii) نگاشت زیر پیوسته باشد:

$$G \times G \longrightarrow G$$

$$(x, y) \mapsto xy^{-1}$$

(۲−۱−۲) تذکر: دو شرط زیر را می‌توان جایگزین شرط دوم کرد

۱− نگاشت $G \xrightarrow{i_1} G$ با ضابطه $x \overset{i_1}{\longmapsto} x^{-1}$ پیوسته است.

۲− نگاشت $G \times G \xrightarrow{i_2} G$ با ضابطه $(x, y) \overset{i_2}{\longmapsto} xy$ پیوسته است.

(۲−۱−۳) تعریف: اگر T و S زیر مجموعه‌هایی ناتهی از G باشند، قرار می‌دهیم:

$$S^{-1} = \{x^{-1} : x \in S\} \quad , \quad ST = \{xy : x \in S, \ y \in T\}$$

(۲−۱−۴) تذکر: گروه توپولوژیک G را موضعاً فشرده،فشرده، همبند و یا گسسته نامیم، اگر $< G, \tau >$ به عنوان یک فضای توپولوژیک خاصیت مذکور را داشته باشد.اگر G یک فضای گسسته باشد آن را با نماد G_d نشان می‌دهیم.

(۲−۱−۵) قضیه: اگر A و B زیر مجموعه‌هایی همبند از $< G, ., \tau >$ باشند آن گاه A^{-1} و AB نیز همبند خواهند بود.

اثبات: با توجه به تذکر (۲−۱−۲) و تعریف (۲−۱−۳)، داریم:

---
[۱] Topological Group