دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

تعمیم و کاربردهای توابع ستاره‌گون

نگارش

راضیه ولیان

استاد راهنما

دکتر محمود بیدخام

استاد مشاور

دکتر علی غفاری

مهر ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است

و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند

و

همسر مهربانم که برای لحظات دشوارم، تکیه‌گاهی صبور بود.

قدردانی

با حمد و سپاس از خداوند منان که به من توفیق آموختن پرتوئی از دانش هستی و آشنایی با گوشه‌ای از حقایق آفرینش را عطا فرمود.

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر بیدخام که با راهنمایی‌های حکیمانه خود افق‌های تازه‌ای برای اینجانب ایجاد نمودند و همچنین از استاد مشاور جناب آقای دکتر غفاری کمال تشکر را دارم.

همچنین لازم می‌دانم از خانواده و تمام عزیزانی که مرا در این امر مهم یاری کردند، تقدیر و تشکر نمایم.

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا رده‌هایی از توابع را معرفی می‌کنیم که در دایره یکه باز تحلیلی و تک‌ارز می‌باشند. همچنین تعدادی زیررده از توابع تحلیلی با شناسه مختلف از ضرایب را بررسی می‌کنیم که بر حسب ضرب هادامارد تعریف شده‌اند. سرانجام، براورد ضرایب، شعاع ستاره‌گونی و تحدب و سایر خواص را برای رده‌های تعریف شده از توابع تحقیق می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: توابع تحلیلی و تک‌ارز، توابع ستاره‌گون و محدب، نقاط کرانی، شعاع ستاره‌گونی و تحدب، ضرب هادامارد.

مراجع اصلی استفاده شده در این پایان‌نامه عبارتند از:

1. J. Dziok, A. Szpila, *Generalized classes of uniformly convex functions*, J. Math. **33** (2010), PP. 13-26.

2. A. Mannino, *Some inequalities concerning starlike and convex functions*, G. Math. **12** (2004), PP. 5-12.

3. S. Owa, Y. Polatoĝlu and E. Yavuz, *Coefficient inequalities for classes of uniformly starlike and convex functions*, Ineq. Pu. Appl. Math. **7** (2006), PP. 1-6.

4. H. Silverman, *Univalent functions with negative coefficients*, Proc. Amer. Math Soc. **51** (1975), PP. 109-116.

5. H. M. Srivastava, T.N. Shanmugam, C. Ramachandran and S. Sivasubramanian, *A new subclass of k-uniformly convex functions with negative coefficients*, Ineq. Pu. Appl. Math. **8** (2007), PP. 1-29.

6. K. G. Subramanian, T.V. Sudharsan, R. Thirumalaisamy and H. Silverman, *A class of analytic functions based on convolution*, ISSN. Amer. Math. **5** (2010).

مقدمه

تابع تحلیلی که یک به یک می‌باشد را تابع تک‌ارز می‌نامیم. از نظر تحلیلی، تابع تک‌ارز مشتق مخالف صفر دارد و از نظر هندسی، تابع تک‌ارز خم‌های ساده را بر خم‌های ساده می‌نگارد. مطالعات و تحقیقات زیادی در جهت چگونگی ترکیب این خواص و خواص دیگر، برای اثبات قضایایی که سرشت هندسی یا تحلیلی دارند، انجام گرفته است.

به موجب قضیه نگاشت ریمان، هر تابع تک‌ارز که در یک میدان همبند ساده (به غیر از تمامی صفحه) تعریف شده باشد را می‌توان با تابعی که در قرص واحد تعریف شده، متناظر کرد. بنابراین خود را روی توابعی که بر قرص $|z| < ۱$ تعریف شده‌اند، محدود و فرض می‌کنیم که مقدار این توابع در مبدا صفر است (که تنها صفر تابع نیز خواهد بود) و در مبدا هم، مشتق مخالف صفر دارند. در این صورت، نتایج حاصله منجر به پیدایش رده و زیررده‌هایی شده که در این پایان‌نامه به برخی از آن‌ها و خواص مربوطه اشاره می‌کنیم.

در این راستا، فصل اول به بیان تعاریف و قضایایی اختصاص داده شده که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل دوم، در هر بخش به بررسی رده‌های مختلف پرداخته‌ایم. در بخش اول، رده‌ی توابع تک‌ارز با ضرایب منفی که با T نمایش داده می‌شود، بررسی شده است.

در بخش دوم، رده‌ی $TS^g(\alpha)$ از توابع تحلیلی با ضرایب منفی را معرفی می‌کنیم که در آن $g(z)$ تابعی تحلیلی و دلخواه می‌باشد.

در بخش سوم، زیررده‌های $SD(\alpha,\beta)$ و $KD(\alpha,\beta)$ از رده‌ی $\mathcal{A}$ بیان شده که برای اولین بار توسط شمس، جهانگیری و کولکارنی معرفی شده‌اند.

و در بخش آخر از این فصل، به معرفی رده‌ی $QUST$ و تعدادی نامعادله در مورد توابع ستاره‌گون و محدب پرداخته‌ایم.

فصل سوم نیز شامل دو بخش می‌باشد. در بخش اول، رده‌ی $\mathcal{U}(\lambda,\alpha,\beta,k)$ و قضایای مربوطه بیان شده و در بخش دوم نیز زیررده‌هایی از توابع تحلیلی با شناسه مختلف از ضرایب را معرفی کرده و تعدادی از خواص آن‌ها را بررسی نموده‌ایم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش‌نیازها و مفاهیم مقدماتی

در این فصل ابتدا نمادها، تعاریف و قضیه‌های مورد نیاز در فصل‌های بعدی را بیان کرده و از اثبات قضایای موجود در کتب کلاسیک آنالیز مختلط صرف نظر می‌کنیم و تنها قضایایی را اثبات می‌کنیم که در این کتب موجود نمی‌باشد.

۱.۱ نمادگذاری و تعاریف

همانند اکثر متون ریاضی، در این پایان‌نامه از نمادهای زیر استفاده می‌شود.

۱) $\mathbb{N}$: مجموعه‌ی اعداد طبیعی؛

۲) $\mathbb{R}$: مجموعه‌ی اعداد حقیقی؛

۳) $\mathbb{C}$: مجموعه‌ی اعداد مختلط؛

۴) $U = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < ۱\}$: دیسک یکه‌ی باز؛

۵) Re: قسمت حقیقی اعداد مختلط.

تعریف ۱.۱.۱ چندجمله‌ای از درجه n با ضرایب مختلط را با $P_n^{\mathbb{C}}(z)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$P_n^{\mathbb{C}}(z) = \Big\{ \sum_{i=0}^{n} a_i z^i;\ a_i \in \mathbb{C} \Big\}$$

و چنانکه ضرایب چند جمله‌ای حقیقی باشند، آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$P_n^{\mathbb{R}}(z) = \Big\{ \sum_{i=0}^{n} a_i z^i;\ a_i \in \mathbb{R} \Big\}$$

تعریف ۲.۱.۱ مجموعه‌ی F را همبند نامیم هرگاه نتوان دو مجموعه باز V و W یافت که

۱) $F \subset V \bigcup W$؛

۲) $W \bigcap F \neq \emptyset$ و $V \bigcap F \neq \emptyset$.

تعریف ۳.۱.۱ هر مجموعه باز و همبند، میدان نام دارد. معمولاً میدان را با D نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱ میدان D را همبند ساده می‌نامیم هرگاه درون هر خم ساده بسته واقع در D، تماماً متعلق به D باشد. هر میدانی که همبند ساده نباشد، همبند چندگانه نام دارد.

تعریف ۵.۱.۱ تابع مختلط f را در نقطه z_0 تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی از z_0 مشتق‌پذیر باشد.

تعریف ۶.۱.۱ تابع f را در میدان D تحلیلی گوییم اگر در همه نقاط این میدان تحلیلی باشد. تابعی که در تمام صفحه مختلط تحلیلی است را تابع تام گوییم.

تعریف ۷.۱.۱ مجموعه X را محدب نامیم هرگاه برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از X و هر $t \in (0, 1)$،

$$tx_1 + (1-t)x_2 \in X$$

در واقع مجموعه X محدب است هرگاه پاره‌خطی که هر دو نقطه از مجموعه X را بهم متصل می‌کند تماماً در X قرار گیرد.

تعریف ۸.۱.۱ تابع با مقادیر حقیقی پیوسته $U(x,y)$ را که در میدان D تعریف شده است، در D همساز گوییم اگر دارای مشتقات نسبی مراتب اول و دوم پیوسته باشد و این مشتقات در تمام D در معادله زیر که به معادله لاپلاس مشهور است صدق کند.

$$\frac{\partial^۲ U}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ U}{\partial y^۲}=\circ$$

قسمت‌های حقیقی و انگاری یک تابع تحلیلی، توابعی همسازند.

قضیه ۹.۱.۱ تابع همساز غیر ثابت در یک میدان، ماکزیمم و یا مینیمم ندارد.

تعریف ۱۰.۱.۱ هر تابع تحلیلی و یک به یک را تابع تک‌ارز می‌نامیم. بنابراین اگر f تابع تک‌ارز باشد، $f(z_۱)=f(z_۲)$ نتیجه می‌دهد $z_۱=z_۲$.

توابع تک‌ارز بنابر قضیه‌های زیر، از نظر تحلیلی مشتق مخالف صفر دارند و از نظر هندسی، خم‌های ساده را بر خم‌های ساده می‌نگارد.

قضیه ۱۱.۱.۱ اگر $f(z)$ در میدان D تحلیلی و تک‌ارز باشد آنگاه در D، $f'(z)\neq\circ$.

قضیه ۱۲.۱.۱ (قضیه نگاشت ریمان)

فرض کنیم D میدان همبند ساده‌ای به غیر از تمام صفحه و $z_\circ$ نقطه‌ای در این میدان باشد. در این صورت تابع یکتا و تک‌ارز $f(z)$ موجود است که D را بر قرص $|z|<۱$ می‌نگارد و $f(z_\circ)=\circ$ و $f'(z_\circ)>\circ$.

طبق قضیه نگاشت ریمان، هر میدان همبند ساده به جز یک استثناء، با دیسک واحد و باز هم‌ارز است. به عبارت دیگر، برای هر میدان همبند ساده (به جز تمام صفحه) و درون دایره واحد، تابعی منحصر بفرد، تحلیلی و یک به یک وجود دارد که بین آنها تناظر یک به یک برقرار می‌کند.

تعریف ۱۳.۱.۱ رده‌ی همه توابع به فرم $f(z)=z+\sum\limits_{n=۲}^{\infty}a_nz^n$ که در دیسک یکه‌ی باز U تحلیلی می‌باشد و در شرایط نرمالیزه زیر صدق می‌کند را با A نمایش می‌دهیم.

$$f(\circ)=f'(\circ)-۱=\circ$$

۲.۱ رده‌ی S

تعریف ۱.۲.۱ رده‌ای از همه‌ی توابع $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ که در U تحلیلی و تک‌ارز است و با شرایط $f(0)=0$ و $f'(0)=1$ نرمالیزه می‌گردند را با S نمایش می‌دهیم.

مثال ۲.۲.۱ تابع $k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+\cdots$ که به تابع کوئب[1] معروف است در U تحلیلی و تک‌ارز است و $k(z)\in S$. □

قضیه ۳.۲.۱ اگر $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ در S باشد، آنگاه برای هر n، $|a_n|<en$.

قضیه ۴.۲.۱ اگر $f(z)\in S$، آنگاه

$$\frac{r}{(1+r)^2}\leq|f(z)|\leq\frac{r}{(1-r)^2},\quad(|z|=r<1)$$

قضیه ۵.۲.۱ اگر $f(z)\in S$، آنگاه

$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\leq|f'(z)|\leq\frac{1+r}{(1-r)^3},\quad(|z|=r<1)$$

۳.۱ رده‌ی توابع ستاره‌گون

تعریف ۱.۳.۱ میدان D را نسبت به z_0 ستاره‌گون گوییم هرگاه پاره‌خط مستقیمی که هر نقطه از D را به z_0 وصل می‌کند در D قرار بگیرد.

تعریف ۲.۳.۱ تابع $f(z)\in S$ را نسبت به مبدأ ستاره‌گون گوییم هرگاه قرص $|z|<1$ تحت $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به z_0 ستاره‌گون است. این زیررده‌ی S را با S^* نمایش می‌دهیم.

[1] Koebe

قضیه ۳.۳.۱ فرض کنیم $f(z) \in S$. در این صورت $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر

$$Re\Big\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\Big\} > 0, \qquad (z \in U)$$

مثال ۴.۳.۱ تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ در رده‌ی S^* قرار دارد زیرا

$$Re\Big\{\frac{zk'(z)}{k(z)}\Big\} = Re\Big\{\frac{1+z}{1-z}\Big\} > 0$$

□

قضیه ۵.۳.۱ فرض کنیم $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و $f'(0) = a_1 \neq 0$. اگر $Re\Big\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\Big\} > 0 \quad (|z| < 1)$، آنگاه $f(z)$ در $|z| < 1$ تک‌ارز می‌باشد.

تعریف ۶.۳.۱ تابع $f(z) \in S$ ستاره‌گون از مرتبه‌ی α $(0 \leq \alpha < 1)$ نامیده می‌شود هرگاه

$$Re\Big\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\Big\} > \alpha, \qquad (|z| < 1)$$

این زیررده از S را با $S^*(\alpha)$ نمایش می‌دهیم.

به راحتی می‌توان نشان داد که برای تابع ستاره‌گون f دو شرط $Re\Big\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\Big\} > \alpha$ و $\Big|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\Big| < 1 - \alpha$ هم‌ارزند.

قضیه ۷.۳.۱ فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$. اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq 1 - \alpha,$$

آنگاه $f(z) \in S^*(\alpha)$ $(0 \leq \alpha < 1)$.

برهان . بنابر تعریف ۶.۳.۱ کافیست نشان دهیم $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ در دایره‌ای به شعاع $1 - \alpha$ و به مرکز ۱ قرار دارد.بنابراین ،

$$\begin{aligned}\Big|\frac{zf'}{f} - 1\Big| &= \Big|\frac{zf' - f}{f}\Big| = \Big|\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_n z^n}{z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n}\Big| \\ &\leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n||z|^{n-1}} \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n|}{1 - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|}\end{aligned}$$

عبارت فوق دارای کران بالای $1-\alpha$ می‌باشد اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n| \leq (1-\alpha)(1-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|),$$

که معادل است با $\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$ و بنا به فرض این رابطه برقرار است. بنابراین

$$\left|\frac{zf'}{f}-1\right| \leq 1-\alpha$$

■

۴.۱ رده‌ی توابع محدب

تعریف ۱.۴.۱ میدان D را محدب گوییم هرگاه پاره‌خط مستقیمی که هر دو نقطه از D را به هم وصل می‌کند در D قرار بگیرد.

تعریف ۲.۴.۱ تابع $f(z) \in S$ را محدب گوییم هرگاه قرص $|z| < 1$ تحت $f(z)$ بر یک میدان محدب نگاشته شود. این زیررده از S را با K نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳.۴.۱ فرض کنیم $f(z)$ در $|z| < 1$ تحلیلی باشد و $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$. در این‌صورت $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر

$$Re\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0, \qquad (|z| < 1)$$

مثال ۴.۴.۱ تابع $f(z) = \frac{z}{1-z} = z + \sum_{n=2}^{\infty} z^n$ که $|z| < 1$، یک تابع محدب است. □

قضیه ۵.۴.۱ اگر $f(z) \in K$، آنگاه

$$\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r}, \quad (|z| = r < 1)$$

قضیه ۶.۴.۱ اگر $f(z) \in K$، آنگاه

$$\frac{۱}{(۱+r)^{۲}} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱}{(۱-r)^{۲}}, \quad (|z| = r < ۱)$$

تعریف ۷.۴.۱ تابع $f(z) \in S$ را محدب از درجه‌ی α در U می‌نامیم اگر برای هر z در U،

$$Re\Big\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\Big\} > \alpha, \qquad (۰ \leq \alpha < ۱)$$

که مجموعه‌ی همه این توابع را با $K(\alpha)$ نمایش می‌دهیم.

همانند قبل به راحتی می‌توان نشان داد که شرط تحدب فوق معادل شرط زیر است.

$$\Big|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\Big| < ۱ - \alpha$$

قضیه ۸.۴.۱ (قضیه‌ی الکساندر[۱])

فرض کنیم f یک تابع تحلیلی در D باشد که $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۱$. در این صورت $f(z) \in K(\alpha)$ اگر و تنها اگر $zf'(z) \in S^{*}(\alpha)$ [۱].

برهان . اگر $g(z) = zf'(z)$ باشد در این صورت

$$Re\,\Big\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\Big\} = Re\,\Big\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\Big\} > \alpha$$

لذا تابع سمت چپ در D تحلیلی و مثبت است اگر و تنها اگر تابع سمت راست نیز چنین باشد.

■

نتیجه ۹.۴.۱ فرض کنیم $f \in S^{*}$. در این‌صورت $h \in K$ وجود دارد به طوری‌که $f(z) = zh'(z)$.

---
۱ Alexander Theorem

برهان . بنا به فرض چون $f \in S^*$، لذا $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ و $|z| < ۱$. حال اگر فرض شود که $h(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{a_n}{n} z^n$ و $|z| < ۱$، آنگاه واضح است که $f(z) = zh'(z)$. حال اگر ثابت کنیم $h(z) \in K$ حکم ثابت می‌شود. واضح است که $h(\circ) = \circ$، $h'(\circ) = ۱$ و h روی U تحلیلی است از طرفی $f(z) = zh'(z) \in S^*$. پس بنا به قضیه‌ی الکساندر، $h(z) \in K$. ■

نتیجه ۱۰.۴.۱ فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n \in S$. اگر $\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \leq ۱ - \alpha$ ($\circ \leq \alpha < ۱$)، آنگاه $f \in K(\alpha)$.

برهان . با توجه به قضیه ۷.۳.۱ و قضیه‌ی الکساندر به نتیجه می‌رسیم. ■

تعریف ۱۱.۴.۱ فرض کنیم f روی دیسک واحد و باز U تحلیلی باشد. f را محدب‌وار یا تقریباً محدب گوییم هرگاه تابع محدبی مانند g موجود باشد به طوری‌که برای هر $z \in U$، $Re\Big\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\Big\} > \circ$. به راحتی می توان نشان داد که شرط فوق هم‌ارز شرط زیر است.

$$\Big|\frac{f'(z)}{g'(z)} - ۱\Big| < ۱$$

این رده از $\mathcal{A}$، شامل توابع محدب‌وار را با M نمایش می‌دهیم.

برای مطالعه بیشتر به [۹] مراجعه شود.

نکته ۱۲.۴.۱ هر تابع $f \in K$، محدب‌وار است. زیرا کافیست در تعریف تابع محدب‌وار قرار دهیم $g(z) = f(z)$. لذا $Re\Big\{\frac{f'(z)}{f'(z)}\Big\} = ۱ > \circ$ برای هر $z \in U$.

نکته ۱۳.۴.۱ هر تابع ستاره‌گون، محدب‌وار است. زیرا اگر $f \in S^*$ باشد، طبق قضیه‌ی الکساندر $g \in K$ وجود دارد به طوری‌که $f(z) = zg'(z)$ و چون $Re\Big\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\Big\} > \circ$ با جایگذاری داریم $Re\Big\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\Big\} > \circ$. لذا f محدب‌وار است.

همچنین هر تابعی که مشتق آن دارای قسمت حقیقی مثبت باشد نیز تقریباً محدب است که این را با متناظر گرفتن $g(z) = z$ می توان نشان داد. هر تابع محدب‌وار، تک‌ارز است.

نتیجه ۱۴.۴.۱ با توجه به مطالب فوق داریم

$$K \subset S^* \subset M \subset S$$

تعریف ۱۵.۴.۱ (ضرب پیچشی یا ضرب هادامارد[1])
فرض کنیم $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ و $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$، به طوری‌که روی $|z| < 1$ همگرا هستند.
ضرب پیچشی یا هادامارد f و g را با $f * g$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f * g)(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n, \qquad |z| < 1$$

برای مطالعه بیشتر به [۹] مراجعه شود.

تعریف ۱۶.۴.۱ (خواص ضرب پیچشی)

۱) سری هندسی $l(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$ عضو خنثی تحت عمل ضرب پیچشی است یعنی برای هر $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$، $f * l = l * f = f$.

۲) برای هر عدد ثابت m، $(f * mg)(z) = m(f * g)(z)$.

۳) $f * (zg'(z)) = z(f * g)'(z)$

تعریف ۱۷.۴.۱ (نامساوی کوشی—شوارتز[2])

اگر $z_1, z_2, \cdots, z_n$ و $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ اعداد مختلط باشند، آنگاه

$$|\sum_{i=1}^{n} z_i \overline{\omega}_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |\omega_i|^2$$

[1] Hadamard product
[2] Cauchy-schwarz inequality

۵.۱ نقاط اکسترمال یا نقاط کرانی

تعریف ۱.۵.۱ پاره‌خط $L[f,g]$ که نقاط f و g در فضای برداری را به هم متصل می‌کند، مجموعه‌ی همه نقاط h به فرم $h = tf + (۱-t)g$ است که $۰ \leq t \leq ۱$.
نقاط f و g نقاط انتهایی $L[f,g]$ است و نقطه h نقطه‌ی درونی پاره‌خط $L[f,g]$ است اگر $۰ < t < ۱$ باشد.

تعریف ۲.۵.۱ اگر F یک مجموعه‌ی محدب باشد نقطه‌ی f از F را نقطه‌ی کرانی یا اکسترمال نامند هرگاه نقطه‌ی درونی هر پاره‌خط $L[f,g]$ واقع در F نباشد.
برای مطالعه بیشتر به [۹] مراجعه شود.

۶.۱ رده‌ی توابع ستاره‌گون یکنواخت و محدب یکنواخت

تعریف ۱.۶.۱ تابع محدب (ستاره‌گون) f در U محدب یکنواخت (ستاره‌گون یکنواخت) است هرگاه تصویر هر کمان مدور γ به مرکز δ که هر دو در U قراردارند، تحت f محدب (ستاره‌گون) باشد. این رده را با UCV (UST) نشان می‌دهیم [۷، ۸].

در رابطه با تعریف فوق قضایای زیر را بیان و اثبات می‌نماییم.

قضیه ۲.۶.۱ فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$. آنگاه $f \in UST$ اگر و تنها اگر

$$Re\, \frac{(z-\delta)f'(z)}{f(z)-f(\delta)} \geq ۰, \quad (z,\delta) \in U \times U$$

قضیه ۳.۶.۱ فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$. آنگاه $f \in UCV$ اگر و تنها اگر

$$Re\left\{۱ + (z-\delta)\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \geq ۰, \quad (z,\delta) \in U \times U$$

حالت دیگری برای رده‌ی توابع محدب یکنواخت وجود دارد که در سال ۱۹۹۳ توسط رونینگ [۱] بیان شد که در آن فقط از یک متغیر مختلط استفاده شده است [۱۸].

[۱] Ronning

قضیه ۴.۶.۱ فرض کنیم $f(z) = z + \sum\limits_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$. آنگاه $f \in UCV$ اگر و تنها اگر

$$Re\left\{۱ + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \geq \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|, \quad z \in U$$

برهان . فرض کنیم $f \in UCV$ آنگاه از قضیه فوق داریم

$$Re\left\{۱ + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \geq Re\ \delta\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

اگر $\delta = e^{i\alpha}z$ آنگاه با یک شیوه مناسب قرار می‌دهیم

$$Re\ \delta\frac{f''(z)}{f'(z)} = \left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|$$

بنابراین طرف اول اثبات می‌شود.

برعکس، فرض کنیم $\delta \in U$ مقداری دلخواه و ثابت باشد. $Re\left\{۱ + (z-\delta)\frac{f''}{f'}\right\}$ یک تابع همساز است، بنابراین به وسیله‌ی اصل مینیمم کافیست نشان دهیم که برای هر $|\delta| < R = |z|$ و $R < ۱$،

$$Re\left\{۱ + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \geq Re\ \delta\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

فرض کنیم $\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \geq \left\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} Re$. آنگاه برای هر $|\delta| < R = |z| < ۱$، داریم

$$Re\left\{۱ + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \geq \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| > \left|\delta\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \geq Re\ \delta\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

بنابراین با توجه به قضیه قبل، نتیجه حاصل می‌شود. ■

تعاریف و قضایای فوق به صورت زیر قابل تعمیم هستند.

۷.۱ رده‌ی توابع $k-$ ستاره‌گون یکنواخت و $k-$ محدب یکنواخت

تعریف ۱.۷.۱ فرض کنیم $۰ \leq k < \infty$، تابع $f(z) \in \mathcal{A}$ را $k-$محدب یکنواخت گوییم هرگاه تصویر هر کمان مدور γ (واقع در U) به مرکز δ که $|\delta| \leq k$، تحت f محدب باشد. این رده را با $k-UCV$ نشان می‌دهیم [۱۲].