بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

حل عددی معادلات ا نتگرال-دیفرانسیل غیر خطی توسط روش نیوتن-تاو

استاد راهنما:

دکتر محمود محسنی مقدم

استاد مشاور:

دکتر عظیم ریواز

مولف:

سمیه یزدانی

شهریور ماه ۱۳۹۰

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی - دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو:	سمیه یزدانی
استاد راهنما:	دکتر محمود محسنی مقدم
استاد مشاور:	دکتر عظیم ریواز
داور ۱:	دکتر محمد علی ولی
داور ۲:	دکتر محمد علی یعقوبی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: دکتر سید ناصر حسینی

تقدیم به:

مهربان مادرم

که دری باز از بهشت سوی چشمان اوست؛ به او که خورشید شعله...نه، شرری پیش چشمانش است و پر پرواز من برای رهایی است.

تقدیم به:

چراغ زندگیم پدرم

که جانش سراسر ثروت ایثار است و وجودش تجلّی معنا و عشق.

تقدیم به:

دو خواهر و برادرم

که شادابی بوستان زندگیم و بهار باغ روزگارم اند.

تقدیر و تشکر

هر لطفی را سپاسی است، سپاس پروردگار سبحان را که قطره ای از اقیانوس بی انتهای علم خود را به من بخشود. تقدیر شایسته ای برایم رقم زد تا از محضر استادان گرانقدر بهره جویم. صادقانه ترین تقدیر و تشکر را از راهنمایی، صبر و زحمات استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر محمود محسنی مقدم ، دارم. از خداوند متعال توفیق روز افزون و سربلندی را برای ایشان که به تاریکی وجودم روشنایی علم را هدیه دادند، خواستارم. تقدیر و تشکر می کنم از جناب آقای دکتر ریواز به عنوان استاد مشاورم، راهنمایی های ایشان راهگشایم بود. همچنین تقدیر و تشکر می کنم از اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر ولی و جناب آقای دکتر یعقوبی که داوری این پایان نامه را پذیرفتند.

از پدر و مادرم تقدیر و تشکر می کنم، زحماتشان را هرگز فراموش نخواهم کرد و بر دستانشان بوسه می زنم.

از خواهر بزرگترم و همسرش، از برادرم و همسرش و از خواهر کوچکترم به خاطر همراهیشان، به خاطر حمایتهایشان تقدیر و تشکر می کنم. فرزندانشان را عاشقانه دوست دارم.

از همراهی و دلگرمی دوستانم که آشنایی با آن ها سعادتی بزرگ بود که نصیبم شد، تشکر می کنم.

هر پاسخی که زندگی به تلاش هایمان بدهد یا ندهد، هنگامی که به پایان تلاش هایمان نزدیک می شویم هر کداممان باید حق آن را داشته باشیم که با صدای بلند بگوییم:

«من آنچه در توان داشته ام انجام داده ام.»

در پایان از حمایتهای مالی قطب جبر خطی و بهینه سازی دانشگاه شهید باهنر کرمان تشکر و قدردانی می نمایم.

سمیه یزدانی

شهریور ماه ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان نامه، ابتدا معادلات انتگرال را معرفی خواهیم کرد. سپس به بیان دسته بندی معادلات انتگرال، تعاریف و قضایای مورد نیاز می پردازیم. در فصل دوم مقدمه ای از آنالیز حقیقی و تابع لاپلاس را بیان خواهیم کرد. فصل سوم را به بیان چند روش از روش های حل عددی و تحلیلی معادلات انتگرال و معادلات انتگرال-دیفرانسیل اختصاص خواهیم داد.

در پایان روش تاو را برای حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم و ولترا ارائه می نماییم. همچنین در پایان هر بخش چند مثال عددی ارائه شده است.

کلمات کلیدی: معادلات انتگرال، معادلات انتگرال-دیفرانسیل، روش تاو، روش نیوتن، روش نیوتن-تاو.

مقدمه

معادلات انتگرال-دیفرانسیل در سال های اخیر حجم وسیعی از مطالعات را به خود اختصاص داده است. چون امکان پیدا کردن جواب تحلیلی برای بیشتر معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیر خطی خیلی مشکل و پیچیده می باشد، بنابر این برای حل آن ها، روش های عددی مختلفی مورد بحث قرار می گیرد.

در سال ۱۹۸۱ روش تاو اولین بار توسط اورتیز [۱] و سمرا [۲] برای حل عددی معادلات دیفرانسیل به کار گرفته شد. از سال ۱۹۹۹ شهمراد، حسینی، رحیمی اردبیلی، پور محمود و عبادی این روش را برای حل عددی انواع معادلات انتگرال و معادلات انتگرال-دیفرانسیل خطی و غیر خطی مورد بحث قرار دادند.

در این پایان نامه روش نیوتن را برای خطی سازی یک معادله انتگرال-دیفرانسیل فردهلم غیر خطی به کار می بریم. سپس معادله انتگرال-دیفرانسیل فردهلم خطی حاصل را با روش تاو حل می کنیم.

---

۱ $E.L.Ortiz$

۲ $H.Samara$

فهرست مطالب

۱ مروری بر تاریخچه و مفاهیم مقدماتی معادلات انتگرال ۱

۱.۱ مقدمه ۲

۲.۱ تاریخچه معادلات انتگرال ۲

۳.۱ تعاریف کلی و دسته بندی معادلات انتگرال ۷

۴.۱ دسته بندی معادلات انتگرال ۱۰

۵.۱ معادلات انتگرال فردهلم ۱۰

۶.۱ معادلات انتگرال ولترا ۱۴

۷.۱ معادلات انتگرال منفرد ۱۶

۸.۱ معادلات انتگرال- دیفرانسیل ۱۸

۹.۱ تبدیل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا به مسائل مقدار اولیه ۲۰

۱۰.۱ تبدیل معادلات انتگرال- دیفرانسیل به معادلات انتگرال ۲۱

۲ مقدمه ای از آنالیز حقیقی و تابع لاپلاس ۲۴

۱.۲ فضاهای نرم دار و فضاهای ضرب داخلی ۲۵

۲.۲ توابع متعامد یکه ۲۸

۳.۲ تبدیلات لاپلاس ۳۲

۳ روش های تئوری حل معادلات انتگرال و معادلات انتگرال-دیفرانسیل ۳۹

۱.۳ مقدمه ۴۰

۲.۳ روش محاسبه مستقیم ۴۱

۳.۳ روش ماتریس تیلور ۴۳

۴.۳ روش تکراری هسته ۵۲

۵.۳ روش های تصویری ۶۰

۱.۵.۳ روش هم محلی ۶۰

۲.۵.۳ روش گالرکین ۶۵

۶.۳ روش تجزیه آدومیان ۷۱

۱.۶.۳ حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترای غیر خطی با روش تجزیه آدومیان . . . ۷۳

۷.۳ روش تجزیه لاپلاس-آدومیان ۷۸

۱.۷.۳ حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا غیر خطی نوع دوم ۷۹

۲.۷.۳ حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا غیر خطی نوع اول ۸۳

٤ روش ترکیبی نیوتن-تاو ۸۸

۱.۴ مقدمه ۸۹

۲.۴ تاریخچه روش تاو ۸۹

۳.۴ روش تاو با پایه استاندارد ۹۰

۱.۳.۴ حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم خطی با روش تاو ۹۶

۲.۳.۴ حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترای خطی با روش تاو ۱۰۲

۳.۳.۴ تخمین خطای روش تاو ۱۰۶

۴.۳.۴ حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم و ولترای غیر خطی با روش تاو ۱۱۰

۵.۳.۴ خطی سازی ۱۱۱

۴.۴ حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل با روش تاو با پایه چند جمله ای دلخواه ۱۱۶

۵.۴ روش نیوتن-تاو برای حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیر خطی ۱۲۱

۱.۵.۴ روش نقطه ثابت ۱۲۱

۲.۵.۴ روش نیوتن ۱۲۲

۳.۵.۴ کاربرد روش نیوتن ۱۲۴

۴.۵.۴ به کار بردن روش تاو برای حل معادله انتگرال-دیفرانسیل (۴۶.۴) ۱۲۷

کتاب نامه **۱۳۶**

واژه نامه فارسی به انگلیسی **۱۴۰**

فصل ۱

مروری بر تاریخچه و مفاهیم مقدماتی معادلات انتگرال

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا تاریخچه ای از معادلات انتگرال را بیان می کنیم و به بیان تعاریف و دسته بندی معادلات انتگرال می پردازیم. در بخش های بعدی تعاریف و مثال هایی از این دسته بندی بیان می شود. سرانجام در بخش های نهم و دهم روش چگونگی تبدیل معادله ی انتگرال -دیفرانسیل به معادله ی انتگرال و بالعکس را ارائه می نماییم.

۲.۱ تاریخچه معادلات انتگرال

یکی از شاخه های علم ریاضی که کاربردهای فراوانی در مسائل مکانیک، فیزیک، ریاضی، شیمی، ارتعاش، مهندسی، آمار و احتمال، رشد جمعیت و غیره دارد، معادلات انتگرال است. کاربردهای فراوان معادلات انتگرال باعث شده که افراد زیادی را به سوی خود جذب کرده تا به بررسی روش های مختلف حل این قبیل معادلات بپردازند.

ارتباط تنگاتنگی بین معادلات انتگرال و مسائل مقدار اولیه و مسائل مقدار مرزی وجود دارد (مسائل مقدار اولیه به معادلات انتگرال ولترا و مسائل مقدار مرزی به معادلات انتگرال فردهلم قابل تبدیل می باشند). بنا به نظریه بوچر [۱] نام معادله انتگرال برای اولین بار توسط بویس- ریموند [۲] در سال ۱۸۸۸ بر روی معادلاتی که تابع مجهول تحت یک یا چند علامت انتگرال ظاهر می شد، نهاده شد. البته عده ای بر این باورند که پیدایش معادله انتگرال به لاپلاس [۳] در سال ۱۷۸۲ بر می گردد. وی تبدیل انتگرال $\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$ به ازای $s > 0$ را در حل معادلات تفاضلی و معادلات دیفرانسیل به کار برد.

[۱] $M.Bocher$
[۲] $Boise - Reymond$
[۳] $Laplace$

در جریان تکامل و پیشرفت ریاضیات، در سال ۱۸۱۱ ژوزف فوریه [۴] فیزیکدان و ریاضیدان فرانسوی روی نظریه ی حرارت کار کرد . وی با استفاده از سریهای مثلثاتی در حل مسئله ی انتقال گرما به نتایجی در رابطه با معادله انتگرال دست یافت. نیلز آبل [۵] ریاضیدان نروژی در سال ۱۸۲۳ حرکت یک ذره را که به سمت پایین در طول یک منحنی هموار نامعلوم در یک صفحه ی قائم ، تحت تأثیر نیروی جاذبه لغزیده می شد، را مطالعه کرد. وی در رساله اش در سال های ۱۸۲۳ تا ۱۸۲۶ برای حل معادلات دیفرانسیل از معادله ی انتگرال

$$f(x) = \int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^\alpha} dt \qquad\qquad ۰ < \alpha < ۱$$

استفاده کرد که در آن $f(x)$ تابعی معلوم و پیوسته است، $f(a) = ۰$ و $y(t)$ یک تابع مجهول است. به ازای $\alpha = \frac{۱}{۲}$ معادله ی انتگرال آبل با مسئله ی مشهور کوتاهترین زمان متناظر است که برای اولین بار همزمان توسط هویگنس [۶] حل شد. در این مسئله تعیین حرکت یک ذره ، که روی منحنی با یک نقطه ی انتهایی داده شده و مستقل از وضعیت اولیه تحت تأثیرنیروی ثقل در بازه ای از زمان حرکت می کند مد نظر است [۲۲]. درسال ۱۸۲۶ پواسن [۷] در نظریه ی علم مغناطیس خود، انواع معادلات انتگرال را مورد بحث قرار داد. او معادله

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_۰^x k(x,t) y(t) dt$$

را با بسط $y(x)$ به یک سری توانی با پارامتر λ حل کرد. ژوزف لیوویل [۸] به طور مستقل معادلات انتگرال خاصی را از سال ۱۸۳۲ به بعد حل کرد، وی همگرایی سری توانی فوق الذکر را در سال ۱۸۳۷ نشان داد. لیوویل بدون آگاهی از کار آبل، معادله انتگرالی به نام خودش در مسئله ی جاذبه ی از یک شمش با طول نامتناهی معرفی کرد. وی در سال ۱۸۳۷ رابطه ی

[۴] $Fourier$
[۵] $Able$
[۶] $Hoygnes$
[۷] $Poisson$
[۸] $Liouville$

بین معادله دیفرانسیل و معادله انتگرال را مطرح کرد و نشان داد که جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل معین به وسیله یک معادله انتگرالی داده می شود. نیومن [۹] در سال ۱۸۷۰ جواب مسئله دیریکله [۱۰] یعنی تابع φ که دارای مقدار مشخصی روی مرز ناحیه S می باشد و درون S در معادله ی لاپلاس $\nabla^۲\varphi = ۰$ صدق می کند را به صورت جوابی از یک معادله انتگرال نشان داد و مسئله دیریکله را به یک معادله انتگرالی تبدیل کرد. روال روش نیومن مانند روش پواسن و لیوویل بود و به روش تقریب متوالی معروف است. در سال ۱۸۹۶ پوانکاره [۱۱] معادله انتگرال $y(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)dt = f(x)$ که متناظر با معادله دیفرانسیل جزئی $\nabla^۲ y + \lambda y = F(x,t)$ که در آن $\nabla^۲ = \frac{d^۲}{dx^۲} + \frac{d^۲}{dy^۲}$ می باشد را به دست آورد. همچنین در همان سال ویتو ولترا [۱۲] ریاضیدان ایتالیایی در حین مطالعه موضوع رشد جمعیت به یک معادله انتگرال برخورد کرد. ولترا با استفاده از مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال تابعی، نشان داد که نظریه ی همیلتون [۱۳] و کارل ژاکوبی [۱۴] برای انتگرال گیری از معادلات را می توان به دیگر مسائل فیزیک و ریاضی توسعه داد. وی با وارد کردن متغیر x به عنوان حد بالایی انتگرال یک رده ی مهم از معادله انتگرال را ایجاد نمود که هم اکنون تحت عنوان معادله انتگرال ولترا شناخته می شود. در حدود سال های ۱۹۰۰ تا ۱۹۰۳ ریاضیدان سوئدی به نام اریک ایوار فردهلم [۱۵] با ثابت نگه داشتن حدود انتگرال یک دسته بندی کلی از معادلات انتگرال خطی ارائه کرد. در سال ۱۹۰۰ اولین مقاله ی فردهلم در نظریه ی معادلات انتگرال تحت عنوان:

"*Sur une novella method pour la re solution du problem du dirichle*"

منتشرشد، با این حال اگر نخستین مقاله ولترا که در سال۱۸۹۶ در این زمینه ارائه شد را در نظر بگریم وی پیشگام بوده است. ولترا با استنباط کردن نتایجش با روش های مشابه دیگر(که بعدها توسط فردهلم به طور موفقیت آمیزبه دست آمد)

---

[۹] $Noeiman$
[۱۰] $Direcle$
[۱۱] $H.Poincare$
[۱۲] $V.Volterra$
[۱۳] $Hamilton$
[۱۴] $carl Jakobi$
[۱۵] $Fredholm$

پس از بازبینی و بررسی کشفیاتش را منتشر کرد. فردهلم در سال ۱۹۰۳ نسخه ی کامل تری از نظریه خود را در معادلات انتگرال تحت عنوان زیر منتشر کرد:

"Sur une class de equations fonctionelle"

فردهلم حلی به صورت نسبتی از دترمینان را معرفی کرد و نشان داد که می توان آنرا بر حسب سری توانی بر حسب λ ، که λ یک پارامتر است، بیان نمود. تحقیقات فردهلم برای دستیابی به جواب معادله حرکت موج منجر به ارائه قضایای فردهلم گردید که از قضایای بنیادی در معادلات انتگرال می باشد. ابتدا قضایای فردهلم برای هسته پیوسته ارائه شد، لیکن بعدها توسط کارلمان [۱۶] و ریس [۱۷] برای هسته های کلی تر تعمیم یافت. ولترا و لیروکس [۱۸] اولین کسانی بودند که قضایای وجود و یکتایی جواب را برای رده های عمومی معادلات انتگرال ثابت کردند. البته این روش ها خیلی شبیه هم بودند ولیکن کار ولترا بیشتر مورد توجه قرار گرفت [۲۲]. در سال ۱۹۰۱ آقای اریک هولمگر [۱۹] ریاضیدان سوئدی سمیناری در دانشگاه گوتینگن آلمان ارائه داد که محتوای آن کاربردهای کارهای فردهلم بود و این انگیزه ای برای تلاش و تحقیق دیوید هیلبرت [۲۰] بود. هیلبرت به اهمیت نظریه ی فردهلم پی برد. وی ثابت نمود که معادله دیفرانسیل حاصل از نوسانات یک صفحه ی اصلی می تواند منجر به یک معادله ی انتگرال همگن از نوع فردهلم با هسته ی متقارن باشد. هیلبرت همچنین حدود ۱۰ سال به کار روی نظریه ی فردهلم پرداخت و کارهای او را توسعه داد که منجر به نظریه ی مقادیر ویژه برای معادلات انتگرال شد. یکی از کارهای مهم هیلبرت فرموله نمودن مسائل، معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با شرایط مرزی و اولیه به صورت یک معادله انتگرال است. برای اولین بار اصطلاح نوع اول و دوم که امروزه در معادلات انتگرال به کار می رود توسط هیلبرت پیشنهاد شد.

[۱۶] $F.Carleman$
[۱۷] $F.Riesz$
[۱۸] $Lirox$
[۱۹] $Holmger$
[۲۰] $Hilbert$

در اوایل نیمه دوم قرن بیستم تحقیقات زیادی روی جواب معادله انتگرال به وسیله هرمن ویل [۲۱] در ارتباط با اینکه به ازای چه مقادیری از λ معادله انتگرال جواب دارد صورت گرفت.

روی هم رفته معادلات دیفرانسیل جهان ما را به خوبی توصیف می کنند (شبیه معادلات موج، انتشار موج و امثال آنها). اما معادلات انتگرال ویژگی های خاصی دارند که اهمیت آنها را آشکار می سازد به عنوان مثال ، معادلات انتگرال تابع مجهول را نه تنها به مقدار آن تابع در نقاط مجاور(مشتق ها) بلکه به مقدارش در تمامی ناحیه از جمله مرز مرتبط می کنند. در واقع شرایط مرزی به جای اینکه در مرحله ی آخر حل معادله وضع شوند، در معادله انتگرال تعبیه می شوند از این رو معادله های انتگرال جمع وجورترند و می توانند نسبت به معادله دیفرانسیل مناسب تر و کاراتر باشند.

غالباً راه حل مسائل ریاضی نظیر وجود و یکتایی ، به صورت انتگرالی آسانتر می شود و از ظرافت بیشتری هم برخوردار است. سرانجام خواه ناخواه به مسائلی نظیر پخش و ترابری بر می خوریم که نمی توانیم آنها را با معادلات دیفرانسیل نمایش دهیم، بلکه برای حل این نوع مسائل باید به نوعی ازمعادلات انتگرالی استفاده نماییم.

روش های عددی و کلاسیک بسیاری برای حل معادلات انتگرال ارائه شده است. از میان فعالیتهای زیادی که در این زمینه صورت گرفته می توان به کارهای فیلیپس [۲۲] و نیاخوف [۲۳] اشاره کرد.

---

[۲۱] $Hermanvill$
[۲۲] $Philipse$
[۲۳] $Ninakhof$

۳.۱ تعاریف کلی و دسته بندی معادلات انتگرال

تعریف ۱.۳.۱. هر معادله ای که تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر شود، معادله انتگرال نامیده می شود و فرم کلی این قبیل معادلات به شکل زیر است:

$$\varphi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)F(y(t))dt \qquad (۱.۱)$$

در این معادله $\lambda \neq ۰$ پارامتری معلوم است که می تواند حقیقی یا مختلط باشد. $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال، تابع دو متغیره $k(x,t)$ به عنوان هسته ی معادله و توابع F ، $f(x)$ و $\varphi(x)$ توابعی معلوم هستند و $y(x)$ تابع مجهول می باشد.

منظور از حل معادله (۱.۱) ، پیدا کردن تابع مجهول $y(x)$ است که در آن صدق کند.

اگر در معادله ی (۱.۱) ، $F(y(t))$ بر حسب $y(t)$ خطی یا غیر خطی باشد، معادله ی انتگرال را به ترتیب خطی یا غیر خطی می نامیم. هر گاه $f(x) = ۰$ باشد معادله (۱.۱) را معادله انتگرال همگن، در غیر اینصورت آن را معادله انتگرال غیرهمگن می گویند.

معادله همگن را مسئله مقدار مشخصه و $y(t)$ را تابع مشخصه عملگر انتگرال نیز می گویند [۱].

مثال ۲.۳.۱. معادله انتگرال

$$y(x) = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} cosx\, y(t)dt$$

یک معادله انتگرال خطی همگن و معادله انتگرال

$$y(x) = cosx - \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۴}sin۲x + \int_{۰}^{x} y^{۲}(t)dt \qquad x\epsilon[۰, ۱]$$

یک معادله انتگرال غیر خطی نا همگن می باشند.

در ادامه به معرفی چند نوع از انواع هسته و تعاریف مورد نیاز برای معرفی هسته ها می پردازیم [۲۳].

تعریف ۳.۳.۱. هسته $k(x,t)$ را جدایی پذیر یا تبهگن گوییم هر گاه توابعی مانند $a_i(x)$ و $b_i(t)$ برای $۱ \leq i \leq n$ یافت شوند به طوری که بتوان $k(x,t)$ را به صورت زیر نوشت:

$$k(x,t) = \sum_{i=۱}^{n} a_i(x) b_i(t)$$

بدون آنکه از کلیت مطلب کاسته شود می توان فرض کرد که $a_i(x)$ ها و $b_i(t)$ ها مجموعه های مستقل بر حسب x, t هستند. معادله انتگرالی نظیر هسته های جدایی پذیر را می توان توسط یک دستگاه متناهی از معادلات حل نمود و لذا جواب معادله به طور نظری دقیق به دست می آید، در سایر موارد ناگزیر به استفاده از یک روش تقریبی جهت حل معادله خواهیم بود.

به عنوان مثال: اگر $k(x,t) = xt + x^۲ t^۲$ آنگاه k یک هسته جدایی پذیر است چون می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$k(x,t) = \sum_{i=۱}^{۲} a_i(x) b_i(t),$$

که درآن :

$$a_۱(x) = x \, , \, a_۲(x) = x^۲ \, , \, b_۱(t) = t \, , \, b_۲(t) = t^۲ .$$

تعریف ۴.۳.۱. هسته حقیقی $k(x,t)$ را متقارن گوییم هرگاه $k(x,t) = k(t,x)$.

تعریف ۵.۳.۱. هسته ی $k(x,t)$ را هسته ی هرمیتی گوییم هر گاه $k(x,t) = k^*(t,x)$ ، که در آن $(^*)$ معرف مزدوج مختلط می باشد. حالت خاصی از هسته های هرمیتی، هسته های حقیقی متقارن می باشند.

تعریف ۶.۳.۱. هسته ی $k(x,t)$ را یک هسته ی نرمال گوییم هر گاه $k^* k = k k^*$ ، که در آن $(^*)$ معرف مزدوج مختلط می باشد.

تعریف ۷.۳.۱. ([۱۱]) هسته $k(x,t)$ را یک هسته ی هیلبرت گوییم هر گاه $k(x,t) = cot\left[\dfrac{(x-t)}{۲}\right]$ که در آن x,t متغیرهای حقیقی می باشند.

تعریف ۸.۳.۱. فضای $L^{۲}([a,b])$ را مجموعه همه توابع مربع انتگرال پذیر روی $[a,b]$ تعریف می کنیم. به عبارت دیگر:

$$L^{۲}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \mid \int_a^b |f(x)|^{۲} dx < \infty\}.$$

تعریف ۹.۳.۱. ([۱۱]) هسته $k(x,t)$ را مربع انتگرال پذیر گوییم هر گاه شرایط زیر که به شرایط منظم بودن معروفند با هم برقرار باشند.

۱) $\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^{۲} dxdt < \infty$

۲) $\forall t \epsilon [a,b]$ $\quad \int_a^b |k(x,t)|^{۲} dx < \infty$

۳) $\forall x \epsilon [a,b]$ $\quad \int_a^b |k(x,t)|^{۲} dt < \infty$

تعریف ۱۰.۳.۱. اگر برای هسته ی $k(x,t)$ داشته باشیم:

$$k(x,t) = \frac{F(x,t)}{|x-t|^{\alpha}} \qquad \circ < \alpha < ۱$$

که در آن $F(x,t)$ یک تابع کراندار است، در این حالت $k(x,t)$ را یک هسته ی منفرد ضعیف می نامیم. اگر $\alpha = ۱$ باشد آنگاه هسته ی $k(x,t)$ را یک هسته ی کوشی می نامیم.

تعریف ۱۱.۳.۱. اگر هسته $k(x,t)$ به صورت تابعی از $x - t$ باشد یعنی $k(x,t) = k(x-t)$ ، آنگاه هسته $k(x,t)$ را یک هسته پیچشی یا تفاضلی می گویند.

۴.۱ دسته بندی معادلات انتگرال

معادلات انتگرال را می توان به دو دسته ی کلی تقسیم نمود. اول آنهایی که حدود انتگرال گیری آنها ثابت است که معادلات انتگرال فردهلم نامیده می شوند و سپس آنهایی که حدود انتگرال گیری برای آنها متغیر می باشد که معادلات انتگرال ولترا نام دارند. البته ما در این پایان نامه معادلات انتگرال را به چهار دسته ی زیر تقسیم می کنیم که در ادامه به توضیح مختصری از آنها می پردازیم.

۱- معادلات انتگرال فردهلم

۲-معادلات انتگرال ولترا

۳-معادلات انتگرال منفرد

۴-معادلات انتگرال- دیفرانسیل

۵.۱ معادلات انتگرال فردهلم

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم که در آنها حد پایین و حد بالای انتگرال گیری اعداد ثابت bو a هستند به صورت زیر می باشد:

$$\varphi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt \qquad a \leq x,t \leq b \tag{۲.۱}$$

که در آن $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ از قبل مشخص هستند و λ هم یک پارامتر معلوم می باشد.

بر حسب اینکه $\varphi(x)$ کدامیک از مقادیر زیر را انتخاب کند معادلات انتگرال فردهلم به دو دسته عمده زیر تقسیم می شوند:

۱- زمانی که $\varphi(x) = ۰$ ، معادله انتگرال (۲.۱) به معادله انتگرال زیر تبدیل می شود:

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt = ۰ \qquad a \leq x,t \leq b$$