دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان

بررسی نقاط ثابت مشترك نگاشتها در فضاهای متریك مخروط

نگارش

ولی حسینی

استاد راهنما

دکتر علی ثامری پور

استاد مشاور

دکتر محمود شکوری

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی

آبان ماه ۱۳۹۳

سپاس و قدر دانی

سپاس خداوند بلند مرتبه راکه با لطف ازلی خود جهانیان را هدایت میکند. در آغاز وظیفه خود میدانم که از زحمات بی دریغ استاد راهنما و استاد مشاورخود آقایان دکترعلی ثامری پور و دکترمحمود شکوری که همواره بنده را مورد راهنمایی خودقرار می دادند وبدون زحمات آنها قطعا این مجموعه به سرانجام نمی رسیدتشکر کنم وازخداوندبزرگ عزت و سربلندی همه اساتید خصوصا این عزیزان را طلب می نمایم. بخصوص از اساتید ارجمند آقایان دکتر امیرقاسم غضنفری و دکتر علی بارانی بیرانوند که با تلاش دلسوزانه یاریگر ما بودند به طور ویژه تشکر می نماییم.

دانشگاه لرستان

چکیده

عنوان پایان‌نامه: بررسی نقاط ثابت مشترك نگاشتها در فضاهای متريك مخروط
استاد راهنما : دکتر علی ثامری پور **استاد مشاور:** دکتر محمودشکوری
درجه تحصیلی : کارشناسی ارشد **رشته :** ریاضی محض(آنالیز) **محل تحصیل :** دانشگاه لرستان **دانشکده :** علوم پایه
کلید واژه‌ها: نقاط ثابت مشترك، فضای متريك مخروط، شبه انقباضی
چکیده : دراین رساله نقاط ثابت نگاشت ها در فضاهای متريك مخروط مورد بررسی قرار مي گيرد. ابتدا فضاهای متريك مخروط را معرفی می کنیم. پس از آن تعدادی از قضیه های نقطه ثابت مربوط به نگاشت های به طور ضعیف سازگار، نگاشت های شبه انقباض و... اثبات می شود.

مقدمه

"انما یخشی الله من عباده العلماء" فاطر ۲۸ (و تنها بندگان دانا و دانشمند از خدا ترس آمیخته با تعظیم دارند.) خدایا می دانم که نمی دانم، به ذره ای از علم بی کرانت، دانایم کن....

یکی از مهمترین قضیه هایی که توجه ریاضیدانان زیادی را در دهه های گذشته به خود معطوف نموده است، قضیه نقطه ثابت مشهور باناخ [1] می باشد. در سال ۱۹۲۲باناخ قضیه مشهور نقطه ثابت خود را که متعاقبا می آید ثابت کرد. این قضیه که به اصل کلی انقباض معروف است ابزاری نیرومند در آنالیز غیرخطی است. این قضیه می گوید: هر انقباض فضای متریك تام S دارای یك نقطه ثابت است. اصل فوق که کاربرد فراوانی دارد توسط نویسندگان متعددی تعمیم داده شده و گسترش یافته است. به عنوان مثال چند مورد را ذکر می کنیم. سیریك [2] نگاشت شبه انقباضی را به عنوان یکی از نگاشهای عام مطرح کرده وشرایط لازم برای وجود نقاط ثابت را مورد بررسی قرار داده است[۱]. بررسی نقاط ثابت مشترك برای نگاشتهای تعریف شده در فضاهای متریك محدب اخیرا توسط اسدوکیرك [3] شروع شده است [۲]. داس ونایك [4] قضیه ای پیرامون نقاط ثابت مشترك برای نگاشتهای پیوسته در یك فضای متریك مطرح کرده اند[۳]. جانك [5] قضیه ای پیرامون نگاشتهای جابجایی و نقاط ثابت مربوط به آنها مطرح کرده است[۴].

---

[1] banach

[2] ciric

[3] kirk and assad

[4] naik and das

[5] g.jungck

مقاله اي كه تجزيه و تحليل آن در اين رساله دستمايه نگارنده قرار گرفته است توسط استوجان، [۶] والاديمير [۷] و رساپور [۸] تحت عنوان

$"Common\, fixed\, points\, for\, (g,f)\, type\, maps\, in\, cone\, metric\, spaces"$

ارائه شده است.

درفصل اول اين رساله ابتدا اطلاعات سودمندی پیرامون فضاهای متريك، فضاهای متريك تام، فضاهای نرمدار، پیوستگی يكنواخت، نقطه ثابت و انقباض و اثبات چند قضيه نقطه ثابت در فضاهای متريك تام كه اخيرا به اثبات رسيده اند ارائه مى مى شود. در فصل دوم اطلاعاتی راجع به فضاهای متريك مخروط كه توسيعی طبيعی از فضاهای متريك است، بيان مى گرددوقضايايی در اين مورد بيان و اثبات شده است. در فصل سوم چند قضيه نقطه ثابت در فضاهای متريك مخروط بيان و اثبات مى شودو سپس درفصل چهارم قضيه هايی پيرامون نقاط ثابت و انطباق نگاشتها در فضاهای متريك مخروط و... ارائه و اثبات شده است. در آخر واژه نامه انگليسی به فارسی و منابع استفاده شده در اين رساله درج شده است. اين رفرنس ها در متن با علامت [.] مشخص شده اند. در اين رساله منظور از قضيه ی $m.n.p$ يعنی قضيه شماره m از بخش n از فصل p می باشد. برای تعريف، تذكر و... نيز به همين معنی خواهد بود.

---

[۶] Radenovic Stojan

[۷] Rakocevic Valadimir

[۸] Resapour Sharam

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

این فصل شامل تعاریف و قضایایی است که در فصل های بعدی این رساله مورد استفاده قرار خواهند گرفت و متشکل از ۴ بخش می باشد. ابتدا مفهوم فضاهای متریك ومثالهای متنوعی از آن بیان خواهد شد، در بخش بعد به مطالبی در مورد فضاهای نرمدار خواهیم پرداخت، در بخش سوم پیوستگی یکنواخت را تعریف کرده و مطالبی در مورد آنها بیان می کنیم و در نهایت در بخش چهارم مطالبی را درباره ی نقاط ثابت نگاشتهای انقباضی و اثبات چند قضیه پیرامون آن خواهیم پرداخت.

۱.۱ مفهوم فضای متریك

در این بخش ابتدا تعریف فضای متریك ارائه می شود. پس از آن مفهوم دنباله کوشی و همگرا و فضای متریك تام همرا با مثالهای متنوعی بیان می شود تا پیش زمینه بحث در باره فضاهای متریك مخروط که توسیعی طبیعی از فضاهای متریك است فراهم شود.

تعریف ۱.۱.۱. یك فضای متریك عبارت است از مجموعه ای ناتهی از اشیا (نقاط)مانند X به انضمام تابعی مانند $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ با نام متر فضا که به ازای هر x, y, z در X در چهار خاصیت زیر صدق کند.

۱) $d(x, x) = 0$

۲) $x \neq y \Longrightarrow d(x, y) > 0$

۳) $d(x, y) = d(y, x)$

۴) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

عدد نامنفی $d(x, y)$ را فاصله x تا y نامندوخاصیت چهارم نامساوی مثلثی نام دارد. برای تاکید بر

نقش X, d گاهی یك فضای متریك را با علامت (X, d) نشان می دهند.

مثال ۱.۱.۱. اگر $M = \mathbb{R}^n$ و $d(x,y) = \| x - y \|$ این متر را متر اقلیدسی گویند.

مثال ۲.۱.۱. فرض کنیم M مجموعه ای دلخواه باشد، تعریف می کنیم:

$$d(x,y) = \begin{cases} ۱ & x \neq y \\ \\ ۰ & x = y \end{cases}$$

در این صورت این متر را متر گسسته (مجزا) و فضای (M, d) را یك فضای متریك گسسته نامند.

مثال ۳.۱.۱. اگر (M, d) یك فضای متریك و S یك زیرمجموعه ناتهی M باشد، آنگاه (S, d) نیز یك زیرفضایی است با همان متر؛ این متر را گاهی متر القا شده به وسیله d بر S نامند و (S, d) یك زیرفضای متریك M نامند. مثلا اعداد گویا با متر اقلیدسی یك زیرفضای متریك اعداد حقیقی است.

مثال ۴.۱.۱. $M = \mathbb{R}^۲$ به همراه $d(x,y) = \sqrt{(x_۱ - y_۱)^۲ + (x_۲ - y_۲)^۲}$ یك فضای متریك است.

مثال ۵.۱.۱.

$$M = \{(x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲ : x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۱\}$$

یعنی دایره یکه با متر تعریف شده به صورت زیر یك فضای متریك است.

درازای کمان کوچکتری که دو نقطه را به هم وصل می کند. $= d(x,y)$

مثال ۶.۱.۱.

$$M=\{(x_۱,x_۲,x_۳)\in\mathbb{R}^۳ : x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲=۱\}$$

یعنی کره یکه با متر تعریف شده به صورت زیر یك فضای متریك است. درازای کمان کوچکتری که در امتداد دایره عظیمه دو نقطه را به هم وصل می کند. $d(x,y) =$

مثال ۷.۱.۱. اگر $M=\mathbb{R}^n$ و $d(x,y)=\|x_۱-y_۱\|+...+\|x_n-y_n\|$ آنگاه (M,d) یک فضای متریك است اما زیرفضای متریك فضای اقلیدسی نیست زیرا متر آنها متفاوت است.

مثال ۸.۱.۱. اگر $M=\mathbb{R}^n$ و $d(x,y)=max\{\|x_۱-y_۱\|,...,\|x_n-y_n\|\}$ آنگاه (M,d) یك فضای متریك است.

تعریف ۲.۱.۱. گوییم دنباله $\{x_n\}$ کوشی است اگر به ازای هر $\epsilon>۰$ یك عدد طبیعی مانند $N>۰$ موجود باشد بطوریکه هرگاه $m,n>N$ آنگاه $d(x_n,x_m)<\epsilon$. فضای متری (M,d) را تام گوییم اگر هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

مثال ۹.۱.۱. اگر $T=(۰,۱]$ به عنوان یك فضای متریك با متر اقلیدسی در نظر گرفته شود دنباله $\{\frac{۱}{n}\}$ یك دنباله کوشی است اما همگرا نیست زیرا $\frac{۱}{n}\to ۰\notin T$ بنابراین T یك فضای متریك تام نیست.

۲.۱ مفهوم فضای نرمدار

تعریف ۱.۲.۱. یك فضای برداری متشکل است از

الف- یك میدان F از اسکالرها

ب- یك مجموعه V از اشیایی به نام بردارها بطوریکه $(V,+)$ گروهی است آبلی

ج- یك عمل به نام ضرب اسکالری که به ازای هر $c \in F, \alpha \in V$ بردار $c\alpha \in V$ را وابسته می سازد با این شرایط که

۱) به ازای هر $۱ \in F, \alpha \in V$ داشته باشیم $۱\alpha = \alpha$

۲) به ازای هر $c_۱, c_۲ \in F, \alpha \in V$ داشته باشیم $(c_۱c_۲)\alpha = c_۱(c_۲\alpha)$

۳) به ازای هر $c_۱, c_۲ \in F, \alpha \in V$ داشته باشیم $(c_۱ + c_۲)\alpha = c_۱\alpha + c_۲\alpha$

۴) به ازای هر $\alpha_۱, \alpha_۲ \in V, c \in F$ داشته باشیم $c(\alpha_۱ + \alpha_۲) = c\alpha_۱ + c\alpha_۲$

تذکر ۱.۲.۱. بطور خلاصه گروه آبلی $(V,+)$ روی میدان F یك فضای برداری است اگر به ازای هر $\alpha, \beta \in V, c \in F$ داشته باشیم

۱) $\alpha + \beta \in V$

۲) $c\alpha \in V$

مثال ۱.۲.۱. مجموعه ماتریس های ۲×۲ همراه با جمع ماتریس ها گروهی است آبلی و روی میدان اعداد حقیقی یک فضای برداری است.

مثال ۲.۲.۱. مجموعه اعداد گویا با جمع معمولی گروهی است آبلی اما روی میدان اعداد حقیقی یك فضای خطی نمی باشد زیرا $\sqrt{۲} \in \mathbb{R}, \frac{۱}{۳} \in \mathbb{Q} \to \frac{\sqrt{۲}}{۳} \notin \mathbb{Q}$

تعریف ۲.۲.۱. گوییم فضای برداری X یك فضای نرمدار است اگر به ازای هر $x \in X$ عدد حقیقی و نامنفی $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که

۱) به ازاي هر $x, y \in X$ داشته باشیم : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

۲) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، $\|\alpha x\| =| \alpha | \|x\|$

۳) $x \neq \circ \Rightarrow \|x\| > \circ$

تذکر ۲.۲.۱. هر فضای نرمدار را می توان به عنوان یك فضای متریك در نظر گرفت که در آن

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

مثال ۳.۲.۱. فرض کنیم S یك مجموعه دلخواه باشد و

$$l_s^\infty = \{f : f : s \to \mathbb{R}, \text{کراندار است } f\}$$

که در آن

$(f + g)x = f(x) + g(x)$(۱

$(cf)(x) = cf(x)$ (۲

نرم روی آن را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\|f\|_\infty = sup|f(x)| \quad s.t \quad x \in S$$

در این صورت l_s^∞ یك فضای نرمدار است.

مثال ۴.۲.۱. اگر X, Y دو فضای خطی نرمدار باشند تعریف می کنیم :

$$B(X, Y) = \{f : X \to Y, \text{خطی و کراندار است } f\}$$

(f+g)x=f(x)+g(x) (۱

۲) (cf)x=cf(x)

نرم روی آن را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\|f\| = sup\{\|f(x)\|_Y \quad : \quad \|x\|_X = ۱\}$$

در این صورت $B(X,Y)$ یك فضای خطی نرمدار است.

تذکر ۳.۲.۱. هر فضای باناخ یك فضای نرمدار است که نسبت به متر تعریف شده توسط نرمش تام باشد یعنی هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد. فضای هیلبرت یك فضای نرمدار است که نرم آن از ضرب داخلی حادث شده باشدیعنی در قانون متوازی الا ضلاع صدق کند.

$$\forall x, y \in H \quad \|x+y\|^۲ + \|x-y\|^۲ = ۲\|x\|^۲ + ۲\|y\|^۲$$

مثال ۵.۲.۱. $l_۲ = \{X = (x_۱, x_۲, ...) : \|x\| = (\sum_{i=۱}^{\infty} |x_i|^۲)^{\frac{۱}{۲}} < \infty\}$

$l_۲$ یك فضای هیلبرت است.

۳.۱ مفهوم پیوستگی یکنواخت

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $f : S \to T$ تابعی باشد از فضای متریك (S, d_S) به فضای متریك (T, d_T) گوییم f بر $A \subset S$ پیوسته یکنواخت است اگر به ازای هر $x, p \in A$ داشته باشیم :

$$\forall \epsilon > ۰ \exists \delta > ۰ : d_s(x,p) < \delta \Rightarrow d_T(f(x), f(p)) < \epsilon$$

مثال ۱.۳.۱. تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ بر $A = (۰, ۱]$ پیوسته است اما پیوسته یکنواخت نیست زیرا اگر

$$x = \delta, p = \frac{\delta}{۱۱} \Rightarrow |x-p| = \frac{۱۰\delta}{۱۱} < \delta$$

از طرفی همواره داریم : $|f(x) - f(p)| = \frac{۱۰}{\delta} > ۱۰$

مثال ۲.۳.۱. تابع $f(x) = x^{۲}$ بر $A = (۰, ۱]$ پیوسته یکنواخت است زیرا در این فاصله به ازای هر $x, p \in (۰, ۱)$ همواره داریم : $۰<x+p<۲ (*)$ حال

$$\forall \epsilon>۰ \exists \delta>۰ : if \quad |x-p|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(p)| = |x^{۲}-p^{۲}| = |(x-p)(x+p)|<۲\delta<\epsilon$$

کافی است قرار دهیم $\delta<\frac{\epsilon}{۲}$ آنگاه استلزام منطقی فوق همواره برقرار خواهد بود. اما همین تابع بر اعداد حقیقی پیوسته یکنواخت نیست زیرا شرط (*) برقرار نمی باشد.

تذکر ۱.۳.۱. از پیوستگی یکنواخت بر A پیوستگی بر A نتیجه می شود. اگر A فشرده باشد عکس این مطلب نیز برقرار است. (قضیه هاینه آنالیز آپوستل)

۴.۱ مفهوم انقباض و نقطه ثابت

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید $f : S \to S$ تابعی باشد از فضای متریک S در خودش؛ $p \in S$ را یک نقطه ثابت f نامند هرگاه $f(p) = p$.

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنید $f : S \to S$ تابعی باشد از فضای متریک S در خودش؛ f را یک انقباض S نامند هرگاه به ازای هر $x, y \in S$ وجود داشته باشد $\alpha \in (۰, ۱)$ بطوریکه $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ ثابت α را پایای انقباض نامند.

تذکر ۱.۴.۱. اگر f یک انقباض فضای متریک S باشد بر این فضا پیوسته یکنواخت است؛ زیرا اگر $d(x, y)<\delta$ بنا به تعریف انقباض وجود دارد $\alpha \in (۰, ۱)$ بطوریکه

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)<\alpha\delta<\epsilon$$

حال کافی است قرار دهیم $\delta \leq \dfrac{\epsilon}{\alpha}$

قضیه ۱.۴.۱. (اصل انقباض باناخ) [1] هر انقباض فضای متریك تام S مانند f دارای نقطه ثابت منحصربفردی است.

برهان : ابتدا نشان می دهیم f حداکثر یك نقطه ثابت دارد. زیرا اگر p, q دو نقطه ثابت f باشند از تعریف انقباض نتیجه گرفته می شود که وجود دارد $\exists \alpha \in (۰, ۱)$ بطوریکه $d(f(p), f(q)) \leq \alpha d(p, q)$ از طرفی چون p, q نقاط ثابت f هستند پس $f(p) = p, f(q) = q$ بنابراین خواهیم داشت :

$$d(f(p) = p, f(q) = q) \leq \alpha d(p, q) \Rightarrow ۰ \leq (۱ - \alpha) d(p, q) \leq ۰ \Rightarrow d(p, q) = ۰ \Rightarrow p = q$$

حال نشان می دهیم چنین نقطه ای وجود دارد، برای این کار یك نقطه دلخواه مانند $x \in S$ اختیار نموده دنباله زیر را در نظر می گیریم.

$$x = p_۰, f(x) = p_۱, f(f(x)) = p_۲, f(f(f(x))) = p_۳, ...$$

یعنی به استقرا دنباله $\{p_n\}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$p_۰ = x, p_۱ = f(p_۰), p_۲ = f(p_۱), ..., p_{n+۱} = f(p_n)$ ثابت می کنیم این دنباله به یك نقطه ثابت همگراست. ابتدا ثابت می کنیم این دنباله کوشی است. از این که f یك انقباض است نتیجه می شود که $d(p_{n+۱}, p_n) = d(f(p_n), f(p_{n-۱})) \leq \alpha d(p_n, p_{n-۱})$ پس به استقرا خواهیم داشت :

$d(p_{n+۱}, p_n) \leq \alpha^n d(p_۰, p_۱) = c\alpha^n$ که در آن $c = d(p_۰, p_۱)$ حال برای $m>n>N \in \mathbb{N}$ داریم :

$d(p_m, p_n) \leq \sum_{k=n}^{m-۱} d(p_{k+۱}, p_k) \leq c \sum_{k=n}^{m-۱} \alpha^k = c\dfrac{\alpha^n}{۱ - \alpha}$ اما چون $\alpha \in (۰, ۱)$ وقتی $n \to \infty$ سمت راست نامساوی اخیر به صفر نزدیك می شود ودر نتیجه $d(p_m, p_n) \to ۰$. یعنی دنباله $\{p_n\}$ کوشی است از طرفی فضای متریك S تام است پس این دنباله باید به عنصری مانند $p \in S$ همگرا شود. از طرفی بنابر تذکر (۱-۴-۱) f بر S پیوسته است. بنابراین خواهیم داشت :

---

[1] principle contraction banach

$$f(p) = f(\lim_{n\to\infty} p_n) = \lim_{n\to\infty} f(p_n) = \lim_{n\to\infty} p_{n+1} = p$$

پس p یک نقطه ثابت f است.

مثال ۱.۴.۱. فرض کنید $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x}), S = [1, \infty[$ ثابت کنید f يك انقباض S است با پایای $\alpha = \frac{1}{2}$ و نقطه ثابت $p = \sqrt{2}$ دنباله p_n را که از $x = p_0 = 1$ شروع می شود تشکیل دهید و نشان دهید که عناصر آن به $p = \sqrt{2}$ نزديك می شوند.

حل : با يك محاسبه ساده داریم :

$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ واضح است که (۱) $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$

زیرا با استفاده از استدلال بازگشتی می توان به يك عبارت بدیهی رسید بطوريكه روند طی شده بازگشت پذیر باشد.

$$d(f(x), f(y)) = |\frac{1}{2}x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}y - \frac{1}{y}| \leq \frac{1}{2}|x - y| \Rightarrow |x - y||\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}| \leq \frac{1}{2}|x - y| \Rightarrow$$
$$|\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2y^2} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow xy>1$$

که نامساوی آخر با توجه به حوزه تعریف متغیر ها همواره برقرار است؛ از طرفی روند فوق برگشت پذیر است پس بنا به استدلال بازگشتی حکم (۱) برقرار است. حال دنباله را تشکیل می دهیم :

$$p_0 = 1, p_1 = f(p_0) = \frac{3}{2}, p_2 = f(p_1) = \frac{17}{2}, p_3 = f(p_2) = \frac{577}{488}, \ldots$$

با يك محاسبه ساده در خواهیم یافت که جملات دنباله فوق به $p = \sqrt{2}$ نزديك می شوند.

مطالبي که از این پس تا پایان فصل اول مي آیند از [۳]و[۴] انتخاب شده اند.

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنید f, g دو نگاشت از فضای متريك X به روی X باشند، گوییم این دو نگاشت

جابجایی پذیرند اگر $\forall x \in X : f(g(x)) = g(f(x))$

قضیه ۲.۴.۱. [4, Proposition 1] فرض کنید f نگاشتی باشد از فضای متریك X به روی X ؛ هرگاه نگاشت ثابتی مانند $h : X \to X$ موجود باشد بطوریکه $f(h(x)) = h(f(x))$ در این صورت f دارای یك نقطه ثابت است.

برهان :فرض کنید
$$\begin{cases} h : X \to X \\ h(x) = a \in X \end{cases}$$
همان تابع ثابت مورد نظر باشد که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $f(h(x)) = h(f(x))$ می خواهیم ثابت کنیم f یك نقطه ثابت دارد. ملاحظه می کنید که $f(a) = f(h(a)) = h(f(a)) = a$

واین یعنی a یك نقطه ثابت f است.

لم ۱.۴.۱. [4, Lem 1] فرض کنید $\{y_n\}$ یك دنباله در فضای متریك تام (X, d) باشد و به ازای هر هر عدد طبیعی n وجود داشته باشد $\alpha \in (۰, ۱)$ بطوریکه

$$d(y_{n+۱}, y_n) \leq \alpha d(y_n, y_{n-۱})$$

در این صورت دنباله $\{y_n\}$ به نقطه ای در X همگراست.

برهان : با استفاده از فرض داریم :

$$d(y_{n+۱}, y_n) \leq \alpha d(y_n, y_{n-۱}) \leq \alpha^۲ d(y_{n-۱}, y_{n-۲}) \leq ... \leq \alpha^n d(y_۰, y_۱)$$

حال اگر $n>m>N_۰ \in \mathbb{N}$ یعنی وقتی m و به تبع آن n به بی نهایت میل کند و استفاده از نامساوی مثلثی داریم :

$$d(y_n, y_m) \leq d(y_n, y_{n-۱}) + d(y_{n-۱}, y_{n-۲}) + ... + d(y_{m+۱}, y_m) \leq [\alpha^{n-۱} + \alpha^{n-۲} + ... + \alpha^m] d(y_۰, y_۱) \leq \frac{\alpha^m}{۱ - \alpha} d(y_۰, y_۱)$$

در بی نهایت سمت راست نامساوی اخیر و به تبعیت از آن سمت چپ نامساوی به صفر میل می کنند زیرا داخل کروشه دنباله ای هندسی با قدر نسبت کوچکتر از یك است لذا به ازای هر $\epsilon > \circ$ خواهیم داشت

$$d(y_n, y_m) \leq \epsilon$$

و این یعنی دنباله کوشی است و چون فضا تام است پس همگراست یعنی وجود دارد $p \in X$ بطوریکه

$\lim_{n\to\infty} y_n = p$ یا بطور معادل $y_n \to p$

قضیه ۳.۴.۱. [4, Theorem 1] فرض کنید X یک فضای متریك تام باشد. همچنین f یك نگاشت پیوسته از X به روی X و g هر نگاشت دیگری از X به روی X باشد که بتواند با f جابجا شود. علاوه براین دونگاشت در شرط $g(X) \subseteq f(X)$ صدق کنند و به ازای هر $x, y \in X$ وجود داشته باشد $\lambda \in (\circ, ۱)$ بطوریکه $d(g(x), g(y)) \leq \lambda d(f(x), f(y)) (*)$ در این صورت f, g یك نقطه ثابت مشترك منحصربفرد دارند.

برهان : ابتدا یك مثال می زنیم تا معلوم شود شرایط بیان شده در قضیه ضروری است سپس به اثبات خواهیم پرداخت. نگاشت ها را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\begin{cases} f : X \to X \\ f(x) = x \end{cases} \text{،} \quad \exists a \in X : \begin{cases} g : X \to X \\ g(x) = a \end{cases}$$

از طرفی توجه می کنیم که

$$f(g(x)) = f(a) = a, g(f(x)) = g(x) = a$$

که بیانگر این است که دو نگاشت جابجایی پذیرند. همچنین

$$g(X) = \{a\} \subseteq f(X) = X$$

در نتیجه به ازای هر برای $\alpha \in (\circ, ۱)$ داریم :