بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:

آشفتگی مشتقات دوتایی روی جبرهای باناخ

استاد راهنما:

پروفسور علی عبادیان

نگارنده:

پگاه افتقار

دی ماه ۱۳۹۱

تقدیم به پدر بزرگوارم

بزرگ مردی که الفبای درستی را به من آموخت،

و هستی ام نمودی از محبت و ایثار بی پایان اوست.

تقدیم به مادر مهربانم

دریای بی کران فداکاری و گذشت، که وجودم برایش همه

رنج بود و وجودش برایم همه مهر؛

فرشته مهربانی که بهشت به حق زیر پای اوست.

به راستی آفریننده با شکوه ترین لذت، نه دانش بلکه آموختن است، نه داشتن بلکه آفرینش است، نه در جایی ماندن بلکه بدانجا سفر کردن است. آن هنگام که من تمامی نوری را دریافتم، به تاریکی دیگری بر خواهم گشت. همانا انسان کنجکاو سیراب نشدنی است، و آن هنگام که خانه ای بنا نهاد، به جای آسودن در آن، همت به ساختن خانه ای دیگر می گمارد.

"نامه گاوس یه بولیای در دوم سپتامبر ۱۸۰۸"

سپاس گزاری...

سپاس خدای را به قدر آن سپاسی که گرامی ترین آفریدگان نزد او و پسندیده ترین ستایشگران آستان او، وی را ستوده اند؛ سپاسی بالاتر از سپاس دیگر سپاس گزاران، مانند برتری پروردگارمان بر تمامی مخلوقات...

سپاس و تعظیم به درگاه خدایی که همواره و همواره در زندگیم بیش از آنچه که مستحق باشم، به من عطا فرموده.

سپاس و تقدیر از:

پدر و مادرم؛ پدر و مادری که همه زندگی من اند؛

پدر بزرگ و مادر بزرگ مهربانی که در سال هایی که والدینم به دلیل شرایط تحصیلیشان دور از من بودند، در ایفای نقش پدر مادری، به حق برایم سنگ تمام گذاشتند؛

خواهر نازنینم؛

تمامی بزرگوارانی که از نخستین روزهای زندگیم تا به امروز، نقش آموزگار و راهنما را برایم داشته اند. از مربیان مهدکودک تا اساتیدی که در طی این ۶ سال در دانشگاه ارومیه افتخار شاگردی آن ها را داشته ام. اما در میان این اساتید، سه استاد بودند که نقشی کلیدی در زندگی تحصیلی من داشتند، به گونه ای که اگر روزی در عرصه ریاضیات بتوانم گامی به پیش بردارم، بی شک آن را مدیون این بزرگوارانم؛

جناب آقای دکتر علی سرباز جانفدا، جناب آقای دکتر سعید استاد باشی و پروفسور علی عبادیان؛

استاد راهنمای گرامیم پروفسور علی عبادیان که با علم والای خود و شیوه زیبای تدریس، به راستی از

جمله اساتیدی بودند که چشمانم را به دنیای زیبای ریاضیات گشودند؛

جناب آقای دکتر سعید شمس و جناب آقای دکتر سعید استادباشی که زحمت مطالعه و داوری پایان نامه را بر عهده داشتند.

و در پایان،

بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را.

پگاه افتقار

دی ماه ۱۳۹۱

نام خانوادگی: افتقار　　　　نام: پگاه

عنوان پایان‌نامه: آشفتگی مشتقات دوتایی روی جبرهای باناخ.

استاد راهنما: پروفسور علی عبادیان

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　رشته: ریاضی محض　　گرایش: آنالیز

دانشگاه: دانشگاه ارومیه　　دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: دی ماه ۱۳۹۱　　تعداد صفحه: ۱۱۴

کلیدواژه‌ها:مشتق دوتایی و پایداری هایرز-الام-راسیاس تعمیم یافته.

چکیده در این پایان نامه پایداری هایرز-الام-راسیاس تعمیم یافته مشتقات دوتایی را روی جبرهای باناخ بررسی می کنیم.

فهرست مطالب

پیشگفتار

مسئله پایداری معادلات تابعی، ۷۳ سال پیش در سال ۱۹۴۰ با سئوالی از استانیسلاو الام(اس. ام. الام) [1] در دنیای ریاضیات ظهور پیدا کرد [۶۹]. اولین پاسخ به سئوال الام یک سال بعد توسط دونالد هایرز(دی. اچ. هایرز) [2] ارائه شد [۳۷]. سیر پاسخگویی به سئوال الام به طور پیوسته ادامه داشت تا این که در سال ۱۹۹۴ پاسک گاوروتا [3]، زیباترین و جامع ترین پاسخی را که تا به امروز برای سئوال الام ارائه شده، بیان نمود [۲۸]. در سال های اخیر نیز ریاضی دانان متعددی پایداری انواع مختلف معادلات تابعی و ترکیبی از آن ها را مورد بررسی قرار داده اند.

معرفی ومطالعه مشتق ساختمان های جبری، بیش از هفتاد سال مورد توجه و مطالعه بسیاری از ریاضی دانان بوده است. این مفهوم از ابعاد مختلف مورد مطالعه و تعمیم قرار گرفته و در شاخه های مختلف علوم مورد بررسی واقع شده است.امروزه مشتق (از هر نوع) نه تنها در آنالیز بلکه در بسیاری از زمینه های دیگر همچون جبر، آمار، فیزیک و مکانیک نیز مورد تحقیق و استفاده قرار می گیرد.

برای اولین بار مسئله پایداری مشتقات توسط شمرل [4] مورد مطالعه قرار گرفت. در واقع او اولین نتیجه ابرپایداری مشتقات بین جبرهای عملگری را بیان کرد [۶۷].

این پایان نامه بر اساس مرجع [۳۱] تدوین گردیده است. این مرجع با به کارگیری روش مستقیم، پایداری هایرز-الام-راسیاس تعمیم یافته و نیز ابرپایداری یک معادله تابعی به نام معادله تابعی مشتقات دوتایی را روی جبرهای باناخ بررسی کرده است.

[1] S. M. Ulam
[2] D. H. Hyers
[3] P. Gavruta
[4] P. Semrl

این پایان نامه مشتمل بر ۴ فصل است.

در فصل اول که شامل ۳ بخش است، یک سری مفاهیم، لم ها و قضایای مقدماتی را که در فصل های بعد به آن ها نیاز داریم، بیان کرده ایم. توالی زیر بخش های بخش اول، نحوه شکل گیری بزرگ ترین ساختار جبری-جبر- را برای خواننده تجسم می بخشد. بخش دوم شامل مقدماتی از جبر و جبرخطی است. بخش سوم مفاهیم اولیه ی ۴ فضای معروف متریک، توپولوژیک، اندازه پذیر و نرم دار را در بر دارد.

در فصل دوم تعاریفی از انواع مختلف مشتقات و تعمیم های آن ها از جمله مشتق دوتایی را ارائه داده-ایم.

فصل سوم شامل ۴ بخش است. بخش اول را به مفهوم معادله تابعی و مفاهیم مرتبط با آن از جمله دامنه معادله تابعی، جواب های معادله تابعی و... اختصاص داده ایم. در بخش دوم مثال هایی متعدد از معادلات تابعی را ذکر کرده ایم. بخش سوم به مفهوم پایداری و ابرپایداری یک معادله تابعی و تاریخچه آن ها اختصاص دارد. در بخش چهارم نیز برخی از روش های پایداری را بیان کرده ایم.

فصل چهارم که هدف اصلی این پایان نامه است خود به دو بخش تقسیم می شود. در بخش اول پایداری معادله تابعی مشتق دوتایی را روی جبرهای باناخ و در بخش دوم نیز ابرپایداری این معادله تابعی را روی جبرهای باناخ ثابت می کنیم.

فصل ۱
مفاهیم مقدماتی

در این فصل مفاهیم اولیه، لم ها و قضایایی را که در فصل های بعد نیاز داریم، بیان کرده ایم. این فصل بر اساس مراجع [۶۴، ۶۶، ۶۵، ۳۴، ۳۳، ۲۵، ۸] تدوین گردیده است.

۱.۱ جبر

۱.۱.۱ گروه

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم G مجموعه‌ای ناتهی باشد. تابع $f : G \times G \longrightarrow G$ را یک عمل دوتایی(عمل) روی G می نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. مجموعه ناتهی G را گروه می نامیم هرگاه در G عملی دوتایی که با نماد $\centerdot$ نشان می‌دهیم و ضرب می نامیم، موجود باشد به طوری که به ازای هر $a, b, c, \in G$ داشته باشیم:

i) $a \centerdot b \in G$ (بسته بودن عمل $\centerdot$)؛

ii) $a \centerdot (b \centerdot c) = (a \centerdot b) \centerdot c$ (شرکت پذیر بودن عمل $\centerdot$)؛

iii) در G عضوی مانند e موجود باشد به طوری که به ازای هر $a \in G$، $a \centerdot e = e \centerdot a = a$ (وجود عنصر همانی در G)؛

iv) به ازای هر $a \in G$، عضوی از G مانند a^{-1} موجود باشد به طوری که $a \centerdot a^{-1} = a^{-1} \centerdot a = e$ (وجود عنصر وارون در G).

تعریف ۳.۱.۱. مجموعه ناتهی G را به همراه عمل دوتایی $\centerdot$ یک نیم گروه (شبه گروه) می نامیم، هرگاه عمل $\centerdot$ در G دارای خاصیت شرکت پذیری باشد.

تعریف ۴.۱.۱. گروه G را آبلی(تعویض پذیر)می نامیم، هرگاه به ازای هر $a, b \in G$، $a \centerdot b = b \centerdot a$.

گروهی را که آبلی نباشد، یک گروه غیر آبلی می نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. تعداد اعضای گروه G را مرتبه گروه G می نامیم،که با نماد $O(G)$ نمایش می دهیم. البته تعداد این اعضا مخصوصاً زمانی جالب خواهد بود که متناهی باشد که در این حالت G را یک گروه متناهی می نامیم.

مثال ۶.۱.۱.

i) *مجموعه $G = \{-۱, ۰, +۱\}$ با عمل دوتایی ضرب اعداد حقیقی گروهی آبلی با مرتبه ۲ است.*

ii) *$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ با عمل دوتایی جمع معمولی، گروه هایی آبلی و نامتناهی اند و نیز هر سه با عمل ضرب معمولی، نیم گروه اند.*

۲.۱.۱ حلقه

تعریف ۷.۱.۱. مجموعه ناتهی R را یک حلقه شرکت پذیر می نامیم، هرگاه در R دو عمل دوتایی که با نمادهای $+$، $\centerdot$ نشان می دهیم، موجود باشند به طوری که به ازای هر $c, b, a \in R$ داشته باشیم:

i) $a + b \in R$؛

ii) $a + b = b + a$؛

iii) $(a + b) + c = a + (b + c)$؛

iv) در R عضوی مانند ۰ موجود باشد به طوری که به ازای هر $a \in R$، $a + ۰ = a$؛

v) به ازای هر $a \in R$، عضوی از R مانند $-a$ موجود باشد، به طوری که $a + (-a) = ۰$؛

vi) $a \cdot b \in R$؛

vii) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$؛

ix) $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a, \qquad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (قانون های توزیع).

روابط i تا v بیان می کنند که R تحت عمل + که آن را جمع می نامیم، گروهی آبلی است. روابط vi و vii بیان می کنند که R تحت عمل $\cdot$ که آن را ضرب می نامیم، بسته است. رابطه ix نیز نوع ارتباط دو عمل R را بیان می کند.

زمانی که در مورد حلقه ها بحث می کنیم، باید بدانیم که منظور حلقه شرکت پذیر است، چراکه حلقه های شرکت ناپذیر(حلقه هایی که خاصیت vii ممکن است برای آنها همواره برقرار نباشد) نیز در ریاضیات موجودند و مورد مطالعه قرار می گیرند.

تعریف ۱.۱.۸. حلقه R را یکدار می نامیم، هرگاه یک عضو $1 \in R$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $a \in R$، $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

تعریف ۱.۱.۹. حلقه R را حلقه تعویض پذیرمی نامیم، هرگاه به ازای هر $a, b \in R$، $a \cdot b = b \cdot a$.

مثال ۱.۱.۱۰.

i) مجموعه اعداد صحیح، $\mathbb{Z}$ را در نظر می گیریم. + را عمل جمع معمولی اعداد صحیح و $\cdot$ را عمل ضرب معمولی اعداد صحیح تعریف می کنیم. $\mathbb{Z}$ با این دو عمل، حلقه‌ای یکدار و تعویض پذیر است.

ii) مجموعه اعداد گویا، $\mathbb{Q}$ را در نظر می گیریم. +را عمل جمع معمولی اعداد گویا و $\cdot$ را عمل ضرب معمولی اعداد گویا تعریف می کنیم. $\mathbb{Q}$ با این دو عمل، حلقه‌ای تعویض پذیر و یکدار است.

تعریف ۱.۱.۱۱. فرض کنیم R حلقه‌ای تعویض پذیر باشد. عضو مخالف صفر $a \in R$ را یک مقسوم علیه صفر می نامیم، هرگاه عضو مخالف صفر دیگری از R مانند b موجود باشد به طوری که $a \cdot b = 0$.

تعریف ۱۲.۱.۱. یک حلقه تعویض پذیر را دامنه صحیح(قلمروی صحیح) می نامیم، هرگاه فاقد مقسوم علیه صفر باشد.

مثال ۱۳.۱.۱. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *قلمروهایی صحیح اند.*

تعریف ۱۴.۱.۱. حلقه‌ای را که تمامی اعضای غیر صفر آن تحت عمل ضرب تشکیل گروه دهند، حلقه تقسیم می نامیم.

تعریف ۱۵.۱.۱. یک حلقه تقسیم تعویض پذیر را میدان می نامیم.

بدیهی است که میدان $\mathbb{F}$ را تعویض پذیر می نامیم، هرگاه حلقه $\mathbb{F}$ تعویض پذیر باشد.

مثال ۱۶.۱.۱. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$، *با اعمال جمع و ضرب معمولی میدان اند.*

۳.۱.۱ فضای برداری

تعریف ۱۷.۱.۱. مجموعه ناتهی V را یک فضای برداری(فضای خطی) روی میدان $\mathbb{F}$ می‌نامیم، هرگاه V با عمل $+$ گروه آبلی باشد و به ازای هر $a \in V$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ عضوی از V نمایش داده شده به صورت αa نظیر شود به طوری که به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ و $v, w \in V$ داشته باشیم:

i) $\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$؛

ii) $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$؛

iii) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$؛

iv) $1v = v$ (که در آن ۱ نشان دهنده عضو همانی $\mathbb{F}$ تحت عمل ضرب می‌باشد).

اگر $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ و $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ، آن گاه V را به ترتیب فضای برداری مختلط(فضای خطی مختلط) و فضای برداری حقیقی (فضای خطی حقیقی)می نامیم. هر عضو V را بردار و هر عضو $\mathbb{F}$ را اسکالر می‌نامیم.

مثال ۱۸.۱.۱. *فرض کنیم $\mathbb{F}$ یک میدان و $V = \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) : \alpha_i \in \mathbb{F}(i = 1, 2, ..., n)\}$. دو عضو $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ و $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ از V با هم برابرند، هرگاه به ازای هر $i = 1, 2, ..., n$ داشته باشیم، $\alpha_i = \beta_i$. تعریف می کنیم:*

i) $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$؛

ii) $(\gamma \in \mathbb{F})$ $\gamma((\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = (\gamma\alpha_1, ..., \gamma\alpha_n)$.

V تحت اعمال تعریف شده در بالا روی میدان $\mathbb{F}$ فضایی برداری است که آن را با نماد $\mathbb{F}^n$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و $W \subset V$؛ W را یک زیرفضای برداری V می نامیم، هرگاه W تحت اعمال V روی $\mathbb{F}$ یک فضای برداری باشد. به طور معادل W را زیرفضای برداری V می نامیم، هرگاه به ازای هر $w_1, w_2 \in W$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$، $\alpha w_1 + \beta w_2 \in W$.

مثال ۲۰.۱.۱. *اگر V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، آن گاه V و $\{0\}$ زیرفضاهای برداری V اند.*

۴.۱.۱ جبر

در این بخش از نماد $\mathbb{F}$ برای نشان دادن میدان حقیقی $\mathbb{R}$ یا میدان مختلط $\mathbb{C}$ استفاده می کنیم.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنیم A یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. A را به همراه نگاشت $A \times A \longrightarrow A$ با ضابطه $(x, y) \longrightarrow xy$ که به ازای هر $x, y, z \in A,\ \alpha \in \mathbb{F}$ در خواص زیر صدق

می کند،

i) $x(yz) = (xy)z$؛

ii) $(x + y)z = xz + yz \quad , x(y + z) = xy + xz$؛

iii) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$؛

یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ می نامیم.

میدان $\mathbb{F}$ را میدان اسکالر جبر A می نامیم. اگر $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ و $\mathbb{F} = \mathbb{C}$، آن گاه A را به ترتیب جبر حقیقی و جبر مختلط می نامیم.

تذکر ۲۲.۱.۱. *در A، نگاشت $xy \longrightarrow (x,y)$ را ضرب و بردار xy را ضرب x و y می نامیم.*

تذکر ۲۳.۱.۱. *خاصیت i بیان می کند که مجموعه A همراه عمل ضربش، یک نیم گروه است.*

تذکر ۲۴.۱.۱. *خاصیت iii با $(x, y \in A,\ \alpha, \beta \in \mathbb{F}) \qquad (\alpha\beta)(xy) = (\alpha x)(\beta y)$ معادل است.*

تعریف ۲۵.۱.۱. زیرمجموعه‌ای از جبر A مانند S را که در خاصیت $x, y \in S \Longrightarrow xy \in S$ صدق کند، یک زیرشبه گروه از A می نامیم.

تعریف ۲۶.۱.۱. یک زیرفضای برداری از جبر A را که زیرشبه گروهی از آن نیز باشد، یک زیر جبر از A می نامیم.

بدیهی است که اگر B یک زیر جبر از جبر A باشد، آن گاه B با همان میدان اسکالر A خود یک جبر است.در این حالت ضرب تعریف شده در B عبارت است از تحدید ضرب تعریف شده در A بر مجموعه $B \times B$.

تعریف ۲۷.۱.۱. عضو e از جبر A را عضو یکه(همانی) می نامیم، هرگاه $e \neq 0$ و به ازای هر $x \in A$، $ex = xe = x$.

تعریف ۲۸.۱.۱. جبری را که دارای عضو یکه باشد، جبر یکدار می نامیم.

یک جبر حداکثر یک عضو یکه دارد؛ یعنی اگر e و e' هر دو یکه های یک جبر باشند، آن گاه $e' = ee' = e$.

عضو یکه منحصر به فرد یک جبر یکدار با ۱ نمایش می دهیم.

تعریف ۲۹.۱.۱. جبر A را یک جبر جابجایی می نامیم، هرگاه به ازای هر $x, y \in A$، $xy = yx$.

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض کنیم A و M به ترتیب جبر و فضایی برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. M را به همراه نگاشت $A \times M \longrightarrow M$ با ضابطه $(a, m) \longrightarrow am$ که در روابط زیر صدق می کند،

i) به ازای هر عضو ثابت $a \in A$، نگاشت $m \longrightarrow am$ روی M خطی باشد؛

ii) به ازای هر عضو ثابت $m \in M$، نگاشت $a \longrightarrow am$ روی A خطی باشد؛

iii) به ازای هر $a_1, a_2 \in A$ و $m \in M$، $(a_1 a_2)m = a_1(a_2 m)$؛

یک A -مدول چپ می نامیم.

نگاشت $(a, m) \longrightarrow am$ را ضرب مدولی می نامیم. به طور مشابه M را یک A -مدول راست می نامیم، هرگاه یک نگاشت $A \times M \longrightarrow M$ با ضابطه $(a, m) \longrightarrow ma$ موجود باشد به طوری که در روابط i و ii صدق کند و نیز به ازای هر $a_1, a_2 \in A$ و $m \in M$، $(ma_1)a_2 = m(a_1 a_2)$.

تعریف ۳۱.۱.۱. M را یک A -دو مدول می نامیم، هرگاه M، A -مدول راست و A -مدول چپ باشد و به ازای هر $a, b \in A$ و $m \in M$ ضرب های مدولی زیر را داشته باشیم:

$$a(mb) = (am)b.$$

۲.۱ مقدماتی از جبر و جبر خطی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم G و H دو گروه باشند. نگاشت $\varphi : G \longrightarrow H$ را همریختی(همریختی گروهی) می نامیم، هرگاه به ازای هر $x, y \in G$ داشته باشیم:

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم V و W دو فضای برداری باشند. نگاشت $f : V \longrightarrow W$ را نگاشت جمعی

می نامیم، هرگاه به ازای هر $x, y \in V$ داشته باشیم:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم V و W دو فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. تابع $T : V \longrightarrow W$ را تبدیل خطی(نگاشت خطی) می نامیم، هرگاه به ازای هر $x, y \in V$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ داشته باشیم:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty.$$

وقتی T خطی است، اغلب به جای $T(x)$ از نماد Tx استفاده می کنیم.

تبدیل خطی در واقع همان همریختی فضاهای برداری روی یک میدان است.

اگر $\mathbb{F}$ را میدان های $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، $\mathbb{T}^1 := \{\lambda \in \mathbb{C} :| \lambda |= 1\}$ و $\mathbb{C}$ در نظر بگیریم، آن گاه T را به ترتیب نگاشت $\mathbb{Q}$ -خطی، نگاشت $\mathbb{R}$ -خطی، نگاشت $\mathbb{T}^1$ -خطی و نگاشت $\mathbb{C}$ -خطی می نامیم.

لم ۴.۲.۱. *فرض کنیم V و W دو فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشند. اگر $f : V \longrightarrow W$ نگاشتی جمعی باشد، آن نگاشتی $\mathbb{Q}$ -خطی نیز هست.*

برهان. به مرجع [۱۹] مراجعه کنید. $\square$

لم ۵.۲.۱. *فرض کنیم V و W دو فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشند. $f : V \longrightarrow W$ نگاشتی $\mathbb{T}^1$ -خطی است اگر و تنها اگر نگاشتی $\mathbb{C}$ -خطی باشد.*

برهان. به مرجع [۵۰] مراجعه کنید. $\square$

فرض کنیم $T, U : V \longrightarrow W$ تبدیلاتی خطی باشند و $\alpha \in \mathbb{F}$. به ازای هر $x \in V$ تعریف می کنیم:

$$(T+U)(x) = Tx + Ux$$

$$(\alpha T)(x) = \alpha(Tx).$$

مجموعه تمامی تبدیلات خطی از V به W با اعمال تعریف شده در بالا یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ است،که با نماد $L(V,W)$ نمایش می دهیم(یادآوری می کنیم که $L(V,W)$ تنها زمانی تعریف می‌شود که V و W فضاهایی برداری روی میدانی واحد باشند).

مثال ۶.۲.۱. *فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد .به ازای هر $x \in V$ و $T,U \in L(V,V)$ عمل ضرب روبه رو را تعریف می کنیم: $(TU)(x) = T(Ux)$.*
با عمل ضرب بالا $L(V,V)$ یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ است. این جبر را با نماد $L(V)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد.

i) یک تبدیل خطی از V به V را یک عملگرخطی روی V می نامیم.

ii) یک تبدیل خطی از V به $\mathbb{F}$ را یک تابعک خطی (تابعی خطی) روی V می نامیم.

iii) مجموعه تمامی تابعک های خطی روی V را فضای دوگان V می نامیم و با نماد V^* نمایش می‌دهیم؛ در واقع $V^* = L(V,F)$.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم V,W فضاهایی برداری باشند. نگاشت $f : V \times V \longrightarrow W$ را نگاشت دو جمعی می نامیم، هرگاه به ازای هر $x,x_1,x_2,y,y_1,y_2 \in V$ داشته باشیم:

i) $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$؛

ii) $f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم V,W فضاهایی برداری روی $\mathbb{F}$ باشند. نگاشت $f : V \times V \longrightarrow W$ را نگاشت دو خطی می نامیم، هرگاه

i) f دو جمعی باشد؛

ii) به ازای هر $x,y \in V$ و $\alpha,\beta \in \mathbb{F}$، $f(\alpha x + \beta y) = \alpha\beta f(x,y)$.