بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

جبرهای پیچشی وزن‌دار روی نیم‌خط حقیقی

نگارش:

خزیجا علی‌پور جلبری

استاد راهنما:

دکتر سعید مقصودی

استاد مشاور:

دکتر حبیب امیری

آذر ۱۳۹۰

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از خانواده عزیزم که با لطف بی‌پایان و حمایت‌های بی‌شائبه‌شان مرا یاری نمودند سپاسگزاری کنم.

همچنین لازم می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای ارجمند خود، جناب آقای دکتر سعید مقصودی، که قطعاً بدون کمک‌ها و راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید صمیمانه تشکر و قدردانی کنم.

از استاد گرامی جناب آقای دکتر حبیب امیری که زحمت مشاوره و مطالعهٔ این اثر را برعهده داشتند کمال امتنان را دارم. از اساتید گرامی جناب آقای دکتر حجت‌اله سامع و جناب آقای دکتر هادی خطیب‌زاده که زحمت بازخوانی و داوری این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود آن شدند، تشکر می‌کنم.

در پایان از تمامی دوستان عزیزم که به‌نحوی اینجانب را در آماده‌سازی این پایان‌نامه یاری کردند صمیمانه سپاسگزارم.

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی توابع وزن روی نیم‌خط حقیقی می‌پردازیم و شرایط مختلفی را که تحت آنها فضاهای لبگ وزن‌دار توابع $L^1(\mathbb{R}^+,\omega)$ و اندازه‌ها $M(\mathbb{R}^+,\omega)$، با عمل پیچش جبر باناخ می‌شوند بررسی می‌کنیم. همچنین شرایط لازم و کافی را برای آنکه جبر $L^1(\omega)$ دارای همانی تقریبی باشد ارائه می‌دهیم. در پایان مطالعهٔ مشابهی برای فضای لبگ وزن‌دار $L^p(\mathbb{R}^+,\omega)$ برای $p > 1$ انجام می‌دهیم.

رده‌بندی موضوعی: ۴۳A۱۰، ۴۳A۱۵، ۴۳A۲۰.

واژه‌های کلیدی: *تابع وزن، پایایی چپ و راست، جبر باناخ، ضرب پیچشی، وزن‌های معادل، همانی تقریبی.*

فهرست مطالب

پیشگفتار

اولین بار در سال ۱۹۳۸ آرنه بئورلینگ، ریاضی‌دان سوئدی، جبر وزن‌دار توابع روی $\mathbb{R}$ را به‌منظور تعمیم قضایای وینر معرفی کرد. این جبرها را ای.گلفاند، ریاضی‌دان روسی، در سال ۱۹۳۹ به‌طور مستقل بررسی کرده است. گلفاند ساختار ایده‌آلی این جبرها را به‌عنوان نمونه‌های خاص از نظریهٔ کلی جبرهای باناخ مطالعه کرد. در سال ۱۹۶۴ گلفاند، رایکف و شیلف در کتاب مشهورشان «حلقه‌های نرم‌دار تعویض‌پذیر» [1] به‌منظور بررسی عملگرهای نیم‌گروهی این جبرها را به‌عنوان مثال‌هایی از جبرهای باناخ معرفی کردند. هیل و فیلیپس اولین مطالعهٔ منسجم جبرهای وزن‌دار اندازه‌ها را در سال ۱۹۵۷ انجام دادند. در سال ۱۹۸۹ گرونبك به تعمیم حالت کلی این جبرها از $\mathbb{R}^+$ به ${\mathbb{R}^+}^n$ پرداخت. در سال ۱۹۷۰ گراهام آلن مطالعهٔ منظم ساختار ایده‌آلی جبرهای پیچشی وزن‌دار را آغاز کرد. در ابتدا نتایج فقط برای وزن‌های پیوسته ارائه شد، اما پس از مدتی نشان داده شد بسیاری از وزن‌های مهم لزوماً پیوسته نیستند. در سال‌های اخیر این جبرها هم از لحاظ ساختار ایده‌آلی و هم از لحاظ آنکه به‌واسطهٔ وجود وزن مثال‌های متنوعی با رفتار متفاوت در اختیار می‌گذارند، مورد توجه قرار گرفته‌اند.

در این پایان‌نامه به بررسی جبرهای پیچشی وزن‌دار توابع و اندازه‌ها روی نیم‌خط حقیقی می‌پردازیم. در فصل اول مقدمات موردنیاز را یادآوری می‌کنیم. در فصل دوم به معرفی وزن و انواع آن می‌پردازیم. همچنین وزن‌های زیرضربی را، به‌عنوان یکی از پرکاربردترین وزن‌ها، بررسی می‌کنیم. در فصل سوم دو نمونه از جبرهای پیچشی بدون وزن یعنی فضای اندازه‌های رادون و فضای توابع موضعاً انتگرال‌پذیر را بررسی می‌کنیم. مطالب این فصل نقشی اساسی در درك مفاهیم مربوط به جبرهای پیچشی وزن‌دار دارد. در فصل چهارم شرایط مختلفی را که تحت آنها فضای لبگ وزن‌دار $L^1(\omega)$ با عمل پیچش توابع جبر می‌شود، بررسی می‌کنیم. همچنین به بررسی انتقال‌های راست این فضا می‌پردازیم. در فصل پنجم وزن‌هایی را که به‌ازای آنها جبر $L^1(\omega)$ دارای همانی تقریبی است بررسی می‌کنیم. در فصل ششم شرایطی را که تحت آنها فضای $M(\omega)$ با عمل پیچش اندازه‌ها جبر می‌شود بررسی می‌کنیم. همچنین، در شرایطی خاص، با یکی کردن این فضا با فضای دوگان $C_0(\omega)$ به بیان قضایایی در رابطه با همگرایی ضعیف* در این فضا می‌پردازیم. در فصل آخر با معرفی فضاهای توابع انتقال‌یافتهٔ چپ به بررسی ساختار فضای لبگ وزن‌دار

[1] I. Gelfand, D. Raikov, G. Shilov, Commutative normed rings, Chelsea Publishing Company, 1964.

$L^p(\omega)$ تحت عمل پیچش می‌پردازیم و شرایطی را که این فضا تحت عمل پیچش جبر می‌شود ارائه می‌دهیم.

در این پایان‌نامه سعی شده است تمامی نتایجی را که به بسته بودن فضاهای وزن‌دار توابع و اندازه‌ها روی نیم‌خط حقیقی مربوط می‌شود گردآوری و به‌صورتی منظم عرضه کنیم. منابع مورد استفاده را در انتهای پایان‌نامه آورده‌ایم اما نتایج اساسی عمدتاً متعلق به س.گرابینر است که در [۱۴]، [۱۵] و [۱۸] آمده‌اند.

فصل ۱

مقدمات

در این فصل تعاریف، مفاهیم وقضیه‌های مورد نیاز برای فصل‌های بعد را می‌آوریم.

توپولوژی

تعریف ۱.۱. (یك) مجموعهٔ D را جهت‌دار می‌نامیم هرگاه رابطه‌ای مانند $>$ روی D موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $\alpha, \beta, \gamma \in D$ داشته باشیم

(الف) اگر $\alpha > \beta$ و $\beta > \gamma$، آن‌گاه $\alpha > \gamma$.

(ب) برای هر $\alpha, \beta \in D$، $\gamma \in D$ موجود باشد به‌طوری‌که $\gamma > \alpha$ و $\gamma > \beta$.

(دو) منظور از یك تور در مجموعهٔ X، تابعی است مانند $f : D \longrightarrow X$ که در آن D مجموعهٔ جهت‌دار است. معمولاً با فرض $x_\alpha = f(\alpha)$ برای هر $\alpha \in D$، تور $f : D \longrightarrow X$ را با $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ یا به‌طور ساده با (x_α) نمایش می‌دهیم.

(سه) یك زیرتور از تور $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$، توری چون $(y_\beta)_{\beta \in D'}$ است به‌طوری‌که نگاشت $\beta \mapsto \alpha_\beta$ از D' به D با خواص زیر موجود باشد.

(الف) برای هر $\alpha_\circ \in D$، $\beta_\circ \in D'$ موجود است به‌طوری‌که هرگاه $\beta > \beta_\circ$ آن‌گاه $\alpha_\beta > \alpha_\circ$.

(ب) برای هر $\beta \in D'$ داریم $y_\beta = x_{\alpha_\beta}$.

(چهار) فرض کنیم X یك فضای توپولوژیك باشد. گوییم تور $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ در X به $x_\circ$ همگراست هرگاه برای هر همسایگی U از $x_\circ$ در X، عنصر $\alpha_\circ \in D$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $\alpha > \alpha_\circ$، $x_\alpha \in U$؛ می‌نویسیم $x_\alpha \to x_\circ$ یا $\lim_\alpha x_\alpha = x_\circ$. می‌توان ثابت کرد که $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ به $x_\circ$ همگراست اگر و تنها اگر هر زیرتور $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ به $x_\circ$ همگرا باشد.

قضیه ۲.۱. *فرض کنیم X یك فضای توپولوژیك باشد و $\overline{A}$ بستار زیرمجموعهٔ A در X را نمایش دهد. در این‌صورت*

(الف) $x \in \overline{A}$ اگر و تنها اگر تور x_α موجود باشد به‌طوری‌که $x_\alpha \longrightarrow x$.

(ب) A فشرده است اگر و تنها اگر هر تور در A، دارای یك زیرتور همگرا در A باشد.

برهان. به بخش ۱۰.۳ از [۲۲] رجوع کنید. □

قضیه ۳.۱. *فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیك و $f : X \longrightarrow Y$ یك تابع باشد. در این‌صورت f پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر تور x_αی همگرا به x داشته باشیم $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$.*

برهان. به بخش ۱۰.۳ از [۲۲] مراجعه کنید. □

قضیه ۴.۱. *فرض کنید X فضای توپولوژیك فشرده باشد. هرگاه (x_α) توری در X باشد به‌طوری‌که هر زیرتور همگرا در آن به نقطهٔ ثابت $x_\circ$ همگرا باشد، در این صورت تور (x_α) به $x_\circ$ همگراست.*

برهان. فرض کنیم هر زیرتور همگرا از (x_α) همگرا به $x_\circ$ باشد. اگر (x_α) به $x_\circ$ همگرا نباشد در این صورت همسایگی $U_\circ$ از $x_\circ$ موجود است به‌طوری‌که برای هر α، φ_αیی موجود است به‌طوری‌که $\varphi_\alpha > \alpha$ و $x_{\varphi_\alpha} \notin U_\circ$. اکنون به‌وضوح مجموعهٔ تمام اعضای φ_α یك مجموعهٔ جهت‌دار است و $\{x_{\varphi_\alpha} : x \in I\}$ یك زیرتور از (x_α) است. از آنجا که X فشرده است پس (x_{φ_α}) باید زیرتور همگرا و طبق فرض همگرا به $x_\circ$ داشته باشد، که این باتوجه به نوع انتخاب x_{φ_α}ها غیرممکن است. □

آنالیز تابعی

تعریف ۵.۱. فرض کنید S یك فضای برداری روی میدان اعداد مختلط باشد و $E \subseteq S$.

(الف) E محدب است هرگاه برای هر $t \in [\circ, ۱]$ داشته باشیم $tE + (۱ - t)E \subseteq E$.

(ب) E متعادل است هرگاه برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ که $|\alpha| \leq ۱$ داشته باشیم $\alpha E \subseteq E$.

(ج) E مطلقاً محدب است هرگاه محدب و متعادل باشد.

تعریف ۶.۱. فرض کنیم X یك فضای برداری روی میدان F($\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) باشد، اگر τ یك توپولوژی روی X باشد که دارای دو خاصیت زیر است، آن را فضای برداری توپولوژیك گوییم.

(۱) هر مجموعهٔ تك‌عنصری بسته باشد.

(۲) اعمال جمع برداری و ضرب در اسکالر، پیوسته باشند.

تعریف ۷.۱. فرض کنیم X یك فضای برداری توپولوژیك با توپولوژی τ باشد.

(الف) X را فضای موضعاً محدب می‌نامیم، هرگاه هر نقطهٔ آن دارای پایهٔ موضعی با اعضای محدب باشد.

(ب) X را فضای فرشه می‌نامیم، هر گاه موضعاً محدب باشد و توپولوژی τ توسط یك متریك کامل انتقال پایا به‌وجود آمده باشد. متر d را روی X انتقال پایا گوییم هرگاه

$$d(x+z, y+z) = d(x,y) \ \ (x,y,z \in X).$$

قرارداد. در سراسر این پایان‌نامه قرار می‌دهیم $\mathbb{R}^+ = [۰, \infty)$.

تعریف ۸.۱. فرض کنیم X یك فضای برداری باشد.

(الف) یك شبه‌نرم روی X، تابعی چون $p : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ است به‌طوری‌که خواص زیر را دارا باشد.

(۱)برای هر $x, y \in X$، $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

(۲) برای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

(ب) هرگاه p یك شبه‌نرم روی X باشد و به‌علاوه، برای هر $x \neq ۰$ داشته‌باشیم $p(x) > ۰$ ، در این صورت p را یك نرم روی X و Xرا فضای برداری نرم‌دار می‌نامیم.

تعریف ۹.۱. نرم‌های $\|.\|_۱$ و $\|.\|_۲$ روی فضای برداری X را معادل گوییم هرگاه ثابت‌های $K > ۰$ و $M > ۰$ موجود باشند، به‌طوری‌که برای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$K\|x\|_۱ \leq \|x\|_۲ \leq M\|x\|_۱.$$

قضیه ۱۰.۱. *فرض کنید P خانواده‌ای از شبه‌نرم‌های جداکننده روی فضای برداری X باشد (به این مفهوم که برای هر $x \neq ۰$ در X، $p \in P$ موجود باشد به‌طوری‌که $p(x) \neq ۰$). به‌هر $p \in P$ و عدد صحیح مثبت دلخواه n مجموعهٔ*

$$V(p,n) = \{x \in X : \ p(x) < \frac{۱}{n}\}$$

را نسبت می‌دهیم. فرض کنید B دستهٔ تمام مقاطع متناهی از مجموعه‌های $V(p,n)$ باشد. در این صورت B یك پایهٔ موضعی از مجموعه‌های مطلقاً محدب برای یك توپولوژی τ روی X است که X را به یك فضای موضعاً محدب تبدیل می‌کند.

برهان. به قضیهٔ ۳۷.۱ از [۲۸] مراجعه کنید. □

قضیه ۱.۱۱. (هان - باناخ) *فرض کنید M زیرفضایی از فضای برداری نرم‌دار X و f تابعك خطی کران‌داری بر M باشد. در این صورت f را می‌توان به تابعك خطی کران‌داری مانند F بر X طوری توسیع داد که $\|F\| = \|f\|$.*

برهان. به قضیهٔ ۱۶.۵ از [۲۷] مراجعه کنید. □

تعریف ۱.۱۲. فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. مجموعهٔ تمام عملگرهای خطی کران‌دار از X به Y را با $\mathscr{B}(X,Y)$ نمایش می‌دهیم و برای هر $T \in \mathscr{B}(X,Y)$، نرم T را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|T\| = \sup\Big\{\|T(x)\| : x \in B_X\Big\},$$

که در این‌جا B_X گوی یکه فضای نرم‌دار X است. فضای $\mathscr{B}(X,\mathbb{C})$ را با X^* نشان می‌دهیم و آن را فضای دوگان X می‌نامیم. به‌وضوح X^* یك فضای باناخ است.

تعریف ۱.۱۳. فرض کنید X یك فضای باناخ باشد. نگاشت $J : X \to X^{**}$ را با ضابطه $x \mapsto \hat{x}$ تعریف می‌کنیم که در آن

$$\langle \hat{x}, f\rangle = \langle f, x\rangle \qquad (f \in X^*).$$

در اینجا $\langle f, x\rangle$ مقدار f در x را نشان می‌دهد، توجه کنید که J خطی و طولپاست، لذا یك‌به‌یك نیز هست. در حالتی که J پوشا باشد، X را انعکاسی می‌نامیم. در ضمن $\hat{x}$ را به‌طور ساده با x نمایش می‌دهیم. منظور از توپولوژی ضعیف* روی X^*، کوچك‌ترین توپولوژی روی X^* است که خانوادهٔ $J(X)$ را پیوسته می‌سازد. این توپولوژی را با $\sigma(X^*, X)$ نمایش می‌دهیم. همگرایی تور (f_α) به f در این توپولوژی را با نماد $f = w^* - \lim_\alpha f_\alpha$ نمایش می‌دهیم که معادل است با این‌که $\langle f_\alpha, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ برای هر $x \in X$.

قضیه ۱.۱۴. (باناخ - آلااوگلو). *فرض کنیم X یك فضای نرم‌دار باشد، در این‌صورت گوی یکهٔ بستهٔ B_{X^*} از X^* فشردهٔ ضعیف* است.*

برهان. به قضیه ۱۵.۳ از [۲۸] رجوع کنید. □

نتیجه ۱.۱۵. *اگر X یك فضای باناخ باشد و $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ یك تور کران‌دار در X^* باشد، آن‌گاه $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ یك زیرتور ضعیف* همگرا دارد.*

تعریف ۱۶.۱. فرض کنید X، Y و Z فضای برداری باشند، نگاشت $B : X \times Y \longrightarrow Z$ را در نظر بگیرید. به هر $x \in X$ و هر $y \in Y$ نگاشت‌های $B_x : Y \longrightarrow Z$ و $B^y : X \longrightarrow Z$ را به‌صورت زیر نسبت می‌دهیم

$$B_x(y) = B(x, y),\ B^y(x) = B(x, y)$$

(یك) B را دوخطی گوییم هرگاه برای هر $x \in X$ و $y \in Y$، B_xو B^y خطی باشند.

(دو) B را جداگانه پیوسته گوییم هرگاه برای هر $x \in X$ و $y \in Y$، B_x و B^y پیوسته باشند.

قضیه ۱۷.۱. (گراف بسته). *فرض کنیم X و Y فضای باناخ باشند و $T : X \longrightarrow Y$ یك عملگر خطی باشد. T عملگر خطی کران‌دار است اگر و تنها اگر نمودار $\{(x, T(x)) : x \in X\}$ در $X \times Y$ بسته باشد.*

برهان. به قضیهٔ ۲۶.۲ از [۹] رجوع کنید. □

قضیه ۱۸.۱. *فرض کنید V یك زیرفضای چگال از فضای باناخ X باشد و (S_n) دنباله‌ای از عملگرهای خطی نرم کران‌دار از X به فضای باناخ Y باشد. در این صورت*

(الف) اگر T عملگر خطی کران‌دار از X به Y باشد و برای هر $x \in V$ داشته باشیم $S_n(x) \longrightarrow T(x)$ آن‌گاه برای هر $x \in X$ داریم $S_n(x) \longrightarrow T(x)$.

(ب) اگر $S_n(x)$ برای هر $x \in V$ همگرا باشد، آن‌گاه برای هر $x \in X$ نیز همگراست، و حد آن یك عملگر خطی کران‌دار است.

برهان. (الف) از آنجا که V زیر مجموعهٔ چگال از X است، لذا برای هر $x \in X$ دنبالهٔ (v_m) در V و عدد طبیعی m_0 موجود است به‌طوری‌که برای هر $m \geq m_0$ داریم $\|x - v_m\| < \varepsilon$. از طرفی بنابر فرض $S_n(v_m) \longrightarrow T(v_m)$، لذا عدد طبیعی n_0 موجود است به‌طوری‌که برای هر $n \geq n_0$ داریم $\|S_n(v_m) - T(v_m)\| < \varepsilon$. اگر قرار دهیم $n_1 = \max\{n_0, m_0\}$ از آنجا که S_n و T کران‌دارند، برای هر $n \geq n_1$ داریم

$$\begin{aligned}\|S_n(x) - T(x)\| &= \|S_n(x) - S_n(v_m) + S_n(v_m) - T(v_m) + T(v_m) - T(x)\| \\ &\leq \|S_n\|\|x - v_m\| + \|S_n(v_m) - T(v_m)\| + \|T\|\|v_m - x\| \\ &\leq \|S_n\|\frac{\varepsilon}{3\|S_n\|} + \frac{\varepsilon}{3} + \|T\|\frac{\varepsilon}{3\|T\|} = \varepsilon.\end{aligned}$$

به این ترتیب قسمت (الف) ثابت می‌شود.

(ب) فرض کنیم برای هر $v\in V$ داشته باشیم $S_n(v)\longrightarrow T(v)$، ابتدا ثابت می‌کنیم T کران‌دار است. برای هر $\varepsilon>0$ ، عدد طبیعی n_0 موجود است، به‌طوری‌که برای هر $n\geq n_0$ داریم $\|T(v)-S_n(v)\|<\varepsilon$ ، همچنین $M>0$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $v\in V$ داریم $\|S_{n_0}(v)\|\leq M\|v\|$. در نتیجه برای هر $v\in V$ داریم

$$\|T(v)\|\leq\|T(v)-S_{n_0}(v)\|+\|S_{n_0}(v)\|\leq\varepsilon+M\|v\|.$$

حال از آنجا که ε دلخواه است، بنابراین $\|T\|\leq M$، پس T عملگری کران‌دار است. حال بنابر قسمت (الف)، برهان تمام می‌شود. □

قضیه ۱۹.۱. (*کران‌داری یکنواخت*) *فرض کنید X و Y فضای باناخ باشند و $A\subseteq\mathscr{B}(X,Y)$ ، اگر A به‌طور نقطه‌ای کران‌دار باشد آن‌گاه A در $\mathscr{B}(X,Y)$ کران‌دار است.*

برهان. به قضیهٔ ۵۸.۳ از [۸] رجوع کنید. □

قضیه ۲۰.۱. *فرض کنید X ، Y و Z فضاهای باناخ باشند و نگاشت $T:X\times Y\longrightarrow Z$ نگاشت دوخطی جداگانه پیوسته باشد، در این‌صورت $N>0$ موجود است به‌طوری‌که*

$$\|T(x,y)\|\leq N\|x\|\|y\|\quad(x\in X,y\in Y).$$

برهان. عضو $y_0\in Y$ را ثابت در نظر می‌گیریم و برای هر $x\in X$ با شرط $\|x\|\leq 1$ تعریف می‌کنیم $T_x(y_0)=T(x,y_0)$. بنابر فرض، نگاشت T جداگانه پیوسته است، پس T_x پیوسته است. بنابراین $M>0$ موجود است به طوری که برای هر $x\in X$ با شرط $\|x\|\leq 1$ داریم $\|T(x,y_0)\|\leq M\|x\|\leq M$. در نتیجه T_x به‌طور نقطه‌ای کران‌دار است و لذا بنابر قضیهٔ کران‌داری یکنواخت $K>0$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $x\in X$ با شرط $\|x\|\leq 1$ داریم $\|T_x\|\leq K$. چون y_0 دلخواه بود لذا برای هر $x\in X$ با شرط $\|x\|\leq 1$ و برای هر $y\in Y$ داریم $\|T_x(y)\|\leq N\|y\|$. یا به‌طور معادل برای هر $x\in X$ و $y\in Y$، $\|T(x,y)\|\leq N\|y\|$. حال اگر $x\in X$ نیز دلخواه باشد، از آنجا که $\|\frac{x}{\|x\|}\|=1$ لذا بنابر رابطه بالا به‌دست می‌آوریم

$$\|T(x,y)\|\leq N\|x\|\|y\|.$$

□

آنالیز حقیقی

تعریف ۲۱.۱. فرض کنیم X یك مجموعه باشد.

(الف) خانوادهٔ $\mathcal{M}$ از زیرمجموعه‌های X را یك σ-جبر در X گوییم هرگاه دارای خواص زیر باشد.

(۱) $X \in \mathcal{M}$.

(۲) اگر $A \in \mathcal{M}$، آن‌گاه $A^c \in \mathcal{M}$، که در آن A^c متمم A نسبت به X است.

(۳) اگر $A_۱, A_۲, \cdots \in \mathcal{M}$، آن‌گاه $\cup_{n=۱}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

(ب) اگر $\mathcal{M}$ یك σ-جبر در X باشد، آن‌گاه $(X, \mathcal{M})$ را یك فضای اندازه‌پذیر و اعضای $\mathcal{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می‌نامیم.

(ج) هرگاه $(X, \mathcal{M})$ یك فضای اندازه باشد، نگاشت $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ را اندازه‌پذیر گوییم، هرگاه برای هر مجموعهٔ باز V در $\mathbb{C}$، $f^{-۱}(V)$ یك مجموعهٔ اندازه‌پذیر در X باشد.

هرگاه E یك مجموعهٔ اندازه‌پذیر در X باشد، تابع با تعریف

$$\chi(x) = \begin{cases} ۱ & x \in E \\ ۰ & x \notin E \end{cases}$$

تابعی اندازه‌پذیر است، تابع χ_E را تابع مشخصهٔ مجموعهٔ E می‌نامیم.

(د) یك اندازهٔ مثبت، تابعی نامنفی مانند μ است که روی σ-جبری مانند $\mathcal{M}$ تعریف شده است به‌طوری‌که $\mu(\emptyset) = ۰$ و μ شمارا جمعی است، یعنی برای هر دنبالهٔ (A_i) از عناصر دوبه‌دو مجزای $\mathcal{M}$ داریم

$$\mu(\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i) = \sum_{i=۱}^{\infty} \mu(A_i).$$

گوییم زیرمجموعهٔ A از X، σ-متناهی است هرگاه $A = \bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i$ که برای هر i، $A_i \in \mathcal{M}$ و $\mu(A_i) < \infty$.

(ه) هرگاه $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یك فضای اندازه باشد، گوییم یك خاصیت وابسته به $x \in X$ تقریباً همه جا روی X برقرار است، هرگاه مجموعه نقاطی که دارای آن خاصیت نیست، دارای اندازهٔ صفر باشد.

تذکر ۲۲.۱. اگر μ اندازه‌ای روی σ-جبر $\mathcal{M}$ باشد، در این صورت

(الف) اگر f و g تقریباً همه جا با هم برابر باشند، آن‌گاه برای هر $E \in \mathcal{M}$ داریم

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu.$$

(ب) اگر برای هر $E \in \mathcal{M}$ داشته‌باشیم

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu,$$

آن‌گاه برای تقریباً هر x، $f(x) \leq g(x)$.

قضیه ۲۳.۱. *فرض‌کنیم μ یك اندازهٔ مثبت روی σ-جبر $\mathcal{M}$ باشد، در این صورت احکام زیر برقرارند.*

(الف) *μ متناهیاً جمعی است، یعنی اگر $A_1, \cdots, A_n$ اعضای دو به دو مجزای $\mathcal{M}$ باشند، آن‌گاه*

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n).$$

(ب) *اگر $A, B \in \mathcal{M}$ آن‌گاه $A \subset B$ ایجاب می‌کند $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

(ج) *هرگاه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ آن‌گاه*

$$\mu(A_n) \longrightarrow \mu(A)$$

(د) *هرگاه $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ و $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ و $\mu(A_1)$ متناهی باشد، آن‌گاه*

$$\mu(A_n) \longrightarrow \mu(A)$$

برهان. به قضیهٔ ۱.۱۹ از [۲۷] مراجعه کنید. □

تعریف ۲۴.۱. فرض کنید X فضای توپولوژیك باشد.

(الف) X را موضعاً فشرده می‌نامیم، هرگاه هر نقطهٔ X دارای همسایگی با بستار فشرده باشد.

(ب) $E \subseteq X$ را σ-فشرده نامیم هرگاه اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های فشرده باشد.

تعریف ۲۵.۱. فرض کنیم X یك فضای موضعاً فشرده باشد. در این‌صورت

(الف) اگر $\mathcal{B}(X)$ کوچك‌ترین σ-جبر شامل تمام زیرمجموعه‌های بستهٔ X باشد، آن‌گاه $\mathcal{B}(X)$ را σ-جبر مجموعه‌های بورل X و اعضای $\mathcal{B}(X)$ را مجموعه‌های بورل گوییم.

(ب) اندازهٔ μ روی X را بورل می‌نامیم اگر روی $\mathcal{B}(X)$ تعریف شده باشد.

(ج) مجموعهٔ بورل E را کران‌دار گوییم هرگاه مجموعهٔ فشردهٔ K موجود باشد به‌طوری‌که $E \subseteq K$.

(د) مجموعهٔ بورل $E \subset X$ را منظم بیرونی گوییم هرگاه

$$\mu(E) = \inf \left\{ \mu(V) : \text{باز } V,\ E \subset V \right\}$$

به‌طور مشابه مجموعهٔ بورل $E \subset X$ را منظم درونی گوییم هرگاه

$$\mu(E) = \sup \left\{ \mu(K) : \text{فشرده } K,\ K \subset E \right\}$$

اگر هر مجموعهٔ بورل در X هم منظم بیرونی و هم منظم درونی باشد، در این صورت μ منظم نامیده می‌شود.

(ه) یك اندازهٔ مختلط روی X، یك تابع مختلط-مقدار μ تعریف شده روی $\mathcal{B}(X)$ است به‌طوری‌که شمارا جمعی باشد. متناظر به هر اندازهٔ μ روی X، تابع $|\mu| : \mathcal{B}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ را تغییر کل μ می‌نامیم

و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$|\mu|(E)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\mu(E_i)|:E\in\mathcal{B}(X)\right\}$$

که در آن سوپریموم روی همهٔ افرازهای متناهی $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ از E متشکل از مجموعه‌های بورل گرفته می‌شود. در این‌صورت $|\mu|$ یك اندازهٔ مثبت متناهی روی X است؛ یعنی $|\mu|(X)<\infty$.

اندازهٔ دیراك (یا اندازهٔ جرم نقطه‌ای) δ_x روی X، برای هر زیرمجموعهٔ بورل E از X به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta_x(E)=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$$

تعریف ۲۶.۱. منظور از یك اندازهٔ بیرونی روی مجموعهٔ ناتهی X تابعی چون $\mu^*:P(X)\longrightarrow[0,\infty[$، است (منظور از $P(X)$ مجموعهٔ توانی X است) که در خواص زیر صدق می‌کند.

(۱) $\mu^*(\emptyset)=0$.

(۲) اگر $A\subset B$ آن‌گاه $\mu^*(A)\le\mu^*(B)$.

(۳) برای هر دنبالهٔ دلخواه (A_n) از زیرمجموعه‌های X داریم $\mu(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$.

قضیه ۲۷.۱. *(کاراتئودوری) اگر μ^* یك اندازهٔ بیرونی روی مجموعهٔ X باشد آن‌گاه گردآیهٔ $\mathcal{M}$ از زیرمجموعه‌های μ^*-اندازه‌پذیر X یك σ-جبر و تحدید μ^* به $\mathcal{M}$ یك اندازه است.*

برهان. به قضیهٔ ۱۱.۱ از [۱۱] مراجعه کنید. □

تعریف ۲۸.۱. مجموعهٔ $I\subseteq\mathbb{R}^n$ را یك حجرهٔ n-بعدی می‌نامیم هرگاه $I=I_1\times\cdots\times I_n$ که در آن برای $i=1,2,\cdots,n$، I_i یك بازه در $\mathbb{R}$ است. طول I را به‌صورت $\ell(I)=\ell(I_1)\cdots\ell(I_n)$ تعریف می‌کنیم؛ که $\ell(I_i)$ طول بازهٔ I_i است. برای $E\subseteq\mathbb{R}^n$ تعریف می‌کنیم

$$m^*(E)=\inf\Big\{\sum_{m=1}^{\infty}\ell(I_m):\ E\subseteq\cup_{m=1}^{\infty}I_m\Big\}$$

که در آن I_mها حجره‌های n-بعدی هستند. اکنون طبق قضیهٔ کاراتئودوری، σ-جبری چون $\mathcal{M}$ و اندازه‌ای چون m موجود است به‌طوری‌که m برابر تحدید m^* به $\mathcal{M}$ است. اندازهٔ m را اندازهٔ لبگ n-بعدی می‌نامیم. اندازهٔ لبگ دارای خواص زیر است.

(۱) اندازهٔ لبگ انتقال پایاست، یعنی برای هر $E\in\mathcal{M}$ و هر $s\in\mathbb{R}^k$ داریم $m(E+s)=m(E)$، که در آن

$$E+s=\big\{x+s:\ x\in E\big\}.$$

(۲) اندازهٔ لبگ اندازه‌ای منظم است.

برای دیدن جزئیات به [۱] یا [۲۷] مراجعه کنید.

تعریف ۲۹.۱. فرض کنیم X یك فضای موضعاً فشرده باشد.

(الف) مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط-مقدار روی X را با $C(X)$ نشان می‌دهیم. $C(X)$ همراه با اعمال نقطه‌ای توابع و ضرب اسکالر یك فضای برداری است. به‌علاوه، برای $f \in C(X)$ محمل f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط-مقدار روی X با محمل فشرده را با $C_{00}(X)$ یا $C_c(X)$ نشان می‌دهیم که یك زیرفضای $C(X)$ است.

(ب) گوییم تابع f در بی‌نهایت صفر می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، زیرمجموعهٔ فشردهٔ K از X موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in X \setminus K$ داشته باشیم $|f(x)| < \varepsilon$. مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط-مقدار f روی X که در بی‌نهایت صفر می‌شود را با $C_0(X)$ نشان می‌دهیم، همچنین $C_{00}(X)$ در $C_0(X)$ چگال است.

(ج) فرض کنیم f یك تابع حقیقی (یا حقیقی گسترش یافته) بر X باشد. اگر به‌ازای هر αی حقیقی مجموعهٔ

$$\{x : f(x) > \alpha\}$$

باز باشد، گوییم f نیم‌پیوستهٔ پایینی است. و اگر به‌ازای هر αی حقیقی مجموعهٔ

$$\{x : f(x) < \alpha\}$$

باز باشد، گوییم f نیم‌پیوستهٔ بالایی می‌باشد. مجموعهٔ تمام توابع نیم‌پیوستهٔ پایین را با $\mathfrak{M}^+$ و مجموعهٔ تمام توابع نیم‌پیوستهٔ بالا را با $\mathfrak{N}^+$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳۰.۱. *اگر $\emptyset \neq D \subseteq \mathfrak{M}^+$ آن‌گاه* $\sup\{f : f \in D\} \in \mathfrak{M}^+$

برهان. به اثبات قضیهٔ ۱۰.۱۱ از [۲۲] مراجعه کنید. □

قضیه ۳۱.۱. *(نمایش ریس). فرض کنیم X یك فضای موضعاً فشردهٔ هاسدورف و I یك تابعك خطی مثبت روی $C_c(X)$ باشد. در این‌صورت اندازهٔ بورل منظم یکتایی مانند μ روی X وجود دارد به‌طوری‌که*

$$I(f) = \int_X f d\mu \qquad (f \in C_c(X)).$$

به‌علاوه داریم $\|\mu\| = \|I\|$.

برهان. به قضیهٔ ۱۴.۲ از [۲۷] رجوع کنید. □

تعریف ۳۲.۱. فرض‌کنید X و Y فضاهایی ناتهی و موضعاً فشرده باشند و μ و ν دو اندازهٔ مثبت بورل منظم به‌ترتیب، روی X و Y باشند. برای $f \in C_{\circ\circ}(X \times Y, \mathbb{R})$ داریم
$$\int_X \Big(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \Big) d\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X f(x,y) d\mu(x) \Big) d\nu(y).$$
مقدار مشترك این دو انتگرال یك تابعك خطی مثبت روی $C_{\circ\circ}(X \times Y)$ معرفی می‌کند. طبق قضیهٔ نمایش ریس اندازهٔ مثبت بورل منظمی روی $X \times Y$ موجود است که این تابعك را نمایش می‌دهد، اندازهٔ مذکور را اندازهٔ حاصل‌ضربی روی $X \times Y$ می‌نامیم و آن را با $\mu \times \nu$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳۳.۱. (*فوبینی*). *فرض کنید μ و ν به‌ترتیب دو اندازهٔ بورل منظم روی فضاهای موضعاً فشردهٔ X و Y باشند و f یك تابع مختلط-مقدار $\mu \times \nu$-اندازه‌پذیر روی $X \times Y$ باشد که خارج از مجموعهٔ $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ تقریباً همه جا صفر باشد. که در آن برای هر n، A_n مجموعه‌ای $\mu \times \nu$-اندازه‌پذیر است و $(\mu \times \nu)(A_n) < \infty$. در این صورت انتگرال‌های زیر*
$$\int_{X\times Y} f(x,y) d(\mu \times \nu)(x,y),\ \int_X \int_Y f(x,y) d\nu(x) d\mu(y),\ \int_Y \int_X f(x,y) d\mu(x) d\nu(y)$$
مساوی و متناهی هستند اگر و تنها اگر یکی از انتگرال‌های زیر متناهی باشد
$$\int_{X\times Y} |f(x,y)| d(\mu\times\nu)(x,y),\ \int_X\int_Y |f(x,y)| d\nu(x) d\mu(y),\ \int_Y\int_X |f(x,y)| d\mu(x) d\nu(y)$$

برهان. به قضیهٔ ۱۰.۱۳ از [۲۲] رجوع کنید. □

تعریف ۳۴.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یك فضای اندازه باشد.

(الف) عدد حقیقی M یك کران اساسی برای تابع مختلط-مقدار f روی مجموعهٔ X نامیده می‌شود، هرگاه برای تقریباً هر $x \in X$ داشته باشیم $|f(x)| \le M$.

تابع f اساساً کران‌دار نامیده می‌شود اگر یك کران اساسی داشته باشد. سوپریموم اساسی f به‌صورت زیر تعریف می‌شود
$$\operatorname{ess\,sup} f = \|f\|_\infty := \inf \Big\{ M :\ |f(x)| \le M\ ,\ \text{برای تقریباً هر } x \Big\}$$

به طور مشابه اینفیموم اساسی به‌صورت زیر تعریف می‌شود
$$\operatorname{ess\,inf} f := \sup \Big\{ M :\ |f(x)| \ge M\ ,\ \text{برای تقریباً هر } x \Big\}$$

$L^\infty(X,\mu)$ یا $L^\infty(\mu)$ را فضای توابع اندازه‌پذیر f تعریف می‌کنیم که $\|f\|_\infty < \infty$.

دو تابع $f, g \in L^\infty(X,\mu)$ را یکسان می‌گیریم اگر $\|f-g\|_\infty = 0$؛ یعنی f و g تقریباً همه‌جا برابر باشند و می‌نویسیم $f \equiv g$. در این‌صورت $L^\infty(X,\mu)$ همراه با اعمال نقطه‌ای توابع و نرم $\|.\|_\infty$ فضای باناخ است.

(ب) برای $1 \le p < \infty$، خانوادهٔ تمام توابع مختلط-مقدار f روی X با شرط

$$\|f\|_p = \Big(\int_X |f|^p d\mu\Big)^{1/p} < \infty$$

را با $L^p(X,\mu)$ یا $L^p(\mu)$ نشان می‌دهیم. $L^p(X,\mu)$ با اعمال نقطه‌ای توابع و نرم بالا فضای باناخ تشکیل می‌دهد.

(ج) نرم یکنواخت تابع مختلط-مقدار f روی مجموعهٔ X به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|f\|_u = \sup\Big\{|f(x)| : x \in X\Big\}.$$

تذکر ۳۵.۱. برای $1 \le p \le \infty$، فضای $L^p(\mathbb{R}^n, m)$ را با $L^p(\mathbb{R}^n)$ و فضای $L^p(\mathbb{R}^+, m)$ را با $L^p(\mathbb{R}^+)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳۶.۱. *فرض‌کنیم p و q اعداد حقیقی مثبتی باشند به‌طوری‌که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (در این‌صورت p و q را مزدوج نمایی یا مزدوج هولدر می‌نامیم). فرض‌کنیم (X,μ) یک فضای اندازه باشد. در این‌صورت*

(الف) برای هر $f \in L^p(X,\mu)$ و $g \in L^q(X,\mu)$ داریم $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$.

(ب) برای هر $f, g \in L^p(X,\mu)$ داریم $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

نامساوی (الف) را نامساوی هولدر و نامساوی (ب) را نامساوی مینکوفسکی می‌نامیم.

برهان. به قضیهٔ ۳.۵ از [۲۷] مراجعه کنید. □

قضیه ۳۷.۱. *(الف) فرض‌کنیم (X,μ) فضای اندازه باشد و $f_1, \ldots, f_n$ توابع نامنفی در $L^1(X,\mu)$ باشند. فرض‌کنیم $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ اعداد مثبت باشند به‌طوری‌که $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$. آن‌گاه $f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_n^{\alpha_n} \in L^1(X,\mu)$ و داریم*

$$\int_X f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_n^{\alpha_n} d\mu \le \|f_1\|_1^{\alpha_1} \|f_2\|_1^{\alpha_2} \cdots \|f_n\|_1^{\alpha_n}$$

این نامساوی به نامساوی هولدر تعمیم یافته معروف است.

(ب) فرض‌کنید $(X,\mathcal{M},\mu)$ و $(Y,\mathcal{N},\nu)$ فضاهای اندازهٔ σ-متناهی باشند و f یک تابع مثبت

$\mu\times\nu$-اندازه‌پذیر روی $X\times Y$ باشد آن‌گاه داریم

$$\left(\int[\int f(x,y)d\nu(y)]^p d\mu(x)\right)^{1/p}\leq \int[\int f^p(x,y)d\mu(x)]^{1/p}d\nu(y).$$

این نامساوی را نامساوی مینکوفسکی برای انتگرال‌ها می‌نامیم.

برهان. برای قسمت (الف) به قضیهٔ ۱۲.۵ از [۲۲] و برای قسمت (ب) به قضیهٔ ۱۹.۶ از [۱۱] مراجعه کنید. □

قضیه ۳۸.۱. *(تسلطی لبگ). فرض کنید (X,μ) فضای اندازه باشد و (f_n) دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر مختلط بر X باشد به‌طوری‌که برای هر $x\in X$،*

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x).$$

اگر تابعی مانند $g\in L^1(\mu)$ موجود باشد که

$$|f_n(x)|\leq g(x)\quad (n=1,2,3,\cdots\ ;\ x\in X)$$

آن‌گاه $f\in L^1(\mu)$ و

$$\lim_{n\to\infty}\int_X|f_n-f|d\mu=0,\ \lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu=\int_X f d\mu$$

برهان. به قضیهٔ ۲۶.۱ از [۲۷] مراجعه کنید. □

قضیه ۳۹.۱. *فرض کنید (X,μ) فضای اندازه باشد و $1\leq p\leq\infty$. اگر (f_n) یك دنبالهٔ کشی در $L^p(\mu)$ با حد f باشد، آن‌گاه (f_n) زیردنباله‌ای دارد که تقریباً همه‌جا به‌طور نقطه‌ای به f میل می‌کند.*

برهان. به قضیهٔ ۱۲.۳ از [۲۷] رجوع کنید. □

قضیه ۴۰.۱. *(اساسی حسابان). فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر لبگ باشد و تابع $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ در رابطهٔ $F(x)=f(a)+\int_a^x fdt$ صدق کند. در این صورت F تقریباً همه‌جا مشتق‌پذیر است و داریم $F'=f$ تقریباً همه‌جا روی $[a,b]$.*

برهان. به قضیهٔ ۲.۵.۴ از [۳۰] رجوع کنید. □

قضیه ۴۱.۱. *فرض کنید μ یك اندازهٔ بورل منظم روی فضای موضعاً فشردهٔ X باشد و $1\leq p<\infty$، آن‌گاه $C_c(X)$ در $L^p(\mu)$ چگال است.*

برهان. به قضیهٔ ۳.۱۴ از [۲۷] رجوع کنید. □