بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست مندرجات

ABSTRACT

It is widely believed that gravitational collapse of stellar systems results in cuspy mass profiles. In the potential field of a cuspy system, regular box orbits are destroyed and replaced by boxlets and chaotic orbits, among which we can refer to banana, fish and pretzel orbits. Miralda-Escudé and Schwarzschild (1989), and Jalali and dezeeuw (2002) showed that only certain families of fish orbits are useful in the construction of self-consistent models. Tube orbits are universally anti-aligned with the equipotential curves, and therefore, can not support equilibrium states in the absence of other orbit families. In their study of cusps without chaos, Sridhar and Touma (1997; hereafter ST) introduced a family of planar mass models that have separable potentials of stäckel form in parabolic coordinates. ST models host a continuous family of regular banana orbits. But, Syer and Zhao (1998) showed by a semianalytical method that these models are non-self-consistent. Is there any planar mass model with a separable potential that corresponds to a continuous family of elliptical orbits? In this study we attempt to answer this question through solving Szebehely's partial differential equation. We confine ourselves to the potentials of the form $U = r^{\alpha}P(\theta)$, which are relevant to scale-free models. Then, we choose certain classes of orbits (like concentric elliptical orbits) and obtain an ordinary differential equation for $P(\theta)$ and solve the reasulting ODE by numerical means.

We show that Szebehely's equation does not lead to physical models when the orbit family is chosen to be $f(x,y) = q^2x^2 + y^2$ (for concentric ellipses) and $g(x,y) = \frac{x+1}{2y^2}$ (for co-apex parabolae). However, it is shown that Szebehely's equation yields the ST models when the orbit family is chosen to be a set of confocal parabolae.

We speculate that orbit families with separable potentials satisfy Szebehely's equation as the ST discs.

Institute for Advanced Studies
in Basic Sciences Zanjan

Application of Szebehely's Equation in Galactic Potentials

Master's Thesis

Nasim Kashanian

Supervisor: Dr. M. A. Jalali

February 2002

مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان

کاربرد معادله سبهلی در پتانسیل‌های کهکشانی

پایان‌نامهٔ کارشناسی‌ارشد

نسیم کاشانیان

استاد راهنما: دکتر میرعباس جلالی

اسفند ۱۳۸۰

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

و

همسر مهربانم ، احسان

چکیده

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه ۱ سبهلی، پتانسیل $U(x,y)$ مربوط به دسته مدار یک پارامتری $f(x,y) = u$ را بدست می دهد. معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه ۲ غیر خطی نیز وجود دارد که کارایی بهتری در حل مسئله دارد. مهمترین مزیت معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه ۲ ، نبودن تابع انرژی $E(f) = E$ درمعادله است. در این پایان نامه از شکل مرتبه ۲ معادله سبهلی ، استفاده شده است. با استفاده از این معادله نشان می دهیم که برای دسته بیضی های هم کانون و دسته بیضی های هم مرکز هیچ پتانسیل فیزیکی از نوع $U(r,\theta) = \mathrm{sgn}(\alpha) r^{\alpha} P(\theta)$ وجود ندارد. و برای دسته سهمی هایی که مدارهای موزی شکل را می سازند، چنین پتانسیلی می تواند وجود داشته باشد. در تمام مراحل یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبه ۲ برای $P(\theta)$ بدست می آید که به صورت عددی پاسخیابی می شود.

فصل ۱

مقدمه

بروک و لاس(۱۹۷۷)(Broucke & Lass) در مقاله خود معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه ۱ سبهلی
(Szebehely) را بدست آورده و برای دسته مدارهای دایره‌ای :

$$x^2 + y^2 = u = \text{ثابت} \tag{۱.۱}$$

ودسته مدارهای مارپیچی :

$$re^{-\theta} = u = \text{ثابت} \tag{۲.۱}$$

حل کرده و به فرمول بندی دیگری غیر از فرمول بندی سبهلی که به فرمول بندی یوکوفسکی
(Joukovsky) معروف است ، پرداختند.[۳] برای اطلاعات بیشتر می توانید رجوع کنید به[۶]
(Whittaker, 1927 , section 56 , pages 109-111). این فرمول بندی در دستگاه مختصاتی صورت
می گیرد که مختصات آن را پارامتر دسته مدار $u = f(x,y)$ و پارامتر دسته مدار عمود بر دسته مدار u،
$v = g(x,y)$ تعیین می کنند. این فرمول بندی به یک معادله انتگرالی برای پتانسیل U منتهی می
شود، که پاسخیابی آن برای بعضی دسته مدارها راحت تر از حل معادله سبهلی است.
سبهلی (۱۹۸۰) با استفاده از معادله دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ ۱ خود، برای دسته مدار ∞ شکل با
معادلهٔ :

$$r^2 - a^2 \cos n\theta = f(r,\theta) = u \tag{۳.۱}$$

شکل پتانسیل را که پتانسیل یکتایی نبود بدست آورد و بعضی پتانسیل های خاص از جمله پتانسیل
گرانشی نیوتونی را بدست آورد.[۴] در رابطه (۳.۱)، r و θ مختصات قطبی هستند و a یک پارامتر
مقیاس است و n ، با زاویه خط مماس بر منحنی ها در مبدأ، α، ارتباط دارد ($\alpha = \pm\frac{\pi}{2n}$).

بوزیس (Bozis) (۱۹۸۴) معادلهٔ مرتبه ۲ سبهلی را در دستگاه مختصات قطبی و دکارتی بدست آورد. در معادلهٔ مرتبه ۲ ، تابع انرژی وجود ندارد و لزومی ندارد هیچ فرضی برای دانستن تابع E ، بعمل آوریم. بوزیس این معادله مرتبه ۲ را با استفاده از بسط بر حسب هماهنگ های کروی برای دسته مدارهای دایره‌ای هم مرکز و دسته بیضی های هم کانون، $u = f(r,\theta) = r(1 + e\cos\theta)$ حل کرد و برای دسته بیضی های هم کانون تنها پتانسیل کپلری $U = \frac{K}{r}$ را بدست آورد. قبلاً برای تک مدار برتراند ثابت کرده بود که غیر از پتانسیل های گرانشی از نوع Kr^2 و $\frac{K}{r}$ ، هیچ پتانسیل دیگری وجود ندارد تا بتواند مدار بیضی شکل را به ما بدهد و این بار بوزیس از طریق حل معادله مرتبه ۲ سبهلی ، این نتیجه را برای دسته بیضی های هم کانون بدست آورد. در فصل ۲ این معادله را به روش عددی برای پتانسیل های از نوع $U(r,\theta) = \mathrm{sgn}(\alpha) r^{\alpha} P(\theta)$ حل کرده و نشان خواهیم داد که هیچ فرم فیزیکی برای $P(\theta)$ بدست نمی آید ، و فقط پتانسیل $U = \frac{K}{r}$ برای این دسته مدارها بدست می آید.

پئل (Puel) (۱۹۹۹) با استفاده از فرمول بندی یوکوفسکی ، معادلات دیفرانسیل مرتبه ۲ یوکوفسکی را با متغیرهای u و ν بیان می کند و بررسی می کند که آیا تابع پتانسیلی وجود دارد که هر دو دسته منحنی u و منحنی های عمود بر آن ν را داشته باشد؟ با این روش فرم پتانسیل را برای دسته بیضی های هم مرکز به فرم :

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + \eta y^2) = u. \tag{۴.۱}$$

و برای دسته منحنی های عمود بر آنها

$$f(x,y) = \eta \ln x - \ln y = \nu. \tag{۵.۱}$$

و البته برای حالتهای خاص $\eta = 0, 1, -1, \frac{1}{2}, 2$ بدست می آورد.[۵]

بوزیس (۱۹۸۳) مسئله وارون را برای دسته مدارهای دو پارامتری $f(x,y,b) = c$ در دستگاه مختصات دکارتی بررسی می کند و به این سؤال پاسخ می دهد که آیا سیستم دینامیکی ایقایی و خود گردان یکتایی وجود دارد که بتواند دسته مدارهای دو پارامتری $f(x,y,b) = c$ را بدهد؟ و دسته مدارهای f در چه شرایطی باید صدق کنند تا بتوانیم سیستم دینامیکی ایقایی یکتایی داشته باشیم.[۲]

شریدار وتوما (۱۹۹۷) (Sridhar & Touma) پتانسیل زیر را معرفی کرده

$$\Phi = Kr^{(1-\gamma)}F(\theta) - \frac{GM}{r} \tag{۶.۱}$$

$$F(\theta) = (1+\sin\theta)^{2-\gamma} + (1-\sin\theta)^{2-\gamma} \tag{۷.۱}$$

و نشان می دهند که این سیستم در دستگاه مختصات سهموی به جدایش معادلهٔ هامیلتون ـژاکوبی می رسد سپس با دو ثابت انتگرال E و I (رجوع کنید به فصل ۳) مرز مدارها را بدست آوردند. برای $E < 0$ مدارها در یک محدوده عدسی شکل می توانند وجود داشته باشند [۷] و برای $E > 0$ هم در یک سطح موزی و هم در سطح عدسی شکل می توانند قرار بگیرند، که در فصل ۲ شرح داده‌ایم. پتانسیل را از طریق معادله مرتبه ۲ برای دسته سهمی هایی که شریدار و توما داده بودند، به دست آوردیم و دقیقاً همان پتانسیلی را بدست آوردیم که شریدار و توما از روی آن این دسته سهمی ها را بدست آورده بودند. در مرحله بعد برای دسته سهمی های $x = 2a^2y^2 - 1$ معادلهٔ دیفرانسیل را نوشتیم و مشاهده کردیم پتانسیل برای پتانسیل های از نوع بی مقیاس جدا پذیر نشد. در فصل ۳ جزئیات کار توضیح داده شده است.

فصل ۲

معادلات سبهلی

۱.۲ معادله مرتبه ۱ سبهلی در دستگاه مختصات دکارتی

دسته مدار یک پارامتری زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x,y) = u = \text{ثابت} \tag{۱.۲}$$

می‌خواهیم نیروی (X,Y)، وارد بر ذره‌ای به جرم واحد را به نحوی پیدا کنیم که این نیرو حرکت روی دسته مدار(۱.۲) را نتیجه دهد. به عبارت دیگر پاسخ معادلات دیفرانسیل حرکت :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= X(x,y),\\ \ddot{y} &= Y(x,y).\end{aligned} \tag{۲.۲}$$

روی دسته منحنی‌های $f(x,y) = u$ قرار گیرد. حال این سؤال پیش می‌آید که اگر میدان نیروی (X,Y) ناشی از یک پتانسیل باشد، پتانسیل فرضی و دسته مدارهای $f(x,y) = u$ در چه شرایطی صدق می‌کنند؟

با مشتق گیری از(۱.۲) بدست می‌آوریم:

$$\dot{x}f_x + \dot{y}f_y = 0. \tag{۳.۲}$$

برای $\dot{x}, \dot{y}$ داریم:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= g(x,y)f_y,\\ \dot{y} &= -g(x,y)f_x.\end{aligned} \tag{۴.۲}$$

که تابع $g(x,y)$ تابعی دلخواه، از مختصات x و y است. با استفاده از (۲.۲) و (۴.۲) **(با مشتق گیری** از (۴.۲)) داریم:

$$\ddot{x} = X = g^2(f_{xy}f_y - f_{yy}f_x) + gf_y(g_xf_y - g_yf_x),$$
$$\ddot{y} = Y = g^2(f_{xy}f_x - f_{xx}f_y) + gf_x(g_yf_x - g_xf_y). \qquad (۵.۲)$$

هم چنین با در نظر گرفتن اندازه بردار سرعت یعنی:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = g^2(f_x^2 + f_y^2). \qquad (۶.۲)$$

می‌توان نشان داد شکل فشرده‌تر معادلات (۵.۲) به صورت زیر است:

$$\ddot{x} = X = \tfrac{1}{2}(g^2f_y^2)_x - \tfrac{1}{2}\tfrac{f_x}{f_y}(g^2f_y^2)_y,$$
$$\ddot{y} = Y = \tfrac{1}{2}(g^2f_x^2)_y - \tfrac{1}{2}\tfrac{f_y}{f_x}(g^2f_x^2)_x. \qquad (۷.۲)$$

انرژی مداری:

$$E(u) = \frac{1}{2}v^2 - U(x,y). \qquad (۸.۲)$$

در طول حرکت ثابت می‌ماند. با استفاده از (۶.۲) و (۸.۲) بدست می آوریم:

$$U(x,y) = \frac{1}{2}g^2(f_x^2 + f_y^2) - E(u). \qquad (۹.۲)$$

E فقط تابعی از u است و u نیز به ازای هر مدار از دسته مدار (۱.۲) ثابت است.

برای مشتقّات جزئی داریم:

$$E_x = E_uf_x,$$
$$E_y = E_uf_y. \qquad (۱۰.۲)$$

از معادلات (۹.۲) و (۱۰.۲) نیز داریم:

$$U_x - \tfrac{1}{2}(g^2f_x^2)_x - \tfrac{1}{2}(g^2f_y^2)_y + E_uf_x = 0,$$
$$U_y - \tfrac{1}{2}(g^2f_x^2)_y - \tfrac{1}{2}(g^2f_y^2)_y + E_uf_y = 0. \qquad (۱۱.۲)$$

از ترکیب این معادلات و معادلات (۷.۲) بدست می‌آوریم:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\ddot{x}} = U_x - \tfrac{1}{2f_y}[f_x(g^2f_y^2)_y + f_y(g^2f_x^2)_x - 2E_uf_xf_y],$$
$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\ddot{y}} = U_y - \tfrac{1}{2f_x}[f_x(g^2f_y^2)_y + f_y(g^2f_x^2)_x - 2E_uf_xf_y]. \qquad (۱۲.۲)$$

که (X,Y) گرادیان‌های تابع U هستند اگر و تنها اگر رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$f_x(g^2f_y^2)_y + f_y(g^2f_x^2)_x - 2E_uf_xf_y = 0. \tag{۱۳.۲}$$

این رابطه، معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مرتبه ۱ برای g^2 به ازای f داده شده است. حال نشان می‌دهیم که این همان معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه ۱ سبهلی است. معادله دیفرانسیل جزئی (۱۳.۲) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f_x(g^2)_x + f_y(g^2)_y + 2g^2(f_{xx} + f_{yy}) - 2E_u = 0. \tag{۱۴.۲}$$

برای اینکه این معادله را برای g^2 حل کنیم، باید $E(u)$ معلوم باشد. به عبارت دیگر، بایستی وابستگی دقیق E بر حسب پارامتر u مشخص گردد و بعد از محاسبهٔ g^2 پتانسیل از رابطهٔ (۹.۲) بدست آید.

معادلهٔ دیفرانسیلی جزئی (۱۴.۲) را می‌توان با جایگزینی $\frac{v^2}{f_x^2+f_y^2}$ به جای g^2، مطابق رابطهٔ (۲ ـ ٦) تغییر داد، که بعد از ساده سازی معادله دیفرانسیل جزئی زیر را برای v^2 خواهیم داشت:

$$f_x(v^2)_x + f_y(v^2)_y + 2Wv^2 - 2E_u(f_x^2 + f_y^2) = 0, \tag{۱۵.۲}$$

بطوریکه

$$W = \frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^2 + f_x^2}. \tag{۱٦.۲}$$

با جایگزینی $2(E+U)$ به جای v^2، به دست می آوریم:

$$f_xU_x + f_yU_y + 2W(E+U) = 0. \tag{۱۷.۲}$$

که این همان معادلهٔ جزئی مرتبه ۱ سبهلی (۱۹۷۴) است.[۳]

فرم معادله مرتبه ۱ سبهلی در دستگاه مختصات قطبی:

معادلات سبهلی در دستگاه مختصات دکارتی در (۱۷.۲) داده شد. در اینجا برای نوشتن این معادله در دستگاه مختصات قطبی تبدیلات زیر را انجام می دهیم:

$$r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \theta = \arctan(\tfrac{y}{x}). \tag{۱۸.۲}$$

و

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta. \tag{۱۹.۲}$$

با استفاده از روابط بالا می توان به مشتقات جزئی به صورت زیر دست یافت:

$$\begin{aligned}\theta_x &= \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r},\\ \theta_y &= \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}.\end{aligned} \tag{۲۰.۲}$$

و

$$\begin{aligned}r_x &= \cos\theta,\\ r_y &= \sin\theta.\end{aligned} \tag{۲۱.۲}$$

برای بدست آوردن توابع f_x و f_y بر حسب f_r و f_θ چنین عمل می کنیم:

$$\begin{aligned}f_x &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = f_r\cos\theta - f_\theta\frac{\sin\theta}{r},\\ f_y &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = f_r\sin\theta + f_\theta\frac{\cos\theta}{r}.\end{aligned} \tag{۲۲.۲}$$

هم چنین برای مشتقات جزئی f_{xx} و f_{yy} و f_{yx} داریم:

$$\begin{aligned}f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(f_x) = \frac{\partial}{\partial r}(f_r\cos\theta - f_\theta\frac{\sin\theta}{r})\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\theta}(f_r\cos\theta - f_\theta\frac{\sin\theta}{r})\frac{\partial\theta}{\partial x}\\ &= f_{rr}\cos^2\theta - 2f_{\theta r}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{2f_\theta\sin\theta\cos\theta}{r^2} + \frac{f_r\sin^2\theta}{r} + \frac{f_{\theta\theta}\sin^2\theta}{r^2}\end{aligned} \tag{۲۳.۲}$$

$$\begin{aligned}f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = \frac{\partial}{\partial r}(f_r\cos\theta - f_\theta\frac{\sin\theta}{r})\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\theta}(f_r\cos\theta - f_\theta\frac{\sin\theta}{r})\frac{\partial\theta}{\partial y}\\ &= f_{rr}\cos\theta\sin\theta + \frac{f_\theta\sin\theta^2}{r^2} - f_{\theta r}\frac{\sin\theta^2}{r} + f_{r\theta}\frac{\cos\theta^2}{r} - f_r\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\\ &- f_{\theta\theta}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2} - f_\theta\frac{\cos\theta^2}{r^2}\end{aligned} \tag{۲۴.۲}$$

و

$$f_{yx} = f_{xy} \tag{۲۵.۲}$$

$$\begin{aligned}f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(f_y) = \frac{\partial}{\partial r}(f_r\sin\theta + f_\theta\frac{\cos\theta}{r})\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\theta}(f_r\sin\theta + f_\theta\frac{\cos\theta}{r})\frac{\partial\theta}{\partial y}\\ &= f_{rr}\sin^2\theta + 2f_{r\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} - \frac{2f_\theta\sin\theta\cos\theta}{r^2} + \frac{f_r\cos^2\theta}{r} + \frac{f_{\theta\theta}\cos^2\theta}{r^2}\end{aligned} \tag{۲۶.۲}$$

با جایگزین کردن روابط بالا در معادلهٔ سبهلی (۱۷.۲)، این معادله را در دستگاه مختصات قطبی به فرم زیر خواهیم داشت:

$$f_r U_r + \frac{f_\theta}{r^2}U_\theta + 2W(E+U) = 0, \tag{۲۷.۲}$$

که

$$W(r,\theta) = \frac{f_{rr}f_\theta^2 - 2f_r f_\theta f_{r\theta} + f_{\theta\theta}f_r^2 + rf_r^3 + \frac{2}{r}f_r f_\theta^2}{f_\theta^2 + r^2 f_r^2} \tag{۲۸.۲}$$

محاسبات جبری لازم با استفاده از نرم افزار $Maple$ صورت گرفته است.