دانشگاه کاشان
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی محض (گرایش آنالیز)

عنوان:

قانون قوی اعداد بزرگ و قضیه حد مرکزی برای متغیرهای تصادفی مجموعه- مقدار فازی

استاد راهنما:
دکتر روح‌اللّه جهانی‌پور

به‌وسیله:
نرجس اللّه‌پرست

خرداد ماه ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به دو وجود مقدس

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم

موهایشان سپید شد تا ما رو سفید شویم

وعاشقانه سوختند تا گرما بخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند

تقدیم به پدر و مادر عزیزم.

سپاس

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمون‌مان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزی‌مان ساخت.

سپاسگزار یاران بزرگواری هستم که مرا در فرجام بخشی این پژوهش یاری کردند. لازم و شایسته است از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر روح‌الله چهانی‌پور که دریای بی‌کران علمشان کناری آرام بر خاطرم بود، قدردانی کنم. همچنین وظیفه خویش می‌دانم به اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر بهنام بازیگران و جناب آقای دکتر خلیل شفیعی که به‌عنوان داوران داخل زحمت داوری را پذیرفتند، مراتب سپاس خویش را تقدیم دارم. همچنین از تشریک مساعی جناب آقای دکتر محسن جاوری، نماینده محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه، که در جلسه دفاع بنده شرکت نمودند سپاسگزارم.

در پایان، از پدر و مادرم که همواره وجودشان گرمی بخش زندگیم بوده سپاسگزارم و از خواهر و برادر خوبم که همدم دیروز، امروز و فردایم هستند، تشکر می‌کنم.

پروردگارا! بارالها! طراوت بهار را با عشق وجودت در هم آمیز و رحمت بی‌پایانت را چون جویبار بر ما جاری ساز تا آن‌گونه که اراده توست متحول گردیم.

نرجس اللّه‌پرست

خرداد ماه ۹۱

چکیده

هدف اصلی در این پایان‌نامه، بیان قانون قوی اعداد بزرگ و قضیه حد مرکزی برای متغیرهای تصادفی مجموعه−مقدار فازی نسبت به متریک هاسدورف توسعه یافته (H_∞) می‌باشد. برای این منظور، ابتدا مفاهیم مربوط به متغیرهای تصادفی مجموعه−مقدار به‌خصوص متغیرهای تصادفی مجموعه−مقدار فازی را معرفی می کنیم. سپس نتایجی را ثابت می کنیم که به‌عنوان مقدمه‌ای بر اثبات قضیه قانون قوی اعداد بزرگ به‌شمار می روند. پس از آن، قانون قوی اعداد بزرگ را برای متغیرهای تصادفی مجموعه−مقدار فازی مستقل که فضای زمینه آن‌ها فضای باناخ جدایی‌پذیر و یا یک فضای اقلیدسی نسبت به متریک هاسدورف توسعه یافته است، ثابت می‌کنیم. در انتها، قضیه حد مرکزی را نیز برای متغیرهای تصادفی مجموعه−مقدار تعمیم یافته (فازی) نسبت به متریک هاسدورف توسعه یافته با فضای زمینه اقلیدسی بیان می‌کنیم.

کلمات کلیدی

۱. متغیرهای تصادفی مجموعه−مقدار فازی (تعمیم یافته)
۲. قانون قوی اعداد بزرگ
۳. متریک هاسدورف توسعه یافته
۴. فرآیند تجربی
۵. قضیه حد مرکزی

فهرست مطالب

عنوان صفحه

مقدمه

قانون قوی اعداد بزرگ ($SLLN'S$) و قضیه حد مرکزی (CLT) از مهمترین قضایای نظریه احتمال می‌باشند. قضیه حد مرکزی به تعیین شرایطی که در غالب آن‌ها مجموع تعداد زیادی از متغیرهای تصادفی از توزیع نرمال تبعیت می‌کنند، مربوط می‌شود و قانون قوی اعداد بزرگ به تعیین شرایطی که در چهارچوب آن‌ها میانگین یک رشته از متغیرهای تصادفی به امید ریاضی میل کند، می‌پردازد. در واقع، قانون قوی اعداد بزرگ پل ارتباطی بین تعریف اصل موضوعی احتمال و تعریف آماری آن بر مبنای فراوانی نسبی است.

در دهه‌های اخیر، متغیرهای تصادفی مجموعه–مقدار و آنالیز آن‌ها به‌ویژه، متغیرهای تصادفی مجموعه–مقدار فازی به‌دلیل کاربردهایی که در نظریه کنترل، اقتصاد ریاضی و نظریه نقطه ثابت دارند، مورد توجه خاصی بوده‌اند. بعد از انجام کارهای اولیه توسط رابینز [۱] در سال‌های ۱۹۴۴ و ۱۹۴۵ و شوکه [۲] در سال ۱۹۵۵، مفهوم متغیرهای تصادفی مجموعه–مقدار به‌طور اصولی توسط کِندال [۳] در سال ۱۹۷۴ و مَتِرون [۴] در سال ۱۹۷۵ معرفی شد. همچنین در سال ۱۹۶۵، لطفی‌زاده مجموعه‌های فازی را [۵] معرفی نمود که مورد توجه بسیاری از محققان در رشته‌های مختلف علمی قرار گرفت. بعدها متغیرهای تصادفی مجموعه–مقدار فازی، یعنی متغیرهای تصادفی که مقادیرشان اعداد یا مجموعه‌ها

[۱] Robbins
[۲] Choquet
[۳] Kendall
[۴] Matheron
[۵] Zadeh

نیست بلکه مجموعه‌های فازی است، توسط فرون [۶] ، کروز [۷] ، کواکرناک [۸] ، پوری [۹] و رالسکو [۱۰] مورد مطالعه قرار گرفت. پس از ارائه و گسترش نظریه متغیرهای تصادفی مجموعه–مقدار به‌ویژه، متغیرهای تصادفی مجموعه–مقدار فازی، تعمیم قانون قوی اعداد بزرگ و قضیه حد مرکزی برای این قبیل از متغیرهای تصادفی مورد توجه قرار گرفت.

صورت‌های گوناگونی از قانون قوی اعداد بزرگ توسط آرتشتاین [۱۱] ، ویتالی [۱۲] ، کرسی [۱۳] ، گینه [۱۴] ، هیایی [۱۵] ، پوری [۱۶] ، رالسکو [۱۷] ، تیلور [۱۸] و اینیو [۱۹] ثابت شده است. کرسی نمونه‌های انگیزه‌بخش و کاربردهایی از قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی مجموعه–مقدار را در کتاب خود عنوان کرده است.

در رابطه با قضایای همگرایی متغیرهای تصادفی مجموعه–مقدار فازی با فضای زمینه اقلیدسی، کلمنت [۲۰] متریک هاسدورف H را به دو متر H_1 و H_∞ توسعه داد. وی قانون قوی اعداد بزرگ را برای متغیرهای تصادفی مجموعه–مقدار فازی مستقل هم توزیع نسبت به متر H_1 با استفاده از روش نشاندن ثابت کرد. کلوبی [۲۱] قانون قوی اعداد بزرگ را برای متغیرهای تصادفی مجموعه–مقدار فازی مستقل هم توزیع نسبت به متر H_∞ به‌وسیله روش تقریب به‌دست آورد. اینیو [۲۲] قانون قوی اعداد

---

[۶] Feron
[۷] Kruse
[۸] Kwakernaak
[۹] Puri
[۱۰] Ralescu
[۱۱] Artestein
[۱۲] Vitale
[۱۳] Cressie
[۱۴] Gine et al
[۱۵] Hiai
[۱۶] Puri
[۱۷] Ralescu
[۱۸] Taylor
[۱۹] Inoue
[۲۰] Klement et al
[۲۱] Colubi et al
[۲۲] Inoue

بزرگ را برای متغیرهای تصادفی مجموعه-مقدار فازی مستقل (نه لزوماً هم توزیع) نسبت به متر H_1 که در واقع تعمیم نتیجه برای متغیرهای تصادفی مجموعه-مقدار است، ثابت کرد. لازم به ذکر است که همه نتایج فوق برای متغیرهای تصادفی مجموعه-مقدار فازی با فضای زمینه $\mathbb{R}^d$ حاصل شده است.

از سوی دیگر، توسیع و تعمیم قضیه حد مرکزی برای متغیرهای تصادفی مزبور نیز مورد مطالعه قرار گرفت. بعد از کارهای اولیه کرسی و لیاشنکو [۲۳] ، ویل [۲۴] قضیه حد مرکزی برای متغیرهای تصادفی مجموعه-مقدار فشرده در $\mathbb{R}^d$ بهدست آورد. وی برای اثبات آن از قضیه حد مرکزی برای متغیرهای تصادفی $C(S)$-مقدار که توسط جین [۲۵] و مارکوس [۲۶] بیان شدهاند، استفاده کرد که در اینجا S فضای متریک فشرده و $C(S)$ فضای باناخ همه توابع پیوسته کراندار روی S، مجهز به نرم همگرایی یکنواخت میباشد. بعدها قضیه حد مرکزی برای متغیرهای تصادفی مجموعه-مقدار در فضای باناخ جداییپذیر توسط گینه، پوری و رالسکو تعمیم داده شد. علی رغم برداشتهای اولیه، تعمیم قضیه حد مرکزی برای متغیرهای تصادفی مجموعه-مقدار تعمیم یافته (فازی) آسان نیست، زیرا فضای توابع نسبت به متر هاسدورف توسعه یافته جداییپذیر نیست. کلمنت اولین کسی بود که قضیه حد مرکزی را برای متغیرهای تصادفی مجموعه-مقدار تعمیم یافتهای که مقادیرشان نسبت به متر هاسدورف توسعه یافته پیوسته لیپ شیتز است، مطالعه کرد. چون در این حالت محدودیتها بسیار شدید بودند، افراد زیادی تلاش کردند تا قضیه حد مرکزی را بدون شرط لیپ شیتز اثبات کنند. اخیراً پوری و پرُسک [۲۷] موفق شدند قضیه حد مرکزی را با استفاده از فرآیند تجربی بدون شرط لیپ شیتز ثابت کنند. ملچانو [۲۸] هم از جمله کسانی است که روی قضایای حد مرکزی برای متغیرهای تصادفی مجموعه-مقدار کار

[۲۳] Lyashenko
[۲۴] Weil
[۲۵] Jain
[۲۶] Marcus
[۲۷] Prosk
[۲۸] Molchanov

کرده است.

این پایان‌نامه شامل چهار فصل می‌باشد. در فصل اول، در مورد ابرفضاهای یک فضای باناخ و انواع همگرایی در این ابرفضاها بحث می‌کنیم. همچنین در این فصل متغیرهای تصادفی مجموعه–مقدار را معرفی می‌کنیم. در فصل دوم، انتگرال اومان و خواص آن‌را عنوان می‌کنیم و مفهوم امید شرطی را بیان می‌نماییم. در فصل سوم، ابتدا مجموعه‌های فازی را معرفی کرده، سپس متغیرهای تصادفی مجموعه–مقدار فازی را تعریف می‌کنیم. در فصل چهارم، با معرفی متغیرهای تصادفی مجموعه–مقدار فازی گاوسی و بیان قضایای نشاندن، خود را برای اثبات قانون قوی اعداد بزرگ و قضیه حد مرکزی آماده می‌کنیم. در واقع، مطالب فصل‌های اول و همچنین بخش ۱.۴ مقدمه‌ای برای اثبات قضایای مذکور برای متغیرهای تصادفی مجموعه–مقدار فازی مستقل نسبت به متر هاسدورف توسعه یافته می‌باشند.

مقاله‌های زیر به‌عنوان مرجع اصلی برای نگارش این پایان‌نامه مورد استفاده قرار گرفته‌اند:

(۱) Shoumei Li, Yukio Ogura, “Strong laws of large numbers for independent fuzzy set-valued random variables”. *Fuzzy Sets and Systems*, **157**(2006), 2569-2578.

(۲) Shoumei Li, Yukio Ogura, Frank N. Proske, “Central limit theorems for generalized set-valued random variables”. *J. Math. Anal. Appl.*, **258**(2003), 250-263.

فصل ۱
فضای متغیرهای تصادفی مجموعه‌–مقدار

این فصل، با ارائه ابزارهای پایه و نتایج معروف در مورد ابرفضاها و متغیرهای تصادفی مجموعه–مقدار آغاز می‌شود. در ابتدا، به‌طور خلاصه متر هاسدورف در ابرفضاها و خواص اساسی آن‌را معرفی کرده و قضیه نشاندن را ثابت می‌کنیم. سپس برخی مفاهیم همگرایی، به‌ویژه همگرایی هاسدورف و همگرایی کوراتوفسکی–مسکو در ابرفضاها بیان می‌شوند. در ادامه، متغیرهای تصادفی مجموعه–مقدار را تعریف می‌کنیم و در مورد معادل بودن بعضی تعاریف و خواص آن‌ها بحث می‌نماییم. در پایان این فصل، مفهوم انتخاب‌های انتگرال‌پذیر و فضای متغیرهای تصادفی مجموعه–مقدار به‌طور انتگرال‌پذیر کراندار را که در فصل‌های بعد مورد نیاز است، معرفی می‌کنیم.

۱.۱ ابرفضای یک فضای باناخ

در این بخش، ابتدا ابرفضاهای یک فضای باناخ را معرفی می‌کنیم. سپس متر هاسدورف را تعریف کرده و با معرفی توابع تکیه‌گاه یک تعریف معادل برای آن ارائه می‌دهیم. در ادامه، قضیه هرماندر را بیان و اثبات می‌کنیم. سپس انواع همگرایی در ابرفضاها را تعریف کرده و در قالب چند قضیه شرایط مطلوب برای معادل بودن انواع همگرایی را بررسی می‌نماییم.

۱.۱.۱ متر هاسدورف در ابرفضاها و قضیه نشاندن

در این زیربخش، فضای همه زیرمجموعه‌های بسته یا فشرده یا محدب از یک فضای باناخ را که ابرفضا نامیده می‌شود، بررسی می‌کنیم. در همه جای این پژوهش، فرض کنید $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|_{\mathfrak{X}})$ یک فضای باناخ با فضای دوگان $\mathfrak{X}^*$ باشد. مبدا $\mathfrak{X}$ را با 0 نشان می‌دهیم و $\mathbb{R}$ مجموعه همه اعداد حقیقی است. گوی واحد باز در $\mathfrak{X}$ را با U مشخص می‌کنیم. همچنین نمادهای ویژه زیر را برای رده‌های معینی از زیرمجموعه‌های $\mathfrak{X}$ به‌کار می‌بریم.

$$\mathscr{P}_0(\mathfrak{X}) = \text{خانواده همه زیرمجموعه‌های ناتهی } \mathfrak{X},$$

$$\mathbf{K}(\mathfrak{X}) = \text{خانواده همه زیرمجموعه‌های ناتهی بسته } \mathfrak{X}.$$

پسوندهای b و k و c به‌ترتیب کراندار، فشرده و محدب را نشان می‌دهند. برای مثال $\mathbf{K}_{kc}(\mathfrak{X})$ خانواده همه زیرمجموعه‌های ناتهی بسته محدب فشرده از $\mathfrak{X}$ و $\mathbf{K}_b(\mathfrak{X})$ خانواده همه زیرمجموعه‌های ناتهی بسته کراندار از $\mathfrak{X}$ را نشان می‌دهد.

برای هر $A, B \in \mathscr{P}_0(\mathfrak{X})$ و $\lambda \in \mathbb{R}$، دو عضو زیر را در $\mathscr{P}_0(\mathfrak{X})$ تعریف می‌کنیم:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \tag{۱.۱.۱}$$

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}. \tag{۲.۱.۱}$$

تذکر ۱.۱.۱. ۱ . $\mathscr{P}_0(\mathfrak{X})$ همراه با جمع و ضرب بالا یک فضای خطی نیست، زیرا نمی‌توانیم برای مجموعه A وارون جمعی به‌دست آوریم.

۲ . حتی اگر A و B مجموعه‌های بسته کراندار باشند، $A + B$ مجموعه‌ای بسته نیست. برای مثال فرض کنید $\mathfrak{X}$ یک فضای باناخ جدایی‌پذیر حقیقی باشد و $\{e_n\}$ یک پایه مرکب از بردارهای

واحد و $\{r_n\}$ یک دنباله نزولی حقیقی همگرا به ۱ باشد. فرض کنید $A = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{-r_n e_n : n \in \mathbb{N}\}$، آن‌گاه A و B زیرمجموعه‌های بسته کراندار از $\mathfrak{X}$ هستند، اما

$$e_n - r_n e_n \in \{a + b : a \in A, b \in B\} = \{e_n - r_m e_m : n, m \in \mathbb{N}\},$$

و $\lim\limits_{n\to\infty} e_n - r_n e_n = \circ \notin \{a + b : a \in A, b \in B\}$. این یعنی $\{a + b : a \in A, b \in B\}$ بسته نیست. بستار $A + B$ را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم

$$A \oplus B = cl\,\{a + b : a \in A, b \in B\}, \tag{۳.۱.۱}$$

که منظور از نماد cl، عمل بستار در فضای $\mathfrak{X}$ است.

۳ . اگر $A, B \in \mathbf{K}_{kc}(\mathfrak{X})$، آن‌گاه $A + B \in \mathbf{K}_{kc}(\mathfrak{X})$.

برای هر $A \in \mathscr{P}_\circ(\mathfrak{X})$ و $x \in \mathfrak{X}$، فاصله بین x و A را به‌صورت $d(x, A) = \inf\limits_{y\in A} d(x, y)$ تعریف می‌کنیم که در آن $d(x, y) = \|x - y\|_{\mathfrak{X}}$.

فاصله هاسدورف روی $\mathscr{P}_\circ(\mathfrak{X})$ به‌شرح زیر تعریف می‌شود:

$$H(A, B) = \max\left\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)\right\}, \tag{۴.۱.۱}$$

به‌عبارت دیگر

$$H(A, B) = \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} \|a - b\|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} \|a - b\|\right\}.$$

به‌ویژه، داریم $\|A\|_K = H(A, \{\circ\}) = \sup\limits_{a\in A}\{\|a\|_{\mathfrak{X}} : a \in A\}$. توجه کنید اگر A و B زیرمجموعه‌های بی‌کران از $\mathfrak{X}$ باشند، آن‌گاه $H(A, B)$ ممکن است نامتناهی باشد.

قضیه ۲.۱.۱. $(\mathbf{K}_b(\mathfrak{X}), H)$ فضای متریک کامل است. به‌علاوه $\mathbf{K}_k(\mathfrak{X})$، $\mathbf{K}_{kc}(\mathfrak{X})$ و $\mathbf{K}_{bc}(\mathfrak{X})$ زیر مجموعه‌های بسته از $(\mathbf{K}_b(\mathfrak{X}), H)$ هستند.

اثبات. به بخش یک از فصل یک [۱۱] مراجعه شود. ■

قضیه ۳.۱.۱. اگر $\mathfrak{X}$ جدایی‌پذیر باشد، آن‌گاه فضای $(\mathbf{K}_k(\mathfrak{X}), H)$ نیز جدایی‌پذیر است.

اثبات. زیرمجموعه چگال شمارش‌پذیر D از $\mathfrak{X}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\mathcal{D}$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های متناهی D باشد. به‌وضوح $\mathcal{D}$ شماراست. برای هر $K \in \mathbf{K}_k(\mathfrak{X})$ و $\varepsilon > ۰$، $\varepsilon-$تور $N_\varepsilon = \{x_۱, x_۲, \dots, x_l\}$ برای K وجود دارد. از طرفی چون D در $\mathfrak{X}$ چگال است، می‌توانیم $K_\varepsilon := \{y_۱, y_۲, \dots, y_l\} \subseteq D$ را طوری بیابیم که برای هر $k = ۱, ۲, \dots, l$، $\|x_k - y_k\|_{\mathfrak{X}} < \varepsilon$. به‌وضوح $K_\varepsilon \in \mathcal{D}$. نشان می‌دهیم $H(K_\varepsilon, K) < ۲\varepsilon$. چون

$$d(y_k, K) \leq \| y_k - x_k \|_{\mathfrak{X}} + d(x_k, K) < ۲\varepsilon, \qquad k = ۱, ۲, \dots, l.$$

داریم $\max_{y \in K_\varepsilon} d(y, K) \leq ۲\varepsilon$، به‌عبارت دیگر برای هر $x \in K$

$$d(x, K_\varepsilon) \leq d(x, N_\varepsilon) + H(N_\varepsilon, K_\varepsilon) < ۲\varepsilon,$$

پس $\sup\limits_{x \in K} d(x, K_\varepsilon) \leq ۲\varepsilon$. بنابراین $\mathcal{D}$ در $(\mathbf{K}_k(\mathfrak{X}), H)$ چگال است. ■

در ادامه، قضیه نشاندن را اثبات خواهیم کرد. برای این منظور، دو لم زیر را ارائه می‌دهیم.

لم ۴.۱.۱. (فرمول آسکولی [۱]) فرض کنید $x^* \in \mathfrak{X}^*$ ، $x^* \neq ۰^*$ و نماد $\langle x^*, x\rangle$ نشان دهنده مقدار تابعک x^* در نقطه x باشد. همچنین فرض کنید $H_\alpha = x^{*-۱}(\alpha) := \{x \in \mathfrak{X} : \langle x^*, x\rangle = \alpha\}$. آن‌گاه داریم

$$d(x_۰, H_\alpha) = \frac{| \langle x^*, x_۰\rangle - \alpha |}{\| x^* \|_{\mathfrak{X}^*}}, \qquad x_۰ \in \mathfrak{X}. \tag{۵.۱.۱}$$

اثبات. ابتدا فرض کنید $x_۰ = ۰$. اگر $\alpha = ۰$، آن‌گاه (۵.۱.۱) برقرار است. فرض کنید $\alpha \neq ۰$.

برای هر $x \neq ۰$ باتوجه به این‌که $(\alpha/\langle x^*, x\rangle)x \in H_\alpha$، داریم

$$\begin{aligned} \| x^* \|_{\mathfrak{X}^*} &= \sup_{x \neq ۰} \frac{| \langle x^*, x\rangle |}{\| x \|_{\mathfrak{X}}} = \sup_{x \neq ۰} \frac{| \langle x^*, (\alpha/\langle x^*, x\rangle)x\rangle |}{\| (\alpha/\langle x^*, x\rangle)x \|_{\mathfrak{X}}} \\ &= \sup_{x \in H_\alpha} \frac{| \langle x^*, x\rangle |}{\| x \|_{\mathfrak{X}}} = \frac{|\alpha|}{\inf\limits_{x \in H_\alpha} \| x \|_{\mathfrak{X}}} = \frac{|\alpha|}{d(۰, H_\alpha)} \end{aligned}$$

[۱] Ascoli's Formula

که برای $x_\circ = \circ$، (۵.۱.۱) را اثبات می‌کند. برای حالت کلی $x_\circ \in \mathfrak{X}$، کافی است نشان دهیم که $x_\circ - H_\alpha = x^{*-1}(\langle x^*, x_\circ\rangle - \alpha)$. روشن است که رابطه شمول $x_\circ - H_\alpha \subseteq x^{*-1}(\langle x^*, x_\circ\rangle - \alpha)$ برقرار است. حال بگیرید $x \in x^{*-1}(\langle x^*, x_\circ\rangle - \alpha)$. آن‌گاه $x = x_\circ - (x_\circ - x)$ و $x_\circ - x \in x^{*-1}(\alpha)$، بنابراین شمول در جهت عکس هم نتیجه می‌شود. حال از بخش قبلی اثبات داریم

$$d(x_\circ, H_\alpha) = d(\circ, x_\circ - H_\alpha) = \frac{|\langle x^*, x_\circ\rangle - \alpha|}{\| x^* \|_{\mathfrak{X}^*}}.$$

و این اثبات را کامل می‌کند. ■

فرض کنید $S^* = \{x^* \in \mathfrak{X}^* : \| x^* \|_{\mathfrak{X}^*} = ۱\}$ کره واحد در فضای دوگان، $intA$ مجموعه همه نقاط درونی $A \subseteq \mathfrak{X}$ و $\overline{U} = \{x \in \mathfrak{X} : \| x \|_{\mathfrak{X}} \leq ۱\}$ گوی واحد بسته در فضای $\mathfrak{X}$ باشد.

لم ۵.۱.۱. فرض کنید $A \in \mathbf{K}_c(\mathfrak{X})$ و $\alpha = d(\circ, A) > \circ$. آن‌گاه $x^* \in S^*$ وجود دارد به‌طوری‌که ابرصفحه $x^{*-1}(\alpha)$، A و $\alpha\overline{U}$ را از هم جدا می‌کند. به‌ویژه

$$\alpha \leq \inf_{a \in A} \langle x^*, a\rangle. \qquad (۶.۱.۱)$$

اثبات. باتوجه به این‌که $A \cap int(\alpha\overline{U}) = \emptyset$ و $int(\alpha\overline{U}) \neq \emptyset$، $x^* \in S^*$ و $\beta \in \mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری‌که ابرصفحه $x^{*-1}(\beta)$، A و $\alpha\overline{U}$ را از هم جدا می‌کند، یعنی

$$\sup_{x \in \alpha\overline{U}} \langle x^*, x\rangle \leq \beta \leq \inf_{a \in A} \langle x^*, a\rangle. \qquad (۷.۱.۱)$$

باید نشان دهیم که

$$\sup_{x \in \alpha\overline{U}} \langle x^*, x\rangle = \alpha. \qquad (۸.۱.۱)$$

در واقع، با توجه به این‌که

$$۱ = \| x^* \|_{\mathfrak{X}^*} = \sup_{x \neq \circ} \frac{|\langle x^*, x\rangle|}{\| x \|_{\mathfrak{X}}} = \sup_{\|x\|_{\mathfrak{X}} = \alpha} \frac{|\langle x^*, x\rangle|}{\alpha} = \frac{۱}{\alpha} \sup_{\|x\|_{\mathfrak{X}} = \alpha} |\langle x^*, x\rangle| .$$

از (۷.۱.۱) و (۸.۱.۱) رابطه (۶.۱.۱) و $\alpha \leqslant \beta$ را به‌دست می‌آوریم. از طرف دیگر، باتوجه به لم ۴.۱.۱،

$$d(\circ, x^{*-1}(\beta)) = \frac{|\langle x^*, \circ\rangle - \beta|}{\| x^* \|_{\mathfrak{X}^*}} = \beta.$$

چون $d(\circ, A) \geq d(\circ, x^{*-1}(\beta))$ به‌دست می‌آوریم $\alpha \geqslant \beta$. بنابراین داریم $\alpha = \beta$ و ابرصفحه $x^{*-1}(\beta)$، A و $\alpha\overline{U}$ را از هم جدا می‌کند. ■

تذکر ۶.۱.۱. در واقع، (۶.۱.۱) قوی شده‌ی رابطه زیر است:

$$\alpha = \inf_{a\in A}\langle x^*, a\rangle. \qquad (۹.۱.۱)$$

باتوجه به نامساوی $\langle x^*, a\rangle \leq \| x^* \|_{\mathfrak{X}^*} \| a \|_{\mathfrak{X}} = \| a \|_{\mathfrak{X}}$،

$$\inf_{a\in A}\langle x^*, a\rangle \leq \inf_{a\in A} \| a \|_{\mathfrak{X}} = d(\circ, A) = \alpha,$$

پس (۹.۱.۱) از (۶.۱.۱) نتیجه می‌شود.

برای هر $A \in \mathbf{K}(\mathfrak{X})$، تابع تکیه‌گاه را به‌صورت

$$s(x^*, A) = \sup_{a\in A}\langle x^*, a\rangle, \qquad x^* \in \mathfrak{X}^*.$$

تعریف می‌کنیم. توجه کنید که

$$s(x^*, A \oplus B) = s(x^*, A + B) = \sup_{a\in A, b\in B}\langle x^*, a + b\rangle = s(x^*, A) + s(x^*, B),$$

$$s(x^*, \lambda A) = \lambda\, s(x^*, A), \qquad \forall\lambda \geqslant \circ.$$

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای برداری توپولوژیک و حقیقی E باشد. اشتراک همه مجموعه‌های محدب شامل A را غلاف محدب A گوییم و آن‌را با coA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر

$$coA = \left\{\sum_{i=۱}^{n}\lambda_i u_i : \sum_{i=۱}^{n}\lambda_i = ۱,\ \circ \leqslant \lambda_i \leqslant ۱,\ u_i \in A\right\}.$$

یادآور می‌شویم که غلاف محدب بسته A برابر است با اشتراک همه زیرمجموعه‌های محدب و بسته از E شامل A که آن‌را با $\overline{co}A$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۸.۱.۱. عنصر x به $\overline{co}A$ تعلق دارد اگر و تنها اگر

$$\langle x^*, x\rangle \leqslant s(x^*, A), \qquad \forall x^* \in \mathfrak{X}^*. \tag{۱۰.۱.۱}$$

اثبات. برای هر $x \in \overline{co}A$، دنباله‌های x_n و y_n در A و μ_n در $[۰,۱]$ وجود دارند به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty}(\mu_n x_n + (۱-\mu_n)y_n) = x$. توجه کنید که برای هر n

$$\langle x^*,\, \mu_n x_n + (۱-\mu_n)y_n\rangle \leq s(x^*, A),$$

پس (۱۰.۱.۱) به‌دست می‌آید. حال برای نشان دادن عکس این مطلب، بگیرید $x \in (\overline{co}A)^c$ و فرض کنید (۱۰.۱.۱) برقرار باشد. چون $(\overline{co}A)^c$ یک مجموعه باز است، می‌توانیم گوی بسته $\overline{U}(x,\varepsilon) = \{y \in \mathfrak{X} : \| x-y \|_{\mathfrak{X}} \leq \varepsilon\}$ را طوری بگیریم که $\overline{U}(x,\varepsilon) \cap \overline{co}A = \emptyset$. $x^* \in \mathfrak{X}^*$ و $\beta \in \mathbb{R}$ وجود دارند به‌طوری‌که ابرصفحه $x^{*-۱}(\beta)$، $\overline{U}(x,\varepsilon)$ و $\overline{co}A$ را از هم جدا می‌کند. در صورت لزوم با گرفتن $-x^*$ به‌جای x^*، داریم

$$\sup_{a\in A}\langle x^*, a\rangle \leq \sup_{a\in \overline{co}A}\langle x^*, a\rangle \leq \beta \leq \langle x^*, x\rangle - \varepsilon,$$

که نتیجه می‌دهد $s(x^*, A) < \langle x^*, x\rangle$ و این با (۱۰.۱.۱) در تناقض است، پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است. ■

قضیه ۹.۱.۱. برای هر $A, B \in \mathbf{K}_{bc}(\mathfrak{X})$،

$$\sup_{a\in A} d(a, B) = \sup\left\{s(x^*, A) - s(x^*, B) : x^* \in S^*\right\}.$$

اثبات. مرحله اول: ابتدا نشان می‌دهیم

$$\sup_{a\in A} d(a, B) \leq \sup\left\{s(x^*, A) - s(x^*, B) : x^* \in S^*\right\}. \tag{۱۱.۱.۱}$$

$a \in A$ را دلخواه بگیرید. آن‌گاه باتوجه به لم ۵.۱.۱، $x^* \in S^*$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$d(a, B) = d(\circ, a - B) \leq \inf_{x \in a - B} \langle x^*, x \rangle.$$

طرف راست در بالا برابر است با $\langle x^*, a \rangle - \sup_{b \in B} \langle x^*, b \rangle \leq s(x^*, A) - s(x^*, B)$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} d(a, B) &\leq s(x^*, A) - s(x^*, B) \\ &\leq \sup \{ s(x^*, A) - s(x^*, B) : x^* \in S^* \}, \end{aligned}$$

و (۱۱.۱.۱) نتیجه می‌شود.

مرحله دوم: درادامه، نشان خواهیم داد

$$\sup \{ s(x^*, A) - s(x^*, B) : x^* \in S^* \} \leq \sup_{a \in A} d(a, B).$$

بگیرید $x^* \in S^*$ و فرض کنید $\beta = s(x^*, B)$ و $\alpha = s(x^*, A) - \beta$. نشان خواهیم داد

$$\alpha \leq \sup_{a \in A} d(a, B).$$

اگر $\alpha \leq \circ$ حکم به روشنی برقرار است، پس فرض می‌کنیم $\alpha > \circ$. برای هر $\circ < \varepsilon < \alpha$، $a \in A$ وجود دارد به‌طوری‌که $\circ < \alpha - \varepsilon < \langle x^*, a \rangle - \beta$. بنابراین ابرصفحه $x^{*-1}(\beta)$، a و B را از هم جدا می‌کند به‌طوری‌که $d(a, x^{*-1}(\beta)) < d(a, B)$. باتوجه به لم ۴.۱.۱،

$$d(a, x^{*-1}(\beta)) = \frac{| \langle x^*, a \rangle - \beta |}{\| x^* \|_{\mathfrak{X}^*}} = \langle x^*, a \rangle - \beta.$$

بنابراین $\alpha - \varepsilon < \langle x^*, a \rangle - \beta < d(a, B) \leq \sup_{a \in A} d(a, B)$. چون $\circ < \varepsilon < \alpha$ دلخواه است، به‌دست می‌آوریم $\alpha \leq \sup_{a \in A} d(a, B)$. ■

نتیجه ۱۰.۱.۱. برای هر $A, B \in \mathbf{K}_{bc}(\mathfrak{X})$،

$$\begin{aligned} H(A, B) &= \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\} \\ &= \sup \{ | s(x^*, A) - s(x^*, B) | : x^* \in S^* \}. \end{aligned}$$

اثبات. حکم از قضیه ۹.۱.۱ و با استفاده از فرمول کلی نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\sup\{|f(x)|: x\in E\} &= \sup\{\max\{f(x),-f(x)\}: x\in E\}\\ &= \max\{\sup\{f(x): x\in E\}, \sup\{-f(x): x\in E\}\},\end{aligned}$$

که f هر تابع روی مجموعه E است. ■

از نتیجه ۱۰.۱.۱ می‌توانیم برای هر $A,B,C,D\in \mathbf{K}_{bc}(\mathfrak{X})$ رابطه (۱۲.۱.۱) را به‌دست آوریم که برای حالت کلی $A,B,C,D\in \mathscr{P}_\circ(\mathfrak{X})$ هم برقرار است.

لم ۱۱.۱.۱. برای هر $A,B,C,D\in \mathscr{P}_\circ(\mathfrak{X})$، داریم

$$H(A\oplus B, C\oplus D) = H(A+B, C+D) \le H(A,C)+H(B,D). \qquad (۱۲.۱.۱)$$

اثبات. نقاط a، b، c و d را به ترتیب از مجموعه‌های A، B، C و D انتخاب می‌کنیم، داریم

$$\|(a+b)-(c+d)\|_{\mathfrak{X}} \le \|a-c\|_{\mathfrak{X}} + \|b-d\|_{\mathfrak{X}}.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}d(a+b, C+D) &\le d(a,C)+d(b,D)\\ &\le H(A,C)+H(B,D).\end{aligned}$$

به‌طور مشابه، داریم

$$\begin{aligned}d(c+d, A+B) &\le d(c,A)+d(d,B)\\ &\le H(A,C)+H(B,D).\end{aligned}$$

از دو فرمول اخیر به (۱۲.۱.۱) می‌رسیم. ■