دانشگاه اراک
دانشکده علوم پایه

**پایان‌نامه**

**برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته**
**ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی**

**عنوان**

# روش های تفاضل متناهی صریح و ضمنی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری

استاد راهنما

**دکتر بهنام سپهریان**

استاد مشاور

**دکتر علیمحمد نظری**

پژوهشگر

**مهناز احمدی**

شهریور ۱۳۹۳

نام خانوادگی دانشجو: احمدی نام: مهناز

---

عنوان: روش های تفاضل متناهی صریح و ضمنی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری

---

استاد راهنما: دکتر بهنام سپهریان

استاد مشاور: دکتر علیمحمد نظری

---

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

---

دانشگاه: اراک دانشگاه اراک

تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ۱۳۹۳ تعداد صفحات: ۹۶

---

واژگان کلیدی: روش تفاضل متناهی صریح، روش تفاضل متناهی ضمنی، مشتق کسری، روش تفاضل متناهی فشرده

---

**چکیده**

در این پایان‌نامه با روش های تفاضل متناهی فشرده و انتگرال و مشتق کسری یک تابع آشنا می‌شویم. در ادامه به حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری با روش های تفاضل متناهی فشرده می پردازیم. این معادلات شامل مشتق کسری ریمان ـ لیوویل است.

پروردگارا، هیچ پروانه ای به نازک دلی تو نیست
رحمت تو سپیده دم است و زیبایی تو نیایش آفرین
در این غریبستان مرا به خود وامگذار...

دستانم را به سمت آسمان تو بلند می کنم
میخواهم بدانی دستانم خالیست
از تو می خواهم؛
آنقدر به من ایمان عطا کنی تا در هر آنچه بر سر راهم قرار می دهی تو را ببینم و خواستت را
دوستت دارم
تنهایم نگذار....
آمین!

تقدیم به دو وجود مقدس:

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...

موهایشان سپید شد تا ما روسفید شویم...

**پدرانمان!**

**مادرانمان!**

مهناز احمدی

شهریور ۹۳

## سپاس گزاری...

آنان که آفتاب را به زندگی دیگران ارزانی می دارند، نمی توانند خود از آن بی بهره باشند.

آمدنم را در وادی آگاهی دستی نیرومند ما یتگر شد هم آمدنم را، هم برخاستنم را و هم رفتنم را، هم او که در لحظه لحظه هایم جا دارد، سپاس بی منتها به درگاه حق، که قطره ای از اقیانوس بیکران خود را بر من عنایت فرمود تا پیوسته مشتاق بهره گیری از قطره دیگر باشم. از تو مدد می گیرم تا سپاسم را بر تمامی آنانی که گامهای استوارشان و دستان پر لطفشان تکیه گاه خستگی راهم بودند، پیشکش کنم.

در این جا بر خود واجب می دانم به عنوان شاگردی کوچک، از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر بهنام سپهریان به عنوان استاد علم و اخلاق، که

همواره در تمام راه با صبر و متانت مرا در انجام این رساله یاری کردند تشکر و قدردانی کنم. هم چنین از جناب آقای دکتر علی محمد نظری که زحمت مشاوره ی این پایان نامه را بر عهده گرفتند کمال امتنان را دارم.

والاترین سپاس را به پدر و مادر و خواهران و برادران عزیزم تقدیم می کنم که همواره با حمایت ها و محبت های بیکران خود مرا پشتیبانی گرم بودند. هم چنین از دوستان خوبم و همه عزیزانی که در این مدت با حضور گرمشان همراهی ام کرده اند متشکرم.

# چکیده

در این پایان‌نامه با روش های تفاضل متناهی فشرده و انتگرال و مشتق کسری آشنا می‌شویم . ابتدامعادله‌ی دیفرانسیل کابلی کسری را با یک روش تفاضل متناهی صریح حل می‌کنیم و سپس به حل یک معادله‌ی کابلی کسری با استفاده از چهار روش تفاضل متناهی فشرده‌ی پرداخته‌ایم. در نهایت با توجه به نتایج به دست آمده روشIICFDS در بین روش های دیگر از دقت بالاتری برخوردار است.

# واژگان کلیدی

روش تفاضل متناهی فشرده ، مشتق کسری ، روش تفاضل متناهی صریح ،روش تفاضل متناهی ضمنی.

# پیشگفتار

مشتق و انتگرال کسری برای مدل سازی برخی پدیده ها در علوم مختلفی از جمله فیزیک ، شیمی و مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند. از آنجا که جواب تحلیلی بیشتر معادلات دیفرانسیل کسری را نمی‌توان به آسانی به دست آورد حل عددی این معادلات از اهمیت بالایی برخوردار است.

در این پایان‌نامه یک روش تفاضلی صریح را برای حل معادلات دیفرانسیل کابلی کسری با استفاده از تقریب‌های مرکزی و پیشرو معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این روش به ترتیب دارای مرتبه دقت ۲ و ۱ نسبت به فضا و زمان بوده و پایداراست .

به طور کلی این پایان‌نامه از ۴ فصل تشکیل شده است.

در فصل اول به آشنایی با مفهوم مشتق و انتگرال کسری و روش‌های تفاضل متناهی فشرده و تعاریفی از معادله‌ی کابلی می‌پردازیم. همچنین مطالب مقدماتی که در فصل های بعد به آن نیاز داریم آمده است.

فصل دوم به معرفی و تشریح یک روش تفاضل متناهی صریح برای حل معادله‌ی کابلی کسری *می پردازیم* و نشان می‌دهیم روش ارائه شده پایدار و دارای مرتبه‌ی همگرایی ۲و۱ نسبت به متغیرهای فضا و مکان است.

در فصل سوم یک روش تفاضل متناهی فشرده‌ی ضمنی ( INM ) را ارائه می‌دهیم که در نرم $L_2,$ پایدار نامشروط و دارای مرتبه‌ی همگرایی $O(\tau + h^2)$ است. سپس روش را بهبود می‌دهیم و به روشی با مرتبه‌ی همگرایی $O(\tau^2 + h^2)$ دست می‌یابیم.

در فصل چهارم یک روش تفاضل متناهی فشرده‌ی ضمنی( ICFDS ) را ارائه می‌دهیم که در نرم $L_\infty$ پایدار نامشروط و دارای مرتبه‌ی همگرایی $O(\tau + h^4)$ است. سپس روش را بهبود می‌دهیم و به روشی با مرتبه‌ی همگرایی $O(\tau^2 + h^4)$ دست می‌یابیم . شایان ذکر است که تمام محاسبات و نمودارهای رسم شده در انتهای هر فصل با نرم افزار Maple ۱۳ انجام شده است.

# فهرست مطالب

# فصل ۱
# تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

در این فصل ابتدا به یادآوری لم‌ها و تعاریفی که در این پایان‌نامه به آن نیازمندیم می‌پردازیم. سپس با مفاهیم روش‌های تفاضل متناهی فشرده و حساب کسری آشنا می‌شویم.

## ۱.۱ یادآوری

**تعریف ۱.۱.۱.** مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته روی $R$ را با $C(R)$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۲.۱.۱.** فضای تمام توابع روی$R$ که مشتقات جزئی آنها تا مرتبه $K$ ( $K \in N$ ) وجود دارد و پیوسته است را با $C^k(R)$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۳.۱.۱.** فرض کنید $I \subseteq R$ تابع $f : I \to R$ مطلقا پیوسته است ، هر گاه به ازای هر$0 < \epsilon$ عددی مانند $0 < \delta$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر زیر دنباله از زیر بازه‌های باز جدا از هم مانند $\{(a_n, b_n)\}_{n\geq 1}$ که $\delta > \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ داشته باشیم $\epsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \mid f(b_n) - f(a_n) \mid$ .

**تعریف ۴.۱.۱.** فرض کنید $-\infty < a < b < \infty$ و $[a,b]$ یک بازه کراندار باشد. آن‌گاه فضای توابع مطلقاً پیوسته را با $AC[a,b]$ نشان می‌دهیم و برای $n \in N$ فضای توابع مختلط $f$ را که مشتق آنها تا مرتبه $n-1$ روی $[a,b]$ پیوسته است و $f^{n-1} \in AC[a,b]$ با $AC^n[a,b]$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۵.۱.۱.** $f \in C(R)$ را در بی نهایت صفر گوییم هر گاه برای هر $\epsilon > 0$ مجموعه‌ی $\{x : |f(x)| \geqslant \epsilon\}$ فشرده باشد و $C_\circ(R)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$C_\circ(R) = \{f \in C(R) | \text{f در بینهایت صفر باشد} \}.$$

**تعریف ۶.۱.۱.** $\sum x_n$ مطلقاً همگراست هر گاه $\sum |x_n| < +\infty$ .

**تعریف ۷.۱.۱.** $\{f_n\}_{n\geq 1}$ بر $R$ به طور یکنواخت به $f$ همگرا است هر گاه

$$\forall \varepsilon > \circ \quad \exists M \in N : \quad n \geq M \Rightarrow \forall x \in R, |\ f(x) - f_n(x)\ | < \varepsilon.$$

همچنین $\sum f_n(x)$ بر $R$ به طور یکنواخت همگرا است هر گاه دنباله $s_n$ از مجموع‌های جزئی سری که با $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ تعریف می‌شود بر $R$ به طور یکنواخت همگرا باشد.

**تعریف ۸.۱.۱.** تابع $f$ را روی$R$ انتگرال‌پذیر گوییم هر گاه $\int_{-\infty}^{+\infty} |f|dx < \infty$ .

**تعریف ۹.۱.۱.** مجموعه تمام توابع انتگرال پذیر روی $R$ را با $L^1(R)$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۱۰.۱.۱.** تابع مختلط $f$ را درنقطه‌ی $zo$ تحلیلی گوییم ، هر گاه گوی باز به مرکز $z_\circ$ یافت شود که $f$ بر آن مشتق پذیر باشد.

**تعریف ۱۱.۱.۱.** فرض کنید $f$ تابعی انتگرال پذیر باشد. آن گاه تبدیل فوریه‌ی $f(t)$ وجود دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(\mathcal{F}f)(k)=\mathcal{F}[f(t)](k)=\hat{f}(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikt}f(t)dt, \quad (k\in R),$$

و تبدیل فوریه‌ی معکوس $f(t)$ چنین تعریف می‌شود

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(k)=\mathcal{F}^{-1}[f(t)](k)=\frac{1}{2\pi}\hat{f}(-k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ikt}f(t)dt, \quad (k\in R).$$

**تعریف ۱۲.۱.۱.** یک مسئله را خوش وضع گوییم هر گاه

۱.مسئله جواب داشته باشد.

۲.جواب مسئله یکتا باشد.

۳.جواب مسئله به طور پیوسته به داده ها و پارامترها وابسته باشد. یعنی کوچکترین تغییر در توابع اولیه و مرزی و مقدار پارامترها موجب تغییر کوچکی در جواب شود.

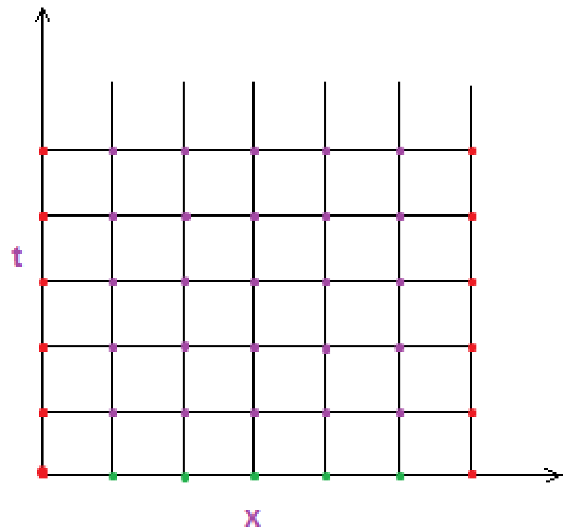
**نکته ۱۳.۱.۱.** *اگر* $f\in C^{n+1}$ *و برای* $|\alpha|\leqslant n+1$ *داشته باشیم* $\partial^\alpha f\in L^1\bigcap C_\circ$ *آنگاه برای برخی ثابت* $C>0$ *و* $|\hat{f}(\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^{-n-1}$، $\hat{f}\in L^{-1}(R)$ [۱] .

## ۲.۱ روش های تفاضل متناهی فشرده

روشهای تفاضل متناهی از سال ۱۹۲۸ تاکنون برای به دست آوردن جواب های تقریبی معادلات دیفرانسیل معمولی $(ODE)$ [۱] و یا جزئی $(PDE)$ [۲] مورد استفاده قرار می‌گیرند.

[۱] Ordinary Differential Equations
[۲] Partial Differential Equation

نحوه اعمال روشهای تفاضل متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل بدین صورت می‌باشد که ابتدا با گسسته سازی دامنه یک ساختار شبکه ای منظم به دست می‌آوریم. سپس مشتقات موجود در معادله‌ی دیفرانسیل را با استفاده از معادله های تفاضلی تقریب می‌زنیم. در هر نقطه از شبکه با مقدار تابع یا مقدار مجهول سروکار داریم. لذا تقریب معادله‌ی دیفرانسیل در نهایت به یک دستگاه معادلات خطی یا غیر خطی تبدیل می‌شود که می‌توان آن را با یک الگوریتم مناسب حل کرد.
ساختار شبکه به صورت گسسته سازی دامنه $x$ و $t$ است همانطورکه مشاهده می‌کنید نقاط قرمز رنگ و نقاط سبز رنگ به ترتیب از شرایط مرزی وشرایط اولیه به دست می‌آیند و معلوم هستند،نقاط بنفش که مجهول هستند از طریق این مقادیر معلوم به دست می‌آیند.




شکل ۱.۱: چگونگی شبکه بندی

یکی از ساده ترین روش های تفاضل متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی استفاده از تقریب مرکزی برای مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم موجود در معادله است که خطایی از مرتبه $O(h^2)$ دارد که $h$ طول گام نقاط است.
روشهایی که مرتبه دقت آن ها بیشتر از $O(h^2)$ باشد را روش‌های مرتبه بالا می نامیم. یکی از روش‌هایی که می‌توان بااستفاده از آن فرمول تفاضل متناهی بادقت بالا به دست آورد استفاده ازطول گام کوچکترمی‌باشد

،اما این امر باعث افزایش زمان انجام محاسبات می‌شود.
برای به دست آوردن فرمول تفاضل متناهی مرتبه‌ی بالا با طول گام ثابت می توان از نقاط بیشتر برای تقریب مشتقات موجود در معادله استفاده کرد که باعث افزایش پهنای باند ماتریس ضرایب می‌شود و همچنین در نقاط مرزی دچار مشکل می‌شویم.
با استفاده از روش های فشرده می‌توان مرتبه‌ی دقت جواب ها را افزایش داد بدون اینکه پهنای باند ماتریس ضرایب افزایش پیدا کند. از آن جا که ماتریس ضرایب دستگاه حاصل ( در حالت یک بعدی ) با استفاده از روش های فشرده ، سه قطری است بنابرین حل دستگاه ساده تر و به زمان کمتری نیاز دارد. روش فشرده ، برای طول گام ثابت ،از هر روش تفاضل متناهی دیگر خطای کمتری دارد. این روش ها اشکالاتی هم دارند از جمله اینکه معادله‌ی دیفرانسیل مورد نظر باید برای تشکیل روش فشرده مشتق پذیر باشد. این روش ها به یک ساختار شبکه ای نیازمندندو همچنین برای هرمسئله باید فرمول تفاضل متناهی جدیدی به دست آورد.

## ۳.۱ معادله‌ی کابلی

در اینجا به توضیح مختصری درباره‌ی علت نام گذاری معادله های کابلی می‌پردازیم.
در علوم اعصاب ، نورون ها یکی از مهمترین سلول های عصبی بدن به شمار می آیند . در واقع آن ها در ساختمان اصلی و مرکزی سیستم عصبی بدن از مسئولیت مهمی برخور دارند مانند کنترل مغز ، قدرت درک و حافظه‌ی بدن و نحوه‌ی این ارتباط توسط نورون ها صورت می‌گیرد. این سلول ها به صورت منفرد عمل می‌کنند.
از طرفی نورون ها شامل سه قسمت هستند

۱: دندریت‌ها

۲: سلول سوما

۳: سلول اکسون

در اینجا دندریت ها که مسئولیت پخش انرژی را در بدن بر عهده دارند نحوه‌ی رفتارشان مانند انتقال برق

در کابل ها است .

دانشمندی به نام ویلیام تامسون نحوه‌ی رفتار دندریت ها ، کابل های تلگرافی و کابل های برق را براساس معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مدل سازی کرد و به توصیف سیستم عصبی بدن و انتقال حرارت در کابل ها پرداخت. به این معادله های دیفرانسیل معادلات کابلی گفته می‌شود زیرا این معادلات بر اساس رفتار کابل های برق مدل سازی شده اند.

## ۴.۱ حساب کسری

در این بخش ابتدا تاریخچه‌ی حساب کسری را بیان می‌کنیم و با نحوه‌ی به وجود آمدن حساب کسری آشنا می‌شویم [۲] .

### ۱.۴.۱ تاریخچه

حساب کسری تقریباً قدمتی برابر با حساب صحیح دارد در واقع اسم حساب کسری یک نام غلط است. ابتدا ریاضیدان ها مشتق و انتگرال را تنها به مرتبه‌ی کسری بسط دادند و آن را حساب کسری نامیدند.وقتی مشتق و انتگرال به مرتبه‌ی دلخواه تعمیم داده شد این اسم باقی ماندکه تا حدودی گمراه کننده است. بیشتر ریاضیدان ها با مشتق مرتبه $n$ ام $(\dfrac{d^n y}{dx^n})$ لیب نیتز [۳] آشناهستند( $n$ عدد صحیح است)و مشتق کسری یعنی $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ وقتی $n$ یک کسراست.

در ۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵ ال هوپیتال [۴] یک سوال برای لیب نیتز نوشت ، پرسید اگر $n = \dfrac{1}{2}$ ، $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ چگونه تعریف می شود و با این سوال مطالعه در حساب کسری متولد شد. در پی سال ها در توسعه حساب کسری پیشرفت های کمی به دست آمد. در سال ۱۸۱۹ ، لکرویکس [۵] با $y = x^m$ که $m$ یک عدد صحیح است شروع کرد و مشتق مرتبه‌ی $n$ ام آن رابه صورت زیر به دست آورد

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n,$$

[۳] Leibnz
[۴] L'Hopital
[۵] Lacroix

یا به عبارتی دیگر

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n},\quad m\geq n,$$

که $\Gamma(.)$ تابع گاما است

$$\Gamma(\nu)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\nu-1}dx,\quad \nu\ >0. \tag{۱.۱}$$

سپس برای $y=x$ و $n=\frac{1}{2}$ جواب صریحی به صورت زیر ارائه کرد

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

مشکل روش لکرویکس این بود که برای خیلی از توابع قابل استفاده نبود.بیشترین پیشرفت درحساب کسری در سال ۱۸۳۲ وقتی لیوویل [۶] با اشتیاق شروع به مطالعه‌ی حساب کسری کرد، به دست آمد. او با نتایج شناخته شده در مورد مشتق از مرتبه‌ی صحیح تابع $e^{ax}$ شروع کرد.

$$D^m e^{ax}=a^m e^{ax},$$

ومشتق از مرتبه‌ی دلخواه تابع $e^{ax}$ را به صورت

$$D^\nu e^{ax}=a^\nu e^{ax}, \tag{۲.۱}$$

بیان کرد. سپس مشتق از مرتبه‌ی دلخواه را برای هر تابع $f(x)$ که بتوان آن را به صورت یک سری به شکل

$$f(x)=\sum_{n=0}^\infty c_n e^{a_n x},\quad Re(a_n)\ >0, \tag{۳.۱}$$

بسط داد ، به صورت زیر تعریف کرد

$$D^\nu f(x)=\textstyle\sum_{n=0}^\infty c_n a_n^\nu e^{a_n x},$$

که این فرمول به عنوان اولین فرمول لیوویل برای مشتق کسری شناخته شد.اگر چه این نمایش از مشتق برای مرتبه‌ی دلخواه است اما تنها برای توابعی مفید است که بتوان آن ها را به شکل (۳.۱) نوشت.

به علت محدودیت این تعریف لیوویل تلاش خود را برای تعریف دوم شروع کرد. او ابتدا یک انتگرال به صورت زیر تعریف کرد که بسیار نزدیک به تعریف تابع گاما در (۱.۱)است .

$$I=\int_0^\infty u^{a-1}e^{-xu}du,\quad a\ >0,\quad x\ >0, \tag{۴.۱}$$

[۶] Liouvill

وبا تغییر متغیر $xu = t$ رابطه ی زیر را به دست آورد

$$I = x^{-a} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt = x^{-a}\Gamma(a).$$

رابطه‌ی بالا معادل است با

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} I.$$

با توجه به تعریف انتگرال $I$ در(۴.۱) و مشتق مرتبه‌ی $\nu$ در (۲.۱) لیوویل با گرفتن $D^\nu$ از هر دو طرف معادله‌ی بالا فرمول زیر را به دست آورد

$$D^\nu x^{-a} = \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a+\nu-1} e^{-xu} du. \tag{۵.۱}$$

از طرفی دوباره با کمک تغییر متغیر $xu = t$ انتگرال موجود در رابطه‌ی بالا را به شکل زیر نوشت

$$\int_0^\infty u^{a+\nu-1} e^{-xu} du = x^{-(a+\nu)} \Gamma(a+\nu). \tag{۶.۱}$$

سرانجام او با استفاده از روابط (۵.۱) و(۶.۱) دومین تعریف مشتق کسری خود را به صورت

$$D^\nu x^{-a} = \frac{(-1)^\nu \Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)} x^{-a-\nu}, \quad a > 0,$$

ارائه کرد که باز هم این تعریف محدود به توابعی به شکل $f(x) = x^{-a}$ بود. به احتمال زیاد مفیدترین پیشرفت در توسعه‌ی حساب کسری از مقاله های برنارد ریمان [۷] که درسال ۱۸۹۲ منتشر شدند،به دست آمد. ریمان با تعمیم سری تیلور فرمول زیر را برای مشتق از مرتبه‌ی دلخواه به دست آورد

$$D^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt + \psi(x).$$

به علت ابهام در حد پایین انتگرال $c$ ریمان به تعریفش تابع متمم $\psi$ را اضافه کرد. امروزه تعریف مشتق کسری ریمان را بدون تابع دردسر دهنده‌ی $\psi$ به کار می برند.

در سال(۱۸۶۸-۱۸۶۷)گرانوالد [۸] و لتنیکف [۹] برای تعریف مشتق کسری از تفاضل متناهی استفاده کردند و وقتی ویژگی های مشتق کسری تفسیر شد، اثبات شدکه این تعریف با تعریف مشتق کسری ریمان ـ لیوویل

[۷] Bernard Riemman
[۸] Grundwald
[۹] Letnikov

هم ارز است.

درسال ۱۹۶۷ کاپاتو[۱۰] یک نوع دیگری از مشتق کسری را مشابه با نوع ریمان ـ لیوویل تعریف کرد. در بخش بعدی به تعریف انواع مشتق و انتگرال کسری می‌پردازیم .

### ۲.۴.۱ تعریف مشتق و انتگرال کسری

۱ )مشتق و انتگرال کسری ریمان ـ لیوویل

فرض کنید $-\infty < a < b < +\infty$ و $[a,b]$ یک بازه‌ی کراندار روی محور اعداد حقیقی $R$ باشد،پس انتگرال های کسری چپ $I^{\alpha}_{a+}f$ و راست $I^{\alpha}_{b-}f$ از مرتبه‌ی $\alpha \in C$ که $R_e(\alpha) > 0$ ( قسمت حقیقی $\alpha$)را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$(I^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \quad x > a. \tag{۷.۱}$$

$$(I^{\alpha}_{b-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt, \quad x < b. \tag{۸.۱}$$

برای $\alpha = n \in N$ داریم

$$(I^{n}_{a+}f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt,$$

$$(I^{n}_{b-}f)(x) = \int_x^b dt_1 \int_b^{t_1} dt_2 ... \int_{t_{n-1}}^b f(t_n)dt_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_x^b (t-x)^{n-1}f(t)dt,$$

اکنون با توجه به تعاریف (۷.۱) و (۸.۱) به تعریف مشتق های کسری چپ و راست ریمان ـ لیوویل از مرتبه‌ی $\alpha \in C$ $(R_e(\alpha) \geq 0)$ می‌پردازیم که به ترتیب با نمادهای $D^{\alpha}_{a+}f$ و $D^{\alpha}_{b-}f$ نمایش داده می‌شوند.

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x) := (\frac{d}{dx})^n (I^{n-\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d}{dx})^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt, \quad x > a, \tag{۹.۱}$$

[۱۰] Caputo

$$(D_{b-}^{\alpha}f)(x) := (\frac{-d}{dx})^n(I_{b-}^{n-\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{-d}{dx})^n\int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dt, \quad x < b. \tag{۱۰.۱}$$

که $n = [R(\alpha)] + 1$ . $R_e(\alpha)$ به معنی قسمت حقیقی $\alpha$ و $[R(\alpha)]$ به معنی قسمت صحیح $R(\alpha)$ است.

وقتی $\alpha = n \in N_\circ$ تعاریف بالا به صورت زیر خواهند شد.

$$(D_{a+}^{\circ}f)(x) = (D_{b-}^{\circ}f)(x) = f(x),$$

$$(D_{a+}^{n}f)(x) = f^{(n)}(x), \quad (D_{b-}^{n}f)(x) = (-1)^n f^{(n)}(x), \quad (n \in N). \tag{۱۱.۱}$$

۲)مشتق و انتگرال کسری لیوویل

مشتق و انتگرال کسری لیوویل در واقع همان مشتق و انتگرال کسری ریمان ـ لیوویل است که برای تمام اعداد حقیقی $R$ تعریف می‌شود. یعنی برای تعریف مشتق و انتگرال کسری لیوویل درتعریف مشتق و انتگرال کسری ریمان ـ لیوویل قرار می‌دهیم $a = -\infty$ و $b = +\infty$ .

انتگرال کسری چپ و راست لیوویل از مرتبه‌ی $\alpha \in C$ $(R_e(\alpha) > 0)$ را به ترتیب با نماد $I_{+}^{\alpha}f$ و $I_{-}^{\alpha}f$ و مشتق کسری چپ و راست لیوویل را به ترتیب با نماد $D_{+}^{\alpha}f$ و $D_{-}^{\alpha}f$ نمایش می‌دهیم.

۳)مشتق کسری کاپاتو

فرض کنید $[a,b]$ یک بازه‌ی کراندار روی $R$ باشد و

$$D_{a+}^{\alpha}[f(t)](x) \equiv (D_{a+}^{\alpha}f)(x),$$

$$D_{b-}^{\alpha}[f(t)](x) \equiv (D_{b-}^{\alpha}f)(x).$$

به ترتیب مشتق های کسری چپ و راست ریمان ـ لیوویل از مرتبه‌ی $\alpha \in C$ $(R_e(\alpha) \geq 0)$ باشند. حال مشتق های کسری چپ و راست کاپاتو $({}^CD_{a+}^{\alpha}f)(x)$ و $({}^CD_{b-}^{\alpha}f)(x)$ ازمرتبه‌ی $\alpha \in C(R_e(\alpha) \geq 0)$ راروی بازه‌ی $[a,b]$ به کمک مشتق های کسری چپ و راست ریمان ـ لیوویل به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$({}^CD_{a+}^{\alpha}f)(x) = \Big(D_{a+}^{\alpha}\Big[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\Big]\Big)(x), \tag{۱۲.۱}$$