بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
ریاضی کاربردی

حل معادلات دیفرانسیل به‌وسیله‌ی ماتریس‌های عملگری چندجمله‌ای‌های برنشتاین

استاد راهنما: دکتر قاسم بریدلقمانی

استاد مشاور: دکتر محمدرضا هوشمنداصل

پژوهش و نگارش: سهیلا روزقمری

مهرماه ۱۳۹۲

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و

نوآوری‌های ناشي از تحقیق موضوع این پایان‌نامه
متعلق به دانشگاه است.

تقدیم به

همه‌ی کسانی که حقی بر من دارند.

باسپاس

شکر ایزد منان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان نامه را به پایان برسانم.

سپاس و قدردانی ویژه دارم از خانواده عزیز و مهربانم که تمام موفقیتهایم را مدیون و مرهون بردباری و همراهی ایشان هستم.

از استاد بزرگوارم، جناب آقای دکتر قاسم برید لقمانی که در طول دوران به سرانجام رساندن این پایان نامه از راهنمایی ها و مساعدتهای بی دریغ ایشان بهره بردم، صمیمانه سپاسگزارم.

از استاد بزرگوارم، جناب آقای دکتر محمدرضا هوشمند اصل که استاد مشاور اینجانب بودند و مرا در نگارش و تدوین یاری رساندند، متشکرم.

از خانم رحمت سادات مشکوتی و آقای محمد حیدری که در تهیه این پایان نامه مرا همراهی کردند، ممنون و متشکرم.

از اساتید محترم، جناب دکتر سید محمد مهدی حسینی و دکتر سید ابوالفضل شاهزاده فاضلی که مسئولیت داوری این پایان نامه را پذیرفتند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از سایر اساتید محترم دانشکده، که در طول دوره تحصیل مرا از دانش خود بهره مند ساختند، سپاسگزارم.

از سرکار خانم ها عابدینی و عباسی زاده که همواره با روی باز در دانشکده ریاضی کمال همکاری را با من داشتند، متشکرم.

پروردگارا، حسن عاقبت، سلامت و سعادت را برای همه کسانی که برایم زحمت کشیدند، مقدر نما.

پروردگارا، توفیق خدمتی سرشار از شور و نشاط و همراه و همسو با دانش و پژوهش جهت رشد و شکوفایی ایران سرافراز عنایت فرما.

خدایا چنان کن سرانجام کار که تو خشنود باشی و ما رستگار.

چکیده

در سال‌های اخیر چندجمله‌ای‌های برنشتاین[۱] توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است. این چندجمله‌ای‌ها برای حل تقریبی معادلات به روش‌های مختلف استفاده می‌شوند. برای مثال، چندجمله‌ای‌های برنشتاین برای حل معادلات انتگرالی فردهلم[۲]، معادلات انتگرالی ولترا[۳]، معادلات دیفرانسیل[۴] و معادلات انتگرالی-دیفرانسیل[۵] استفاده شده‌اند. در این پایان‌نامه از چندجمله‌ای‌های برنشتاین برای تقریب جواب معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط اولیه استفاده می‌شود.

در آغاز این مجموعه، مفاهیم و تعاریف اولیه مورد نیاز شرح داده شده و در ادامه ماتریس‌های عملگری معرفی و شیوه کلی برای محاسبه این ماتریس‌ها بر اساس برای چندجمله‌ای‌های برنشتاین ارائه می‌شود. سپس ابتدا روش حل مسئله با کمک ماتریس‌های عملگری چندجمله‌ای‌های برنشتاین، مطرح شده و بعد از آن برای روشن‌تر شدن روش مثال‌های عددی بیان و نتایج به‌دست‌آمده با جواب‌های دقیق مقایسه شده‌است. سرانجام در پیوست برنامه‌های کامپیوتری مثال‌های حل شده آورده شده‌است.

کلمات کلیدی: معادله دیفرانسیل، چندجمله‌ای‌های برنشتاین، چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته، ماتریس‌های عملگر.

---

[۱] Bernstein polynomials

[۲] Fredholm integral equations

[۳] Volterra integral equations

[۴] integro-differential equations

[۵] integro-differential equations

فهرست مطالب

نماد	توضیح	صفحه
ODE	معادلات دیفرانسیل معمولی	۴
PDE	معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی	۴
$\|\|.\|\|$	نرم	۷
$(X, \|\|.\|\|)$	فضای نرم‌دار	۷
$< .,. >$	ضرب داخلی	۷
$C_\omega[a,b]$	فضای توابع پیوسته روی $[a,b]$	۷
$\omega(x)$	تابع وزن	۸
$L^{۲}_{\omega}[a,b]$	فضای توابع مربع انتگرال پذیر روی $[a,b]$	۸
δ_{mn}	تابع دلتای کرونکر	۸
$p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	چندجمله‌ای ژاکوبی درجه n	۱۳
$l_n(x)$	چندجمله‌ای لژاندر درجه n	۴۵
$B_i^m(x)$	i امین چندجمله‌ای برنشتاین درجه m	۱۸
P_n	فضای چندجمله‌ای‌های از درجه کمتر مساوی n	۲۹
$\phi(x)$	بردار چندجمله‌ای‌های برنشتاین	۳۱
$T_m(x)$	بردار پایه‌های توانی	۳۱
Q	ماتریس عملگر دوگان چندجمله‌ای‌های برنشتاین	۳۲
H	ماتریس هیلبرت	۳۲
P	ماتریس عملگر انتگرال چندجمله‌ای‌های برنشتاین	۳۴
$\hat{C}$	ماتریس عملگر ضرب چندجمله‌ای‌های برنشتاین	۴۰
D	ماتریس عملگر مشتق چندجمله‌ای‌های برنشتاین	۳۷
$p_n(x)$	چندجمله‌ای لژاندر انتقال‌یافته درجه n	۴۱
$L(x)$	بردار چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته	۴۵
M	ماتریس عملگر دوگان چندجمله‌ای‌های لژاندر	۴۶
N	ماتریس عملگر انتگرال چندجمله‌ای‌های لژاندر	۴۶

پیشگفتار

بررسی وجود، سرشت و تعیین جواب‌های معادلات دیفرانسیل از اهمیتی اساسی، نه فقط نزد ریاضیدانان محض بلکه هر کس که درگیر تحلیل ریاضی پدیده‌های طبیعی است، برخوردار است. به طور کلی، ریاضی‌دانان وقتی بتوانند وجود جواب را برای یک معادله دیفرانسیل ثابت کنند یا وقتی قادر باشند چند خاصیت مهم جواب را به‌دست آورند، این را یک پیروزی برای خود می‌دانند. از سویی دیگر، دانشمندان، معمولاً وقتی نمی‌توانند عبارات مشخصی برای جواب ارائه دهند بسیار ناخشنود می‌شوند. راه میانه یافتن روندی عملی است که با آن بتوان جواب لازم را با دقتی رضایت‌بخش تقریب زد.

روش‌های زیادی برای حل تقریبی معادلات ارائه شده و مورد بحث قرار گرفته است و هنوز هم بحث در زمینه‌ی چنین روش‌هایی در حال تکامل و پیشرفت است. یکی از این روش‌ها استفاده از ماتریس‌های عملگری است. ماتریس‌های عملگری، معادلات دیفرانسیل را به دستگاهی از معادلات جبری تبدیل می‌کنند.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مورد نیاز

۱.۱ مقدمه

در این فصل برخی از تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، به‌طور خلاصه ارائه شده است. در بخش ۲.۱ تعاریف و قضایای مورد نیاز در رابطه با معادلات دیفرانسیل ارائه می‌شود. در بخش ۳.۱ برخی از تعاریف و قضایای مربوط به چندجمله‌ای‌های متعامد، مسائل اشتورم-لیوویل[۱] و چگونگی تقریب توابع توضیح داده می‌شود و در نهایت در بخش ۴.۱ چندجمله‌ای‌های برنشتاین معرفی و برخی از ویژگی‌ها و خواص مربوط به آن‌ها مطرح خواهد شد.

۲.۱ معادلات دیفرانسیل

در بسیاری از مسائل علوم و مهندسی لازم می‌شود که تابعی را پیدا کنیم تا در معادله‌ای شامل مشتق‌های آن صدق کند، چنین معادله‌ای را معادله‌ی دیفرانسیل می‌نامیم.

مثال ۱.۲.۱ معادلات زیر نمونه‌ای از معادلات دیفرانسیل هستند.

$$y^{(viii)}(x) - y(x) = -۸e^{x}, \qquad (۱.۱)$$

$$y''(x) + \frac{۲}{x}y'(x) = ۲(۲x^{۲} + ۳)y(x), \qquad (۲.۱)$$

و

$$\ln y' + \sin y'' = ۲yy'. \qquad (۳.۱)$$

تعریف ۲.۲.۱ به هر تابعی که در معادله دیفرانسیل صدق کند، جواب آن معادله گفته می‌شود.

معادلات دیفرانسیل را می‌توان به طور عمده به دو دسته تقسیم نمود: معادلات دیفرانسیل معمولی[۲] $(ODEs)$ و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی[۳] $(PDEs)$.

---

[۱] Sturm–Liouville problems

[۲] Ordinary Differential Equations

[۳] Partial Differential Equations

تعریف ۳.۲.۱ معادلات دیفرانسیل معمولی به آن دسته از معادلات گفته می‌شود که، تابع مجهول در آن تنها برحسب یک متغیر مستقل باشد.

مثال ۴.۲.۱ معادلات (۱.۱)، (۲.۱) و (۳.۱) معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشند.

تعریف ۵.۲.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل گفته می‌شود که در آن تابع مجهول بر حسب چند متغیر مستقل به‌همراه مشتق جزئی تابع نسبت به آن متغیرها شرکت داده شده باشند.

مثال ۶.۲.۱ معادلات زیر نمونه‌ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند.

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 y}{\partial t^2\partial x^2}+\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}=0, \tag{۴.۱}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=u+3. \tag{۵.۱}$$

تعریف ۷.۲.۱ بالاترین مرتبه مشتق موجود در یک معادله را مرتبه آن معادله می‌نامیم.

مثال ۸.۲.۱ معادله (۱.۱) مرتبه ۸، معادلات (۲.۱) و (۳.۱) مرتبه ۲، معادله (۴.۱) مرتبه ۴ و معادله (۵.۱) مرتبه ۳ هستند.

شکل کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه nام به صورت

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)},y^{(n)})=0 \quad \text{یا} \quad y^{(n)}=f(x,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

است. معادلات دیفرانسیل معمولی را می‌توان به دو دسته مهم تقسیم نمود:

۱. معادلات دیفرانسیل خطی

۲. معادلات دیفرانسیل غیرخطی

تعریف ۹.۲.۱ شکل کلی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه nام (معادله‌ای که نسبت به متغیر وابسته و مشتقاتش از درجه اول است) به‌صورت زیر است:

$$P_{\circ}(x)y^{(n)} + P_{1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = G(x). \tag{۶.۱}$$

از آن جا که $P_{\circ}(x) \neq \circ$ است، معادله فوق را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی نمود:

$$y^{(n)} + p_{1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = g(x),$$

که در آن $p_i(x)$ها توابعی معلوم هستند.

معادله دیفرانسیلی که به شکل خطی (۶.۱) تبدیل نشود، معادله دیفرانسیل غیرخطی گوییم. هم‌چنین اگر $g(x) = \circ$ باشد معادله را همگن و در غیر این صورت معادله را ناهمگن می‌نامیم.

مثال ۱۰.۲.۱ معادلات (۱.۱) و (۲.۱) خطی و معادله (۳.۱) غیرخطی و معادله (۲.۱) همگن و معادله (۱.۱) ناهمگن هستند.

تعریف ۱۱.۲.۱ اگر معادله دیفرانسیل با شرط اولیه همراه باشد، آن را مسئله‌ی مقدار اولیه می‌نامیم:

$$\begin{cases} y' + p(x)y = g(x), \\ y(x_{\circ}) = y_{\circ}. \end{cases} \tag{۷.۱}$$

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_{\circ}) = y_{\circ}. \end{cases} \tag{۸.۱}$$

رابطه‌ی(۷.۱) یک مسئله مقدار اولیه خطی و رابطه‌ی (۸.۱) با فرض این‌که تابع f یک تابع غیرخطی بر حسب y باشد، یک مسئله‌ی مقدار اولیه غیرخطی را نشان می‌دهد.

مطالب این بخش برگرفته از مرجع [۲] است.

۳.۱ چندجمله‌ای‌های متعامد

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنید Xیک فضای برداری مختلط باشد، تابع $\|.\| : X \longrightarrow R$ را یک نرم گوییم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) به ازای هر x در X، $\|x\| \geq ۰$ و $\|x\| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$،

۲) به ازای هر x در X و هر اسکالر α در R ، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$،

۳) به ازای هر x و y در X، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

فضای $(X, \|.\|)$ را یک فضای نرم‌دار می‌نامیم.

تعریف ۲.۳.۱ فضای خطی X روی میدان حقیقی R را یک فضای ضرب داخلی حقیقی گوییم هرگاه تابعی مانند $< .,. >: X * X \longrightarrow R$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که به ازای هر $f, g, h \in X$ و هر $\alpha \in R$ روابط زیر برقرار باشند:

۱) $< f, f > \geqslant ۰$ و $< f, f >= ۰ \Longleftrightarrow f = ۰$،

۲) $< f, g) =< g, f >$،

۳) $< \alpha f, g >= \alpha < f, g >$،

۴) $< f + g, h >=< f, h > + < g, h >$.

تابع $\|.\| : X \longrightarrow R$ که به‌صورت $\|f\| =< f, f >^{\frac{1}{۲}}$ تعریف می‌شود یک نرم روی X است و آن را نرم تولید شده به وسیله‌ی ضرب داخلی می‌گویند.

مثال ۳.۳.۱ دو فضای ضرب داخلی مهم عبارتند از:

R^n با ضرب داخلی $< X, Y >= \sum_{i=۰}^{n} x_i y_i$ و $C_\omega[a, b]$ فضای توابع پیوسته بر روی $[a, b]$ با ضرب داخلی $< f, g >_\omega = \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx$ که در آن $\omega(x)$ یک تابع پیوسته‌ی مثبت است.

تعریف ۴.۳.۱ فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی و $f,g \in X$ باشد. گوییم f و g بر یکدیگر عمودند هرگاه $< f,g >= ۰$ باشد.

مجموعه $A \subseteq X$ را متعامد نامیم هرگاه:

$$\forall f \neq g \in A, \quad < f,g >= ۰,$$

و مجموعه $A \subseteq X$ را متعامد یکه نامیم، هرگاه متعامد بوده و به ازای هر $f \in A$ داشته باشیم:

$$\|f\| = ۱.$$

تعریف ۵.۳.۱ دنباله توابع $\{\phi_n\}_{n=۰}^{\infty}$ را یک مجموعه متعامد می‌نامیم، هرگاه این توابع دو به دو متعامد باشند، یعنی $< \phi_n, \phi_m >= ۰$ وقتی $n \neq m$، مانند دنباله توابع $\{sin(kx)\}_{k=۰}^{\infty}$ بر بازه‌ی $[۰,\pi]$.

تعریف ۶.۳.۱ فرض کنید $\omega(x)$ تابعی پیوسته، نامنفی در بازه $[a,b]$ باشد (به چنین تابعی، تابع وزن گفته می‌شود)، در این صورت فضای $L^۲_\omega[a,b]$ متشکل از تمام توابعی مانند $u(x)$است که

$$\int_a^b \omega(x)|u(x)|^۲ dx < \infty.$$

در فضای $L^۲_\omega[a,b]$ تابع دوتایی $< u,v >_\omega$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$< u,v >_\omega = \int_a^b \omega(x)u(x)v(x)dx.$$

یک ضرب داخلی است. هم‌چنین نرم القا شده توسط این ضرب داخلی در فضای $L^۲_\omega[a,b]$ به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\|u\|^۲_\omega = < u,u >_\omega = \int_a^b \omega(x)|u(x)|^۲ dx.$$

تعریف ۷.۳.۱ فرض کنید $\{p_k\}_{k=۰}^{\infty}$ مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌ها باشد که درجه p_k برابر k است و $\omega(x)$ تابعی پیوسته، نامنفی و انتگرال‌پذیر در بازه $[a,b]$ باشد، این چندجمله‌ای‌ها در بازه $[a,b]$ نسبت به تابع وزن $\omega(x)$ متعامدند، هرگاه:

$$< p_m, p_n >_\omega = \int_a^b \omega(x)p_m(x)p_n(x)dx = \delta_{mn}\|p_n\|^۲_\omega.$$

تعریف ۸.۳.۱ اگر در یک دستگاه متعامد از چندجمله‌ای‌ها به ازای هر k ، $\|p_k\|_\omega = 1$ باشد، آنگاه دستگاه چندجمله‌ای $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ را یک دستگاه متعامد یکه می‌نامیم.

قضیه ۹.۳.۱ [۷] مجموعه چندجمله‌ای‌های $p_0(x), p_1(x), \cdots$ (متناهی یا نامتناهی) نسبت به تابع وزن $\omega(x)$ متعامدند اگر

- $p_i(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه i باشد،
- برای هر $i \neq j$، $< p_i, p_j >_\omega = 0$ باشد.

قضیه ۱۰.۳.۱ [۷] برای یک مجموعه متناهی از چندجمله‌ای‌های متعامد $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_k(x)$ موارد زیر برقرار است:

۱. اگر $p(x)$ یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه k باشد، آنگاه می‌توانیم بنویسیم:

$$p(x) = d_0 p_0(x) + d_1 p_1(x) + \cdots + d_k p_k(x),$$

که اگر برای هر i، $< p_i, p_i >_\omega \neq 0$ باشد، آنگاه ضرایب $d_0, d_1, \cdots, d_k$ به‌صورت یکتا تعیین می‌شوند. با ضرب داخلی $p_i(x)$ در دو طرف تساوی فوق داریم:

$$\begin{aligned} < p, p_i >_\omega &= d_0 < p_0, p_i >_\omega + d_1 < p_1, p_i >_\omega + \cdots + d_k < p_k, p_i >_\omega \\ &= 0 + \cdots + 0 + d_i < p_i, p_i >_\omega + 0 + \cdots + 0, \quad i = 0, 1, \cdots, k, \end{aligned}$$

زیرا:

$$< p_j, p_i >_\omega = 0, \quad \forall i \neq j,$$

بنابراین:

$$d_i = \frac{< p, p_i >_\omega}{< p_i, p_i >_\omega}, \quad i = 0, 1, \cdots, k.$$

۲. اگر $p(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه کمتر از k باشد، آنگاه

$$< p, p_k >_\omega = 0$$

با کمک ویژگی ۱، $p(x) = d_0 p_0(x) + d_1 p_1(x) + \cdots + d_l p_l(x)$ که $l < k$ درجه p است. با ضرب داخلی p_k در دو طرف تساوی فوق و با توجه به خاصیت تعامد رابطه دلخواه به‌دست می‌آید.

تعریف ۱۱.۳.۱ دنباله چندجمله‌ای‌های $\{\phi_n\}_{n=۰}^{\infty}$ را که در آن ϕ_n یک چندجمله‌ای از درجه n است، یک مجموعه ساده از چندجمله‌ای‌ها می‌نامیم.

قضیه ۱۲.۳.۱ [۱] فرض کنید $\{\phi_n\}_{n=۰}^{\infty}$ یک مجموعه ساده از چندجمله‌ای‌ها و ψ_m یک چندجمله‌ای از درجه m باشد، در این صورت، ψ_m را می‌توان به‌صورت یک ترکیب خطی از $\phi_۰, \phi_۱, \cdots, \phi_m$ نوشت.

قضیه ۱۳.۳.۱ [۱] مجموعه ساده از چندجمله‌ای‌ها $\{\phi_n\}_{n=۰}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن $\omega(x)$ بر بازه‌ی (a,b) متعامد است اگر و تنها اگر به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n و $m = ۰, ۱, \cdots, n-۱$ داشته باشیم:

$$(\phi_n, x^m) = \int_a^b \omega(x)\phi_n(x)x^m dx = ۰.$$

قضیه ۱۴.۳.۱ [۱] دنباله چندجمله‌ای‌هایی که به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند، متعامد هستند:

$$\begin{aligned} p_۰(x) &= ۱, \quad p_۱(x) = x - a_۱, \\ p_n(x) &= (x-a_n)p_{n-۱}(x) - b_n p_{n-۲}(x) \qquad \forall n \geq ۲, \end{aligned}$$

که در آن

$$a_n = \frac{< xp_{n-۱}, p_{n-۱} >}{< p_{n-۱}, p_{n-۱} >}, \quad b_n = \frac{< p_{n-۱}, p_{n-۱} >}{< p_{n-۲}, p_{n-۲} >}.$$

در قضیه فوق هر ضرب داخلی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد به شرطی که دارای این خاصیت باشد که برای هر سه تابع f, g, h داشته باشیم $< f, gh >=< fg, h >$. این مطلب به‌طور آشکار برای ضرب داخلی معمولی $< f, g >_\omega= \int f(x)g(x)\omega(x)dx$ معتبر است.

۱.۳.۱ مسائل اشتورم-لیوویل

مسائل اشتورم-لیوویل از مدل‌بندی مسائل ارتعاشات در فیزیک کوانتم به‌دست می‌آیند. هم‌چنین در فیزیک این مسائل توصیف کننده موج‌های هارمونیک و حرکت بر اساس قانون نیوتن هستند. این

مسائل کاربردهایی در حل مسائل مشتقات جزیی مانند معادلات گرما، موج و لاپلاس با استفاده از روش جداسازی متغیرها نیز دارند.

تعریف ۱۵.۳.۱ هر معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به شکل

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]+q(x)u(x)=\lambda\omega(x)u(x),\quad x\in[-۱,۱], \tag{۹.۱}$$

را یک مسأله اشتورم-لیوویل می‌نامند. در این مسأله $p(x)$،$q(x)$ و $\omega(x)$ توابع حقیقی هستند. $p(x)$ در $(-۱,۱)$ به‌طور اکید مثبت، پیوسته مشتق پذیر و در $x=\pm۱$ پیوسته، $q(x)$ در $(-۱,۱)$ نامنفی و کراندار و $\omega(x)$ تابع وزن، در $(-۱,۱)$ نامنفی و انتگرال پذیر است. در یک مسأله اشتورم-لیوویل شرایط مرزی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases}\alpha_۱u(-۱)+\beta_۱u'(۱)=\circ, & |\alpha_۱|+|\beta_۱|>\circ,\\ \alpha_۲u(-۱)+\beta_۲u'(۱)=\circ, & |\alpha_۲|+|\beta_۲|>\circ,\end{cases}$$

که در آن α_iها و β_iها اعداد حقیقی و ثابت هستند.

در یک مسأله اشتورم-لیوویل $\lambda\neq\circ$ را یک مقدار ویژه و جواب معادله دیفرانسیل متناظر با این مقدار ویژه را تابع ویژه می‌نامند.

مثال ۱۶.۳.۱ مسأله اشتورم -لیوویل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}u''(x)+\lambda u(x)=\circ,\\ u'(-۱)=u'(۱)=\circ.\end{cases}$$

این مسأله دارای مقادیر ویژه $\lambda_k=(\frac{k\pi}{۲})^۲$ و توابع ویژه $\phi_k(x)=\cos\left(\frac{k\pi(x+۱)}{۲}\right)$ برای $k=\circ,۱,\cdots$ است.

مسائل اشتورم-لیوویل به دو دسته منظم و تکین تقسیم می‌شوند. در ادامه ابتدا مسائل اشتورم-لیوویل منظم[۴] و سپس مسائل اشتورم-لیوویل تکین[۵] معرفی میکنیم.

[۴] Regular Sturm–Liouville problems

[۵] Singular Sturm–Liouville problems

• مسائل اشتورم-لیوویل منظم

تعریف ۱۷.۳.۱ اگر در مسأله اشتورم-لیوویل (۹.۱) تابع $p(x)$ در بازه $[-۱,۱]$ اکیداً مثبت باشد، آنگاه مسأله اشتورم-لیوویل را منظم گویند.

قضیه ۱۸.۳.۱ [۳] اگر در یک مسأله اشتورم-لیوویل منظم $\alpha_۱\beta_۱ \leq ۰$ و $\alpha_۲\beta_۲ \geq ۰$، آنگاه حل مسأله اشتورم-لیوویل دارای یک مجموعه یکتا از توابع ویژه $\phi_n(x)$ و مقادیر ویژه λ_n است به‌طوری که این مقادیر ویژه به‌صورت یک دنباله اکیداً صعودی و بی‌کران به‌صورت زیر مرتب شده‌اند:

$$۰ \leq \lambda_۰ \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+۱} \leq \cdots ,$$

و تابع ویژه $\phi_n(x)$ متناظر با مقادیر ویژه λ_n دقیقاً دارای n ریشه در بازه $[-۱,۱]$ است.

قضیه ۱۹.۳.۱ [۳] مجموعه توابع ویژه یک مسأله اشتورم لیوویل منظم نسبت به ضرب داخلی $<.,.>_\omega$ در بازه $(-۱,۱)$ تشکیل یک مجموعه از توابع متعامد می‌دهند؛ به این معنی که

$$(\phi_n, \phi_m)_\omega = \int_{-۱}^{۱} \phi_n(x)\phi_m(x)\omega(x)dx = \delta_{nm}\|\phi_n(x)\|_\omega^۲.$$

• مسائل اشتورم-لیوویل تکین

تعریف ۲۰.۳.۱ مسأله اشتورم-لیوویل (۹.۱) تکین است، هرگاه تابع $p(x)$ در مرزها صفر شود؛ به این معنی که

$$p(-۱) = p(۱) = ۰.$$

مشابه با مسائل اشتورم-لیوویل منظم، مقادیر ویژه مسأله اشتورم-لیوویل تکین تشکیل یک دنباله از اعداد حقیقی و بی‌کران می‌دهند. هم‌چنین توابع ویژه این مسائل تشکیل یک پایه متعامد یکه در فضای $L_\omega^۲(-۱,۱)$ می‌دهند.