[driver]graphicx DeclareGraphicsExtensions.pcx,.jpg,gif

[Scale=1.25]Junicode

برخی از خواص همبافت‌های انژکتیو گرنشتاین از مدول‌ها روی حلقه‌های نوتری

توسط

مهناز عالی داعی

رسالهٔ ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد ریاضی محض

زیر نظر

دکتر ناهید هادیان دهکردی

اسفند ماه ۱۳۹۰

دانشکدهٔ علوم پایه

دانشگاه الزهراء (س)

تهران

تقدیم به

مادر عزیزتر از جان و دریای آرام روح پدر بزرگوارم

قدردانی

حالا که کشتی افکارم به اقیانوس بیکران ریاضیات سفر کرده، دلم به ستارگانی خوش است که در تاریکی مجهولات، بهانه‌های کوچک و بزرگ هدایتم می‌شوند.
...و سپاس فراوان خداوندی را که هدایت‌گر راه است.

در این‌جا لازم می‌بینم که از استاد راهنمای گرامیم، سرکار خانم دکتر هادیان دهکردی که در طول این پایان‌نامه صبورانه یاریم کردند، کمال تشکر و قدردانی را نمایم. هم‌چنین از اساتید ارجمند، جناب آقای دکتر کامران دیوانی آذر و جناب آقای دکتر محمدجواد نیک مهر که این پایان‌نامه را مطالعه نمودند، تشکر می‌نمایم.

در پایان نیز از مادر مهربانم که با دعاهای خیر خود، پشتوانه‌ی من در تمام مراحل زندگی بود و از همسر عزیزم که در طول پایان‌نامه یاریم نمود، قدردانی می‌نمایم.

چکیده

در این رساله به بررسی مدول‌ها و هم‌بافت‌های تصویری و انژکتیو گرنشتاین می‌پردازیم. هم‌چنین پوش (پیش‌پوش)، پوشش (پیش‌پوشش) را تعریف و رابطه‌ی آن‌ها با مدول‌ها و هم‌بافت‌های گرنشتاین را بیان می‌کنیم. به علاوه رابطه‌ی بین مدول‌ها و هم‌بافت‌های انژکتیو گرنشتاین را بررسی می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که اگر R یک حلقه‌ی نوتری چپ باشد، آن‌گاه هم‌بافت C متشکل از R-مدول‌های چپ C^m $(m \in \mathbb{Z})$، انژکتیو گرنشتاین است اگر و تنها اگر برای هر $m \in \mathbb{Z}$، هر یک از C^m-ها، مدول‌های انژکتیو گرنشتاین باشند. ابعاد تصویری (انژکتیو) گرنشتاین مدول‌ها و هم‌بافت‌ها را نیز تعریف و خواصی از آن‌ها را مطرح می‌کنیم. هم‌چنین رابطه‌ی بین ابعاد انژکتیو گرنشتاین مدول‌ها و هم‌بافت‌ها را روی حلقه‌های نوتری چپ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: مدول تصویری (انژکتیو) گرنشتاین، هم‌بافت تصویری (انژکتیو) گرنشتاین، بعد تصویری (انژکتیو) گرنشتاین، پوش، پوشش.

مقدمه

تا کنون مفهوم مدول‌ها و ابعاد تصویری (انژکتیو) گرنشتاین توسط ریاضیدانان بسیاری مورد مطالعه قرار گرفته و توسعه یافته است. اسلاندر[1] و بریجر[2] در سال ۱۹۶۹ مفهوم بعد گرنشتاین ($G-dimension$) را برای مدول‌های با تولید متناهی تعریف کردند. آن‌ها ثابت کردند که اگر بعد تصویری R-مدول با تولید متناهی M، متناهی باشد آن‌گاه $G-dim_R M = pd_R M$.

در سال ۱۹۹۵، اناکس[3] و جندا[4] بعد تصویری گرنشتاین مدول‌های دلخواه را از طریق انتخاب تحلیل‌هایی از R-مدول‌های تصویری گرنشتاین، تعریف کردند.

در این رساله نیز مدول‌ها و ابعاد تصویری و انژکتیو گرنشتاین تعریف شده‌اند. نشان می‌دهیم که چه رابطه‌ای بین مدول‌های تصویری و تصویری گرنشتاین وجود دارد؟ هم‌چنین پوش (پیش‌پوش)، پوشش (پیش‌پوشش)، رده‌های حلالاً تصویری و انژکتیو و رده‌های متعامد را تعریف کرده‌ایم و به بررسی رابطه‌ی آن‌ها با مدول‌های گرنشتاین پرداخته‌ایم. به عنوان مثال نشان داده‌ایم که رده‌ی مدول‌های تصویری گرنشتاین، حلال تصویری است. هم‌چنین ثابت کرده‌ایم که هر مدول دلخواه با بعد تصویری گرنشتاین متناهی دارای یک پیش‌پوش تصویری گرنشتاین پوشا است.

بعد از معرفی مدول‌های گرنشتاین، همبافت‌های تصویری و انژکتیو گرنشتاین را

---

[1] Auslander

[2] Bridger

[3] Enochs

[4] Jenda

تعریف می‌کنیم. هم‌چنین رابطه‌ی بین همبافت‌ها و پیش‌پوش‌ها را بیان می‌کنیم. نشان می‌دهیم که اگر همبافت C، متشکل از R–مدول‌های انژکتیو گرنشتاین باشد، آن‌گاه هر پیش‌پوش انژکتیو از C، پوشا است.

به علاوه به دنبال این هستیم که روابط بین همبافت C (که متشکل از R–مدول‌های C^m است) و R–مدول‌های C^m را پیدا کنیم. به عنوان مثال اناکس و رزاس[۵] در سال ۱۹۹۸ نشان دادند که همبافت C با تولید متناهی است؛ اگر و تنها اگر C کراندار باشد و C^m برای هر $m \in \mathbb{Z}$، با تولید متناهی باشد. هم‌چنین آن‌ها نشان دادند که روی یک حلقه‌ی n–گرنشتاین، همبافت C انژکتیو گرنشتاین است اگر و تنها اگر C^m برای هر $m \in \mathbb{Z}$، R–مدول انژکتیو گرنشتاین باشد. نشان خواهیم داد که اگر R یک حلقه‌ی نوتری چپ باشد نیز، همان نتیجه برقرار است.

در فصل اول این رساله به صورت خلاصه به بیان مقدمات و مطالب پیش نیاز از جبر پیشرفته و جبر همولوژیک می‌پردازیم و بسیاری از نمادها، مفاهیم و قضایایی که در فصل‌های بعد مورد نیاز هستند؛ بیان می‌شوند. در فصل دوم به معرفی مدول‌های تصویری و انژکتیو گرنشتاین پرداخته و برخی از خواص اساسی آن‌ها را مطرح می‌کنیم. هم‌چنین ابعاد تصویری و انژکتیو گرنشتاین را برای مدول‌ها تعریف می‌کنیم. فصل سوم را به معرفی همبافت‌های انژکتیو گرنشتاین و بررسی رابطه‌ی بین مدول‌های انژکتیو گرنشتاین و همبافت‌های انژکتیو گرنشتاین اختصاص داده‌ایم. هم‌چنین بعد انژکتیو گرنشتاین همبافت‌ها را تعریف کرده‌ایم. لازم به ذکر است که مقاله‌های اصلی مورد استفاده در این رساله، مرجع‌های [۱۱] و [۱۶] می‌باشند که به ترتیب در فصل‌های ۲ و ۳ به کار برده شده‌اند.

[۵] Rozas

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل مفاهیمی از جبر همولوژیک و تعاریف و قضایای مقدماتی را مطرح می‌کنیم که مکرر مورد استفاده قرار می‌گیرند و با فرض آشنا بودن خواننده با این مطالب، بیشتر قضایا و لم‌ها را بدون اثبات می‌آوریم.
این فصل را با تعریف زیر آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۱ *فرض کنیم A و B، دو R-مدول باشند. مجموعه‌ی تمام R-همریختی‌ها از A به B را با نماد $Hom_R(A,B)$ نشان می‌دهیم.*

تعریف ۱.۲ *R-همریختی‌های $f:A'\to A$ و $g:B\to B'$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت، تعریف می‌کنیم:*

$$Hom_R(f,g) : Hom_R(A,B) \to Hom_R(A',B')$$

$$Hom_R(f,g)h = ghf \quad (\forall\ h \in Hom_R(A,B))$$

برای مطالعه‌ی بیشتر مطالب این قسمت، می‌توانید به مرجع [۱۳] مراجعه کنید.

گزاره ۱.۳ فرض کنیم A و $\{B_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مدول‌ها روی حلقه‌ی R باشد. در این صورت،

$$Hom_R(A, \prod_{i\in I} B_i) \cong \prod_{i\in I} Hom_R(A, B_i).$$

لم ۱.۴ فرض کنیم $f : A' \to A$ و $g : B \to B'$، R-همریختی باشند. در این صورت:

۱) اگر f پوشا و g یک به یک باشد، آن‌گاه $Hom_R(f, g)$ یک به یک است.

۲) اگر f و g دوسویی باشند، آن‌گاه $Hom_R(f, g)$ دوسویی است.

تعریف ۱.۵ R-مدول B را یک جمعوند مستقیم از R-مدول A نامیم هرگاه زیرمدول C از A موجود باشد؛ به طوری که $A = B \oplus C$.

تعریف ۱.۶ فرض کنیم A و B دو R-مدول باشند. تکریختی $f : A \to B$ مستقیم نامیده می‌شود هرگاه $Im\ f$ یک جمعوند مستقیم از B باشد.

تعریف ۱.۷ بروریختی $f : A \to B$ را مستقیم نامیم هرگاه $Ker\ f$ یک جمعوند مستقیم از A باشد.

گزاره ۱.۸ ۱) فرض کنیم $f : A \to B$، R-تکریختی بین مدول‌های A و B باشد. شرط لازم و کافی برای مستقیم بودن f آن است که R-همریختی $g : B \to A$ موجود باشد، به طوری که $gf = id_A$.

۲) شرط لازم و کافی برای مستقیم بودن بروریختی $f : A \to B$ آن است که R-همریختی $g : B \to A$ موجود باشد، به طوری که $fg = id_B$.

تعریف ۱.۹ رشته‌ی دقیق

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

را شکافنده نامیم هرگاه، $Im\ f = Ker\ g$، یک جمعوند مستقیم از B باشد.

گزاره ۱.۱۰ *شرط لازم و کافی برای این‌که رشته‌ی دقیق*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

شکافنده باشد، این است که؛ $i : C \to B$ موجود باشد به طوری که $gi = 1_C$. یا $j : B \to A$ موجود باشد به طوری که $jf = 1_A$.

حال تعریف رسته و تابع‌گون را می‌آوریم و مثال‌هایی در این زمینه ارائه می‌دهیم.

رسته‌ها و تابع‌گون‌ها:

تعریف ۱.۱۱ *فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رده از اشیاء باشد، به طوری که،*

۱) به هر دو شئ A و B از $\mathcal{C}$ یک مجموعه $mor(A,B)$ نسبت داده شود. هر عضو $f \in mor(A,B)$ را یک ریخت از A به B می‌نامیم و با $f : A \to B$ نشان می‌دهیم؛

۲) یک تابع جزئی "o" روی ریخت‌ها موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند:

الف) به ازای هر $f \in mor(A,B)$ و $g \in mor(B,C)$، ترکیب $gf = gof$ تعریف شده باشد و به $mor(A,C)$ متعلق باشد.

ب) به ازای هر سه ریخت $f \in mor(A,B)$، $g \in mor(B,C)$ و $h \in mor(C,D)$، شرکت‌پذیری برقرار باشد یعنی $h(gf) = (hg)f$.

۳) به ازای هر شئ A از $\mathcal{C}$ ریختی مانند $1_A \in mor(A,A)$ موجود باشد که به ازای هر $f \in mor(A,B)$ و $g \in mor(C,A)$، $f1_A = f$ و $1_A\ g = g$.

در این صورت $\mathcal{C}$ به همراه مجموعه ریخت‌های روی اشیاء را یک رسته می‌نامیم.

تعریف ۱.۱۲ *شئ Z در رسته $\mathcal{C}$ را شئ صفر نامیم هرگاه برای هر شئ C در رسته $\mathcal{C}$، دقیقا یک ریخت $Z \to C$ و یک ریخت $C \to Z$ موجود باشد.*

تعریف ۱.۱۳ رسته $\mathcal{C}$ را که دارای شئ صفر است در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $f : B \to C$ یک ریخت در رسته $\mathcal{C}$ باشد. منظور از هسته f در $\mathcal{C}$، ریختی مانند $g : A \to B$ در $\mathcal{C}$ است به طوری که $fg = 0_{AC}$ و هرگاه $g' : A' \to B$ ریختی در $\mathcal{C}$ باشد که $fg' = 0_{A'C}$، آن‌گاه ریخت یکتای $e : A' \to A$ موجود باشد به طوری که $ge = g'$.

هسته f را با نماد $Ker\ f$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱۴ رسته $\mathcal{C}$ را که دارای شئ صفر است در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $f : B \to C$ یک ریخت در رسته $\mathcal{C}$ باشد. منظور از هم‌هسته f در $\mathcal{C}$، ریختی مانند $g : C \to D$ در $\mathcal{C}$ است به طوری که $gf = 0_{BD}$ و هرگاه $g' : C \to D'$ ریختی در $\mathcal{C}$ باشد که $g'f = 0_{BD'}$، آن‌گاه ریخت یکتای $e : D \to D'$ موجود باشد به طوری که $eg = g'$.

هم‌هسته f را با نماد $Coker\ f$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱۵ فرض کنیم A و B دو شئ در رسته $\mathcal{C}$ و $f : A \to B$ یک ریخت در $\mathcal{C}$ باشد. f را مونیک نامیم هرگاه برای هر شئ C و هر دو ریخت $g_1 : C \to A$ و $g_2 : C \to A$، اگر $fg_1 = fg_2$ نتیجه شود که $g_1 = g_2$.

مثال ۱.۱۶ در رسته گروه‌ها و همریختی بین آن‌ها، اگر $f : G_1 \to G_2$ تکریختی باشد، آن‌گاه f مونیک است.

تعریف ۱.۱۷ فرض کنیم A و B دو شئ در رسته $\mathcal{C}$ و $f : A \to B$ یک ریخت در $\mathcal{C}$ باشد. f را اپیک نامیم هرگاه برای هر شئ C و هر دو ریخت $g_1 : B \to C$ و $g_2 : B \to C$، اگر $g_1 f = g_2 f$، آن‌گاه $g_1 = g_2$.

مثال ۱.۱۸ در رسته حلقه‌ها و همریختی بین آن‌ها، اگر $f : R \to S$ برووریختی باشد، آن‌گاه f اپیک است.

تعریف ۱.۱۹ فرض کنیم در رسته $\mathcal{C}$ به ازای هر دو شئ A و B، $mor(A,B)$ یک گروه جمعی باشد به طوری که به ازای هر سه ریخت $f, f_۱, f_۲ \in mor(A,B)$ و $g, g_۱, g_۲ \in mor(B,C)$،

$$g(f_۱ + f_۲) = gf_۱ + gf_۲ \ , \quad (g_۱ + g_۲)f = g_۱ f + g_۲ f$$

در این صورت $\mathcal{C}$ را یک رسته جمعی می‌نامیم.

تعریف ۱.۲۰ رسته جمعی $\mathcal{C}$ را آبلی گوییم هرگاه؛

۱) هر ریخت $f : A \to B$ در $\mathcal{C}$ هسته و هم‌هسته داشته باشد؛

۲) هر ریخت مونیک $f : A \to B$ در $\mathcal{C}$، یکریخت با $Ker(Coker\ f)$ باشد؛

۳) هر ریخت اپیک $f : A \to B$ در $\mathcal{C}$، یکریخت با $Coker(Ker\ f)$ باشد.

تعریف ۱.۲۱ فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ دو رسته باشند و F چنان باشد که به ازای هر شئ A از $\mathcal{C}$، $F(A)$ یک شئ در $\mathcal{C}'$ باشد و $F(۱_A) = ۱_{F(A)}$. در این صورت F را یک تابع‌گون همورد نامیم هرگاه:

الف) به ازای هر ریخت $f \in mor(A,B)$، $F(f) \in mor(F(A), F(B))$؛

ب) به ازای هر دو ریخت $f \in mor(A,B)$ و $g \in mor(B,C)$، $F(gf) = F(g)F(f)$.

و تابع‌گون پادورد یا ناهمورد نامیم هرگاه:

ج) به ازای هر ریخت $f \in mor(A,B)$، $F(f) \in mor(F(B), F(A))$؛

د) به ازای هر دو ریخت $f \in mor(A,B)$ و $g \in mor(B,C)$، $F(gf) = F(f)F(g)$.

به طور نمادین می‌نویسیم $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$.

تعریف ۱.۲۲ فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ دو رسته جمعی باشند. تابع‌گون $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ را جمعی نامیم در صورتی که برای R-همریختی‌های $f_۱$ و $f_۲$ داشته باشیم:

$$F(f_۱ + f_۲) = F(f_۱) + F(f_۲)$$

مثال ۱.۲۳ تابع‌گون‌های $A\otimes_R -$، $-\otimes_R B$، $Hom_R(A,-)$ و $Hom_R(-,B)$ جمعی هستند.

تعریف ۱.۲۴ فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ دو رسته جمعی باشند و $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ تابع‌گون همورد جمعی باشد. تابع‌گون F را دقیق راست گوییم؛ هرگاه به ازای هر رشته‌ی دقیق $A\to B\to C\to 0$، رشته‌ی

$$F(A)\to F(B)\to F(C)\to 0$$

دقیق باشد و تابع‌گون همورد F را دقیق چپ نامیم؛ هرگاه به ازای هر رشته‌ی دقیق

$$0\to A\to B\to C$$

رشته‌ی زیر دقیق باشد:

$$0\to F(A)\to F(B)\to F(C)$$

تابع‌گون F را دقیق نامیم هرگاه هم دقیق راست و هم دقیق چپ باشد.

به طور مشابه تابع‌گون پادورد دقیق تعریف می‌شود.

مثال ۱.۲۵ تابع‌گون‌های $A\otimes_R -$ و $-\otimes_R B$ همورد جمعی دقیق راست هستند.
تابع‌گون $Hom_R(A,-)$ همورد جمعی دقیق چپ است.
تابع‌گون $Hom_R(-,B)$ پادورد جمعی دقیق چپ است.

تعریف ۱.۲۶ تابع‌گون $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ را R-خطی نامیم هرگاه جمعی باشد و برای هر R-همریختی f و $r\in R$ داشته باشیم $F(rf)=rF(f)$.

مدول‌های تصویری و انژکتیو:

مطالب این قسمت از مرجع [۱۳] استخراج شده است.

تعریف ۱.۲۷ *فرض کنیم $f : B \to A$، R-برو‌ریختی بین R-مدول‌های A و B باشد. R-مدول P را تصویری گوییم، هرگاه به ازای هر R-همریختی $g : P \to A$، R-همریختی مانند $h : P \to B$ موجود باشد به طوری که $fh = g$. در واقع نمودار زیر جابه‌جایی باشد.*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ B \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

گزاره ۱.۲۸ *جمع مستقیم $A = \sum_{i\in I} A_i$ یک R-مدول تصویری است اگر و فقط اگر برای هر $i \in I$، هر یک از A_i-ها تصویری باشند.*

قضیه ۱.۲۹ *برای هر R-مدول P، گزاره‌های زیر معادلند:*

۱) R-مدول P، تصویری است.

۲) هر رشته‌ی دقیق به فرم زیر شکافته است.

$$0 \to A \to B \to P \to 0$$

۳) R-مدول P با جمعوند مستقیم یک R-مدول آزاد یکریخت است.

قضیه ۱.۳۰ *برای هر R-مدول A، یک R-مدول تصویری P و برو‌ریختی $P \to A$ وجود دارد.*

تعریف ۱.۳۱ *فرض کنیم $f : B \to A$، R-تکریختی بین R-مدول‌های A و B باشد. R-مدول E را انژکتیو گوییم، هرگاه به ازای هر R-همریختی $g : B \to E$،*

R-همریختی مانند $h : A \to E$ موجود باشد به طوری که $hf = g$. در واقع نمودار زیر جابه‌جایی باشد.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[dl, "h"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

قضیه ۱.۳۲ فرض کنیم E یک R-مدول انژکتیو باشد. در این صورت، هر رشته‌ی دقیق به فرم زیر شکافته است.

$$0 \to E \to A \to B \to 0$$

گزاره ۱.۳۳ ضرب مستقیم $A = \prod_{i\in I} A_i$ یک R-مدول انژکتیو است اگر و فقط اگر برای هر $i \in I$، هر یک از A_i-ها انژکتیو باشند.

قضیه ۱.۳۴ برای هر R-مدول A، یک R-مدول انژکتیو E و تکریختی $A \to E$ وجود دارد.

همبافت‌ها و تابع‌گون‌های همولوژی:

تعریف ۱.۳۵ الف) رشته‌ی زیر از R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها را در نظر می‌گیریم:

$$\boldsymbol{X_\cdot} : \cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

۱) اگر برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $Im\ d_{n+1} \subseteq Ker\ d_n$، آن‌گاه رشته‌ی فوق را یک همبافت یا زنجیر نامیم و به طور خلاصه با $\boldsymbol{X_\cdot} = \{X_n, d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ نشان می‌دهیم.

۲) برای هر $n \in \mathbb{Z}$، مدول خارج قسمتی $\dfrac{Ker\ d_n}{Im\ d_{n+1}}$ را n-امین مدول همولوژی $\boldsymbol{X_\cdot}$ می‌نامیم و آن را با $H_n(\boldsymbol{X_\cdot})$ نشان می‌دهیم.

۳) همبافت $\boldsymbol{X_\cdot}$ را دقیق نامیم هرگاه برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $Im\ d_{n+1} = Ker\ d_n$. به عبارت دیگر، برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $H_n(\boldsymbol{X_\cdot}) = 0$.

ب) یک بافت یا هم‌زنجیر عبارت است از یک رشته از R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها مانند

$$\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\cdot}} : \cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^{n} \xrightarrow{d^{n}} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

به طوری که برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $Im\ d^{n-1} \subseteq Ker\ d^{n}$، و به طور خلاصه با نماد $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\cdot}} = \{X^n, d^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ نشان می‌دهیم.
بافت دقیق و n-امین مدول همولوژی نیز مشابه با قسمت (الف) تعریف می‌شوند.

بدیهی است که تفاوت این مفاهیم کاملا صوری است به گونه‌ای که با داشتن همبافت $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\cdot}} = \{X_n, d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ می‌توانیم بافت $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\cdot}} = \{X^n, d^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ را به صورت زیر به‌دست آوریم:

$$X^n := X_{-n} \qquad d^n := d_{-n} \qquad (\forall\ n \in \mathbb{Z})$$

تعریف ۱.۳۶ فرض کنیم $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\cdot}} = \{X_n, d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ و $\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{\cdot}} = \{Y_n, d'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ دو همبافت باشند. گردایه $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\cdot}} : \{X_n \to Y_n\}$ را یک تبدیل همبافت‌ها از $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\cdot}}$ به $\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{\cdot}}$ نامیم هرگاه نمودار زیر یک نمودار جابه‌جایی باشد:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & X_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & X_n & \xrightarrow{d_n} & X_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & \cdots \\
& {\scriptstyle f_n}\downarrow & & {\scriptstyle f_{n-1}}\downarrow & & {\scriptstyle f_{n-2}}\downarrow & & \\
\cdots \longrightarrow & Y_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & Y_n & \xrightarrow{d'_n} & Y_{n-1} & \xrightarrow{d'_{n-1}} & \cdots
\end{array}$$

مشابه این تعریف را برای بافت‌ها نیز داریم.

تعریف ۱.۳۷ فرض کنیم $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\cdot}}$ و $\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{\cdot}}$ دو همبافت باشند. و $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\cdot}} : \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\cdot}} \to \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{\cdot}}$ و $\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{\cdot}} : \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\cdot}} \to \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{\cdot}}$ دو تبدیل از همبافت‌ها باشند. گوییم $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\cdot}}$ و $\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{\cdot}}$ هموتوپیک هستند هرگاه یک دنباله $s_n : X_n \to Y_{n+1}$ از R-همریختی‌ها موجود باشد به طوری که به

ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، داشته باشیم:

$$f_n - g_n = d'_{n+1} s_n + s_{n-1} d_n$$

تحلیل‌های تصویری و انژکتیو:

جهت مشاهده‌ی اثبات قضایای این بخش می‌توانید از مرجع [۱۳] استفاده نمایید.

تعریف ۱.۳۸ الف) فرض کنیم A یک R-مدول باشد. در این صورت، همبافت راست (تحلیل راست) A عبارتست از همبافت $\mathbf{I}^{\cdot} = \{I^n, d^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ و R-همریختی $\varepsilon : A \to I^0$ به طوری که برای هر $n < 0$، $I^n = 0$ و رشته‌ی

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} I^n \xrightarrow{d^n} I^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

یک همبافت (همبافت دقیق) باشد و به اختصار با نماد $A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{I}^{\cdot}$ نشان داده می‌شود.

ب) تحلیل راست A را یک تحلیل انژکتیو برای A نامیم هرگاه برای هر $n \geq 0$، I^n یک R-مدول انژکتیو باشد.

تعریف ۱.۳۹ الف) فرض کنیم A یک R-مدول باشد. در این صورت، همبافت چپ (تحلیل چپ) A عبارتست از همبافت $\mathbf{P}_{\cdot} = \{P_n, d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ و R-همریختی $\varepsilon : P_0 \to A$ به طوری که برای هر $n < 0$، $P_n = 0$ و رشته‌ی

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

یک همبافت (همبافت دقیق) باشد و به اختصار با نماد $\mathbf{P}_{\cdot} \xrightarrow{\varepsilon} A$ نشان داده می‌شود.

ب) تحلیل چپ A را یک تحلیل تصویری برای A نامیم هرگاه برای هر $n \geq 0$، P_n یک R-مدول تصویری باشد.

قضیه ۱.۴۰ فرض کنیم A یک R-مدول باشد. در این صورت:

۱) A دارای تحلیل انژکتیو است.

۲) A دارای تحلیل تصویری است.

قضیه ۱.۴۱ فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری باشد. در این صورت، هر زیرمدول از R-مدول با تولید متناهی A، با تولید متناهی است.

تذکر ۱.۴۲ شایان ذکر است که با فرض نوتری بودن حلقه‌ی R، بنا به قضایای (۱.۴۰) و (۱.۴۱) نظیر هر R-مدول با تولید متناهی مانند A، می‌توان یک تحلیل تصویری متشکل از R-مدول‌های با تولید متناهی در نظر گرفت.

قضیه ۱.۴۳ فرض کنیم $\mathbf{P}_\bullet$ یک تحلیل تصویری روی R-مدول A و $\mathbf{X}_\bullet$ یک تحلیل چپ روی R-مدول B باشد. در این صورت، اگر $f : A \to B$ یک R-همریختی باشد، آن‌گاه تبدیلی از $\mathbf{P}_\bullet$ به $\mathbf{X}_\bullet$ موجود است. به علاوه اگر دو تبدیل از $\mathbf{P}_\bullet$ به $\mathbf{X}_\bullet$ موجود باشد، این دو تبدیل هموتوپیک‌اند.

لم ۱.۴۴ فرض کنیم $f : A \to A'$ یک R-همریختی باشد.

۱) فرض کنیم $\mathbf{P}_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} A$ و $\mathbf{P}'_\bullet \xrightarrow{\varepsilon'} A'$ به ترتیب تحلیل‌های تصویری برای A و A' باشند. در این صورت، یک تبدیل از $\mathbf{P}_\bullet$ به $\mathbf{P}'_\bullet$ روی f وجود دارد. به علاوه چنین تبدیلاتی با هم هموتوپیک‌اند.

۲) فرض کنیم $A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{I}^\bullet$ و $A' \xrightarrow{\varepsilon'} \mathbf{I}'^\bullet$ به ترتیب تحلیل‌های انژکتیو برای A و A' باشند. در این صورت، یک تبدیل از $\mathbf{I}^\bullet$ به $\mathbf{I}'^\bullet$ روی f وجود دارد. به علاوه چنین تبدیلاتی با هم هموتوپیک‌اند.

تابع‌گون‌های مشتق شده:

بیشتر مطالب این قسمت برگرفته از مرجع [۱۴] می‌باشد.

تعریف ۱.۴۵ فرض کنیم R یک حلقه و $F:\mathcal{C}(R)\to\mathcal{C}(R)$ یک تابع‌گون جمعی باشد. برای هر R-مدول A، یک تحلیل تصویری و یک تحلیل انژکتیو به دلخواه انتخاب می‌کنیم و آن‌ها را به ترتیب با نماد $\boldsymbol{P}_A\xrightarrow{\varepsilon}A$ و $A\xrightarrow{\varepsilon}\boldsymbol{E}_A$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم $f:A\to B$ یک همریختی از R-مدول‌ها باشد. در این صورت، بنا بر لم فوق، تبدیل‌های $\boldsymbol{f}_{\bullet}:\boldsymbol{P}_A\to\boldsymbol{P}_B$ و $\boldsymbol{f}^{\bullet}:\boldsymbol{E}_A\to\boldsymbol{E}_B$ روی f وجود دارند.

فرض کنیم $n\geq 0$.

الف) L_nF را n-امین تابع‌گون مشتق شده‌ی چپ F می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱) فرض کنیم F هموردا باشد. در این صورت،

$$(L_nF)(A)=H_n(F(\boldsymbol{P}_A))\qquad (A\in\mathcal{C}(R))$$

$$(L_nF)(f)=H_n(F(\boldsymbol{f}_{\bullet}))$$

۲) فرض کنیم F پادوردا باشد. در این صورت،

$$(L_nF)(A)=H_n(F(\boldsymbol{E}_A))\qquad (A\in\mathcal{C}(R))$$

$$(L_nF)(f)=H_n(F(\boldsymbol{f}^{\bullet}))$$

ب) R^nF را n-امین تابع‌گون مشتق شده‌ی راست F می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱) فرض کنیم F هموردا باشد. در این صورت،

$$(R^nF)(A)=H^n(F(\boldsymbol{E}_A))\qquad (A\in\mathcal{C}(R))$$

$$(R^nF)(f)=H^n(F(\boldsymbol{f}^{\bullet}))$$

۲) فرض کنیم F پادوردا باشد. در این صورت،

$$(R^nF)(A)=H^n(F(\boldsymbol{P}_A))\qquad (A\in\mathcal{C}(R))$$