دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض
گرایش آنالیز

نگاشت های خطی حافظ شبه طیف و طیف شرطی

استاد راهنما

دکتر طیبه لعل شاطری

استاد مشاور

دکتر قدیر صادقی

نگارش:

هادی قاسمی

۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

سوگند نامه دانش آموختگان دانشگاه حکیم سبزواری

اینک که به خواست آفریدگار پاک، کوشش خویش و بهره‌گیری از دانش استادان و سرمایه‌های مادی و معنوی این مرز و بوم، توشه‌ای از دانش و خرد گردآورده‌ام، در پیشگاه خداوند بزرگ سوگند یاد می‌کنم که در به‌کارگیری دانش خویش، همواره بر راه راست ودرست گام بردارم. خداوند بزرگ، شما شاهدان، دانشجویان و دیگر حاضران را به عنوان داورانی امین گواه می‌گیرم که ازهمه دانش و توان خود برای گسترش مرزهای دانش بهره گیرم و از هیچ کوششی برای تبدیل جهان به جایی بهتر برای زیستن، دریغ نورزم. پیمان می‌بندم که همواره کرامت انسانی را در نظر داشته باشم و همنوعان خود را در هر زمان و مکان تا سر حد امکان یاری دهم. سوگند می خورم که در به کارگیری دانش خویش به کاری که با راه و رسم انسانی، آیین پرهیزگاری، شرافت و اصول اخلاقی برخاسته از ادیان بزرگ الهی، به ویژه دین مبین اسلام، مباینت دارد دست نیازم. همچنین در سایه اصول جهان شمول انسانی و اسلامی، پیمان می‌بندم از هیچ کوششی برای آبادانی و سرافرازی میهن و هم میهنانم فروگذاری نکنم و خداوند بزرگ را به یاری طلبم تا همواره در پیشگاه او و در برابر وجدان بیدار خویش و ملت سرافراز، بر این پیمان تا ابد استوار بمانم.

نام و نام خانوادگی: هادی قاسمی

تاریخ و امضا:

تأییدیه‌ی هیأت داوران جلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه

نام دانشکده: دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

نام دانشجو: هادی قاسمی

عنوان پایان‌نامه: نگاشت های خطی حافظ شبه طیف و طیف شرطی

تاریخ دفاع: ۱۳۹۲

رشته: ریاضی محض

گرایش: آنالیز

تأییدیه‌ی صحت و اصالت نتایج

باسمه تعالی

اینجانب هادی قاسمی به شماره دانشجویی ۹۰۲۳۱۲۲۰۳۵ دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد تأیید می‌نمایم که کلیه‌ی نتایج این پایان‌نامه حاصل کار اینجانب و بدون هرگونه دخل و تصرف است و موارد نسخه‌برداری‌شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر کرده‌ام. درصورت اثبات خلاف مندرجات فوق، به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم (قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان و قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی، ضوابط و مقررات آموزشی، پژوهشی و انضباطی ...) با اینجانب رفتار خواهد شد و حق هرگونه اعتراض درخصوص احقاق حقوق مکتسب و تشخیص و تعیین تخلف و مجازات را از خویش سلب می‌نمایم. در ضمن، مسؤولیت هرگونه پاسخگویی به اشخاص اعم از حقیقی و حقوقی و مراجع ذی‌صلاح (اعم از اداری و قضایی) به عهده‌ی اینجانب خواهد بود و دانشگاه هیچ‌گونه مسؤولیتی در این خصوص نخواهد داشت.

نام و نام خانوادگی: هادی قاسمی

تاریخ و امضا:

مجوز بهره‌برداری از پایان‌نامه

بهره‌برداری از این پایان‌نامه در چهارچوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می‌شود، بلامانع است:

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه برای همگان بلامانع است.

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه با اخذ مجوز از استاد راهنما، بلامانع است.

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه تا تاریخ .... ممنوع است.

استاد راهنما: دکتر طیبه لعل شاطری

تاریخ:

امضا:

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، سرکار خانم دکتر طیبه لعل شاطری، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر صادقی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

و به رسم ادب بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسر مهربانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودش، که بهترین پشتیبان من بود.

در پایان این رساله را پیشکش می کنم به محضر قدسی امیر عالمیان، علی (ع).

هادی قاسمی

۱۳۹۲

چکیده

در این پایان نامه نگاشت های خطی حافظϵ- شبه طیف و ϵ- طیف شرطی بین جبرهای باناخ یکدار رامورد مطالعه قرار می دهیم. یکی از نتایج جالبی که به آن می رسیم حافظ طیف بودن نگاشت های حافظϵ- شبه طیف است که در بسیاری از حالات این نگاشت یک یکریختی یکمتر می شود. ابتدا نگاشت های ϵ–شبه طیف،ϵ- طیف شرطی،ϵ- تقریبا ضربی را تعریف می کنیم سپس روابط بین شبه طیف و طیف شرطی یک عضو از جبر باناخ مختلط یکدار را بررسی کرده و قضیه ای مشابه با قضیه زلاسکو را برای ϵ- شبه طیف ثابت می کنیم. در نهایتϵ- آشفتگی یک جبر باناخ یکدار را مطالعه و خواص و روابطی را بین طیف، شبه طیف و طیف شرطی یک عنصر و آشفتگی آن را به دست می آوریم.

واژگان کلیدی: شبه طیف، طیف شرطی، نگاشت تقریبا ضربی، حافظ خطی، آشفتگی

فهرست مطالب

پیشگفتار ۱

فصل ۱: تعاریف و پیشنیازها ۳

۱–۱ جبرهای باناخ و C^*-جبرها ۳

۱–۲ شبه طیف و طیف شرطی ۹

۱–۳ عملگرهای لورانت ۱۳

فصل ۲: نگاشت های خطی حافظ شبه طیف و طیف شرطی ۱۵

۲–۱ نگاشت های تقریبا ضربی ۱۵

۲–۲ جفت های $AMNM$ ۲۲

۲–۳ نگاشتهای خطی حافظ ۲۴

فصل ۳: آشفتگی جبری و طیف شرطی ۴۶

۳–۱ معرفی آشفتگی ۴۶

۳–۲ ویژگی های ϵ-آشفتگی ۴۹

مراجع ۵۶

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۵۹

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۶۲

پیشگفتار

تعمیم های بسیاری از مفهوم طیف وجود دارد از جمله آن ها طیف تعمیم یافته رانسفورد [۱] ، ϵ–شبه طیف و ϵ–طیف شرطی است. برخلاف طیف که یک مفهوم کاملا جبری است، هم ϵ–شبه طیف و هم ϵ–طیف شرطی به نرم وابسته اند و هر دوی این مجموعه ها شامل طیف نیز هستند.

مسایل حافظ خطی بودن یک موضوع تحقیقاتی فعال در نظریه ماتریس ها و نظریه عملگرهاست. مولنار [۲] در سال ۲۰۰۷ اطلاعات مفصلی در مورد این مسایل ارایه داده است. در این میان مساله توصیف نگاشت های حافظ طیف مورد توجه بیشتری بوده است که از جمله مارکوس [۳] و مویلز [۴] (۱۹۵۹)، جعفریان [۵] و سرور [۶] (۱۹۸۶) و سرور (۱۹۹۶) به آن پرداخته اند. هم چنین آلامینوس [۷]، اکستریمرا [۸] و ویلنا [۹] در سال ۲۰۱۱ نگاشت های حافظ طیف تقریبی را بررسی کرده اند. کولکارنی [۱۰] و سوکومار [۱۱] نیز در سال ۲۰۰۸ طیف شرطی را مطالعه کردند و در ادامه در سال ۲۰۱۲، کومار [۱۲] و کولکارنی نگاشت های حافظ شبه طیف و طیف شرطی را مورد بحث و بررسی قرار داده اند.

[۱] Ransford
[۲] Molnar
[۳] Marcus
[۴] Moyls
[۵] Jafarian
[۶] Sourour
[۷] Alaminos
[۸] Extremera
[۹] Villena
[۱۰] Kulkarni
[۱۱] Sukumar
[۱۲] Kumar

در این پایان نامه با استفاده از مقاله های

1. G. Krishns Kumar, *Linear maps preserving pseudospectrum and condition spectrum*, Banach J. Math. Anal. 6 (2012), no, 1, 45-60.

2. B.E. Johnson, *Approximately multiplicative maps between Banach algebras*, J. London Math. Soc. (2) 37 (1988), no. 2, 294-316.

3. S.H. Kulkarni and D. Sukumar, *Almost multiplicative functions on commutative Banach algebras*, Studia Math. 197 (2010), no. 1, 93-99.

خواص شبه طیف و طیف شرطی یک عنصر در جبر باناخ مختلط یکدار و روابط بین شبه طیف و طیف شرطی را بررسی می کنیم. هم چنین نگاشت های خطی بین جبرهای باناخ یکدار که شبه طیف و طیف شرطی را حفظ می کنند مطالعه کرده، با تعریف ϵ-شبه طیف و ϵ-طیف شرطی و نگاشت ϵ-ضربی تقریبی نشان می دهیم یک نگاشت حافظ ϵ-شبه طیف، طیف را نیز حفظ می کند که در بسیاری از حالات این نگاشت یک یکریختی یکمتر می شود. در نهایت ϵ-آشفتگی یک جبر باناخ یکدار را مطالعه و خواص و روابطی را بین طیف، شبه طیف و طیف شرطی یک عنصر و آشفتگی آن را به دست می آوریم.

فصل ۱

تعاریف و پیشنیازها

در این فصل با معرفی جبرهای باناخ، C^*-جبرها و عملگرهای لورانت، به بیان تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصل های بعد می پردازیم.

۱-۱ جبرهای باناخ و C^*-جبرها

در این بخش ابتدا جبرهای باناخ و C^*-جبرها را معرفی می کنیم سپس قضیه های مقدماتی را بیان می کنیم.

تعریف ۱-۱-۱. یک فضای برداری A روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ که در آن ضرب

$$A \times A \longrightarrow A \qquad ; \qquad (a,b) \longrightarrow ab$$

تعریف شده است و برای هر $x, y, z \in A$ و هر اسکالر α در روابط

$$x(yz) = (xy)z$$

$$x(y+z) = xy + xz$$

$$(x+y)z = xz + yz$$

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$$

صدق کند را یک جبر مختلط گوییم.

تعریف ۱-۱-۲. جبر A را یکدار [۱] گوییم هرگاه $e \in A$ وجود باشد به طوری که

$$ea = ae = a \qquad (a \in A)$$

در این صورت e را یکه [۲] A گوییم.

تعریف ۱-۱-۳. جبر A را نرمدار گوییم هرگاه نرم $\|\cdot\|$ روی A موجود باشد به طوری که

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \qquad (x, y \in A).$$

تعریف ۱-۱-۴. اگر جبر نرمدار A نسبت به نرم یک فضای باناخ باشد، A را جبر باناخ [۳] گوییم.

ملاحظه ۱-۱-۵. *اگر A جبر باناخ یکدار با عضو یکه e باشد آن گاه قرارداد می کنیم* $\|e\| = ۱$.

تعریف ۱-۱-۶. فرض کنید A جبر یکدار با عضو یکه e باشد و $a \in A$. در این صورت

[۱] unital
[۲] unit
[۳] Banach algebra

۱. a را معکوس پذیر چپ [۴] گوییم هرگاه $b \in A$ موجود باشد به طوری که

$$ba = e$$

۲. a را معکوس پذیر راست [۵] گوییم هرگاه $b \in A$ موجود باشد به طوری که

$$ab = e$$

۳. a را معکوس پذیر [۶] گوییم هرگاه $b \in A$ موجود باشد به طوری که

$$ba = ab = e$$

مجموعه عناصر معکوس پذیر A را با $Inv(A)$ نشان می دهیم.

مثال ۱-۱-۷. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. در این صورت $BL(X)$ یعنی جبر همه عملگرهای خطی کراندار روی X یک جبر باناخ نسبت به نرم معمولی است و عملگر همانی I عنصر همانی آن است.

مثال ۱-۱-۸. مجموعه اعداد مختلط با نرم قدر مطلق یک جبر باناخ است.

قضیه ۱-۱-۹. *فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار باشد و $a \in A$ به طوری که ۱ $> \|a\|$ در این*

[۴] left invertible
[۵] right invertible
[۶] invertible

صورت

$$(۱-a)^{-۱} = \sum_{n=۰}^{\infty} a^n \qquad \text{و} \qquad ۱-a \in Inv(A)$$

برهان. از آنجا که

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \|a^n\| \leq \sum_{n=۰}^{\infty} \|a\|^n = (۱-\|a\|)^{-۱} < \infty$$

بنابراین سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a^n$ به عضوی مانند $b \in A$ همگراست. حال اگر $n \longrightarrow \infty$ میل کند

$$۱-a^{n+۱} = (۱-a)(۱+a+\cdots+a^n) = (۱+a+\cdots+a^n)(۱-a)$$

همگراست به

$$۱ = (۱-a)b = b(۱-a)$$

بنابراین b معکوس $۱-a$ است. ■

تعریف ۱-۱-۱۰. جبر مختلط A مفروض است. یک برگشت [۷] در جبر A نگاشت $* : A \longrightarrow A$ است به طوری که به ازای هر $x, y \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ در روابط زیر صدق می کند.

$$(x^*)^* = x \qquad \text{و} \qquad (x+y)^* = x^* + y^*$$

$$(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^* \qquad \text{و} \qquad (xy)^* = y^* x^*$$

یک جبر مختلط دارای برگشت را $*$-جبر گوییم.

[۷] involution

تعریف ۱-۱-۱۱. جبر نرمدار A به همراه برگشت $x \longrightarrow x^*$ را یک $*$-جبر نرمدار گوییم هرگاه

$$\|x\| = \|x^*\| \qquad (x \in A).$$

علاوه بر این اگر A باناخ باشد آن گاه $*$-جبر باناخ نامیده می شود.

تعریف ۱-۱-۱۲. یک $*$-جبر باناخ که

$$\|x^*x\| = \|x\|^۲ \qquad (x \in A)$$

یک C^*-جبر [۸] نامیده می شود.

مثال ۱-۱-۱۳. مجموعه اعداد مختلط را با نرم قدر مطلق در نظر می گیریم. اگر مزدوج هر عدد مختلط را به عنوان برگشت آن عدد در نظر بگیریم آن گاه $\mathbb{C}$ یک C^*-جبر است.

مثال ۱-۱-۱۴. مجموعه همه ماتریس های مربعی یک C^*-جبر است.

تعریف ۱-۱-۱۵. اگر A یک C^*-جبر باشد، و $x \in A$ آن گاه

۱. x را خودالحاق [۹] گویند هرگاه $x = x^*$.

۲. x را نرمال [۱۰] گویند هر گاه $xx^* = x^*x$.

تعریف ۱-۱-۱۶. فرض کنید A یک جبر باناخ با عضو یکه e باشد. با یکی گرفتن $\lambda \cdot e$ و λ طیف

[۸] C*-algebra
[۹] self-adjoint
[۱۰] normal

[۱۱] یک عضو $a \in A$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \lambda - a \notin Inv(A)\}.$$

تعریف ۱-۱-۱۷. فرض کنید Aیک جبر باناخ یکدار و $a \in A$. شعاع طیفی [۱۲] a به صورت زیر تعریف می شود

$$r(a) = \{\sup |\lambda| \ : \ \lambda \in \sigma(a)\}.$$

قضیه ۱-۱-۱۸. *اگر A یک جبر باناخ باشد و $x \in A$ آن گاه*

$$r(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

برهان. رجوع شود به مرجع [۱] قضیه ۱۳.۱۰. ■

قضیه ۱-۱-۱۹. *اگر x عضوی خود الحاق از یک C^*-جبر باشد، آن گاه*

$$r(x) = \|x\|.$$

برهان. واضح است که

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|x^2\|$$

و با استقرا نشان داده می شود که

$$\|x\|^{2^n} = \|x^{2^n}\|$$

[۱۱] spectrum

[۱۲] spectral radius

بنابراین

$$r(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|x\|.$$

■

قضیه ۱-۱-۲۰. *اگر x عضوی نرمال از یک C^*-جبر باشد، آن گاه* $r(x) = \|x\|$.

برهان.

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = r(x^*x) \leq r(x^*)r(x) \leq \|x^*\|\|x\| = \|x\|^2.$$

بنابراین $r(x) = \|x\|$. ■

۱-۲ شبه طیف و طیف شرطی

در این بخش با مفاهیم شبه طیف و طیف شرطی آشنا می شویم و رابطه بین شبه طیف و طیف شرطی عضوی از یک جبر باناخ را بررسی می کنیم.

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنید A یک جبر باناخ مختلط یکدار باشد و $\epsilon > 0$. در این صورت ϵ-شبه طیف [۱۳] یک عضو $a \in A$ را با نماد $\Lambda_\epsilon(a)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\Lambda_\epsilon(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \|(\lambda - a)^{-1}\| \geq \frac{1}{\epsilon}\}.$$

در تعریف فوق اگر $\lambda - a$ معکوس پذیر نباشد آن گاه قرار می دهیم

$$\|(\lambda - a)^{-1}\| = \infty$$

[۱۳] ϵ-pseudospectrum

. بنابراین برای هر $\epsilon > 0$ همواره $\sigma(a) \subseteq \Lambda_\epsilon(a)$.

تعریف ۱-۲-۲. فرض کنید A یک جبر باناخ مختلط یکدار باشد و $0 < \epsilon < 1$. در این صورت ϵ-طیف شرطی [۱۴] یک عضو $a \in A$ را با نماد $\sigma_\epsilon(a)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\sigma_\epsilon(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \|\lambda - a\|\|(\lambda - a)^{-1}\| \geq \frac{1}{\epsilon}\}.$$

به طور مشابه اگر $\lambda - a$ معکوس پذیر نباشد آن گاه قرار می دهیم

$$\|\lambda - a\|\|(\lambda - a)^{-1}\| = \infty$$

. بنابراین برای هر $0 < \epsilon < 1$ همواره $\sigma(a) \subseteq \sigma_\epsilon(a)$.

تعریف ۱-۲-۳. فرض کنید A, ϵ در شرایط تعریف ۱-۲-۲ صدق کند. ϵ-شعاع طیف شرطی [۱۵] یک عضو $a \in A$ را با نماد $r_\epsilon(a)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$r_\epsilon(a) = \{\sup |\lambda| \ : \ \lambda \in \sigma_\epsilon(a)\}.$$

گزاره ۱-۲-۴. *فرض کنید A, ϵ در شرایط تعریف ۱-۲-۲ صدق کنند. در این صورت*

$$r(a) \leq r_\epsilon(a) \leq (\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon})\|a\|.$$

برهان. چون $\sigma(a) \subseteq \sigma_\epsilon(a)$ لذا $r(a) \leq r_\epsilon(a)$. حال فرض کنید $\lambda \in \sigma_\epsilon(a)$ در این صورت اگر

[۱۴] ϵ-condition spectrum

[۱۵] ϵ-condition spectral radius

$\|a\| \leq |\lambda|$ آن گاه به وضوح داریم

$$|\lambda| \leq \frac{۱+\epsilon}{۱-\epsilon}\|a\|$$

و اگر $|\lambda| > \|a\|$ آن گاه $\lambda - a$ معکوس پذیر است و داریم

$$\|(\lambda - a)^{-۱}\| \leq \frac{۱}{|\lambda| - \|a\|}$$

بنابراین

$$۱ \leq \epsilon\|(\lambda - a)^{-۱}\|\|\lambda - a\| \leq \epsilon\frac{|\lambda| + \|a\|}{|\lambda| - \|a\|}$$

و در نتیجه

$$|\lambda| \leq \frac{۱+\epsilon}{۱-\epsilon}\|a\|.$$

■

در ادامه دو گزاره مطرح می شود که رابطه ی بین شبه طیف و طیف شرطی یک عضو از یک جبر باناخ مختلط یکدار را بیان می کند.

گزاره ۱-۲-۵. *فرض کنید A یک جبر باناخ مختلط یکدار باشد، $a \in A$ و $۰ < \epsilon < ۱$. در این صورت*

$$\sigma_\epsilon(a) \subseteq \Lambda_{\frac{۲\epsilon\|a\|}{۱-\epsilon}}(a).$$

برهان. فرض کنید $\lambda \in \sigma_\epsilon(a)$، لذا داریم

$$|\lambda| \leq \frac{(۱+\epsilon)\|a\|}{۱-\epsilon}$$

و بنابراین

$$\|\lambda - a\| \leq |\lambda| + \|a\| \leq \frac{(1+\epsilon)\|a\|}{1-\epsilon} + \|a\| = \frac{2\|a\|}{1-\epsilon}$$

از طرفی چون $\lambda \in \sigma_\epsilon(a)$ داریم

$$\|\lambda - a\|\|(\lambda - a)^{-1}\| \geq \frac{1}{\epsilon}$$

بنابراین

$$\|(\lambda - a)^{-1}\| \geq \frac{1}{\epsilon\|\lambda - a\|} \geq \frac{1-\epsilon}{2\epsilon\|a\|}.$$

■

گزاره ۱-۲-۶. *فرض کنید A یک جبر باناخ مختلط یکدار باشد و $\epsilon > 0$. اگر $a \in A$ مضرب اسکالری از e نباشد و تعریف کنیم*

$$M_a = \inf\{\|z - a\| \ : \ z \in \mathbb{C}\}$$

آن گاه

$$\Lambda_\epsilon(a) \subseteq \sigma_{\frac{\epsilon}{M_a}}(a).$$