دانشکده علوم ریاضی

**پایان نامه کارشناسی ارشد**

# روش انتگرال اول و مقایسه آن با روش بسط تابع بیضوی ژاکوبی

از :

**زهرا اصلان پناه**

**استاد راهنما :**

**دکتر جعفر بی‌آزار**

**شهریور ۱۳۹۱**

بسم الله الرحمن الرحیم

**دانشکده علوم ریاضی**

**گروه ریاضی (کاربردی)**

# روش انتگرال اول و مقایسه آن با روش بسط تابع بیضوی ژاکوبی

از :

**زهرا اصلان پناه**

استاد راهنما :

**دکتر جعفر بی‌آزار**

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر بسیار عزیز، دلسوز و فداکارم که پیوسته جرعه نوش جام تعلیم ، تربیت، فضیلت و انسانیت آن ها بوده ام و همواره چراغ وجودشان روشنگر راه من در سختی ها و مشکلات بوده است.

# فهرست مطالب

عنوان صفحه

تقدیر و تشکر

خدایا...

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی همراه، جهاد بی سلاح، کار بی پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی دنیا، مذهب بی عوام، عظمت بی نام، ایمان بی ریا، خوبی بی نمود، گستاخی بی خامی، قناعت بی غرور، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی آنکه دوست بداند، روزی کن.

با تقدیر و تشکر شایسته از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر بی آزار که با نکته های دلاویز و گفته های بلند، صحیفه های سخن را علم پرور نمودند و همواره رهنما و ره گشای نگارنده در اتمام و اکمال پایان نامه بوده است.

از آقایان دکتر تقی زاده و دکتر خجسته برای قبول زحمت داوری سپاسگذارم.

از دکتر آیاتی و دکتر ابراهیمی که تجربیات خود را صادقانه در اختیارم نهادند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

## چکیده

**روش انتگرال اول و مقایسه آن با روش بسط تابع بیضوی ژاکوبی**

**زهرا اصلان پناه**

روش‌های انتگرال اول و بسط تابع بیضوی ژاکوبی، از روش‌های بسیار مفید برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی هستند که در آن‌ها علاوه بر به‌دست آوردن جواب‌های دقیق، می‌توان به جواب‌های تکراری و سولیتونی نیز دست یافت. در این پایان نامه این روش‌ها برای بسیاری از معادلات و دستگاه‌ها به کار رفته اند و نتایج به‌دست آمده حاکی از کارآمدی و سادگی این روش ها است.

برای انجام محاسبات از میپل ۱۵ استفاده شده است.



**کلید واژه** : روش انتگرال اول، روش بسط تابع بیضوی ژاکوبی، معادله با مشتقات جزئی، جواب دقیق، جواب سولیتونی، جواب تکراری.

## پیشگفتار

معادلات دیفرانسیل بخش عمده‌ای از آنالیز نوین و مهمترین بخش ریاضیات برای درک علوم طبیعی است. علاوه بر آن وسیله‌ای بسیار عالی برای درک ارتباط بین ریاضیات با علوم فیزیکی و مهندسی است.

در سال‌های اخیر، بسیاری از محققین علوم و مهندسی، به دنبال روش‌هایی هستند که به کمک آن، بتوانند برای معادلات غیر خطی با مشتقات جزئی جواب دقیق به‌دست آورند. برای نائل شدن به این هدف، از روش‌هایی مانند روش تعادل همگن[۱]، روش توابع هایپربولیک[۲]، روش تابع نمایی[۳]، روش تانژانت هایپربولیک [۴]و ... استفاده می‌شود. در بعضی از این روش‌ها می‌توان علاوه بر جواب مذکور، به جواب‌های سولیتونی، جواب‌های تکراری، جواب‌های شوک، و ... نیز دست یافت.

در این پایان‌نامه، در **فصل اول** تعاریف و مفاهیم اولیه بیان می‌شوند. **فصل دوم** به شرح روش انتگرال اول و حل چند معادله با استفاده از این روش اختصاص دارد. در **فصل سوم** توابع بیضوی ژاکوبی معرفی شده و روش بسط تابع بیضوی ژاکوبی به همراه چند مثال شرح داده شده است. **فصل چهارم** جواب‌های روش انتگرال اول و روش بسط تابع بیضوی ژاکوبی بررسی شده‌اند.

---

[۱] Homogeneous Balance e method
[۲] Hyperbolic function method
[۳] Exp function method
[۴] Tanh method

# فصل اول

# تعاریف و مفاهیم مقدماتی

## ۱-۱ : تعریف و نمادگذاری

**تعریف ۱-۱-۱ :** معادله دیفرانسیل، بیانگر یک تابع مجهول از یک یا چند متغیر مستقل و مشتق‌های مرتبه‌های مختلف آن، نسبت به متغیرهای مستقل است. بسیاری از قوانین عمومی طبیعت، طبیعی‌ترین بیان خود را در زبان معادلات دیفرانسیل می‌یابند.کاربردهای معادلات دیفرانسیل علاوه بر ریاضیات، درعلوم مهندسی و اقتصاد و ... است.

**تعریف ۱-۱-۲ :** فرض کنیم $y$ فقط تابعی از متغیر مستقل $x$ است. معادله‌ای که شامل $y$ و مشتقات آن بر حسب $x$ باشد، را معادله دیفرانسیل معمولی[۱] می‌نامیم. اگر $y$ تابعی از دو یا چند متغیر مستقل باشد، آن‌گاه مشتقات $y$، مشتقات جزئی هستند. معادله‌ای که شامل $y$ و مشتقات جزئی آن باشد را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی[۲] می‌نامند.

معادلات دیفرانسیل معمولی در چهار دسته طبقه‌بندی می‌شوند:

(۱) **نوع**، معمولی یا جزئی؛

(۲) **مرتبه**، بالاترین مرتبه مشتق موجود در یک معادله دیفرانسیل، مرتبه آن معادله را نشان می‌دهد.

(۳) **درجه**، بزرگترین توان بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل، بعد از آن‌که کسرها و رادیکال‌های مربوط به متغیر وابسته و مشتقات آن از معادله حذف شوند، درجه آن معادله دیفرانسیل را نشان می‌دهد.

(۴) **خطی یا غیرخطی.**

در حالت کلی، یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه $n$ را به‌صورت زیر نشان می‌دهند

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

**تعریف ۱-۱-۳ :** معادله دیفرانسیل مرتبه $n$، $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ را خطی گویند، هرگاه $F$ تابعی خطی بر حسب $y$، $y'$، ...، $y^{(n)}$ باشد. بنابراین یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه $n$ به صورت زیر است

$$f(x) = f_0(x)\,y + f_1(x)\,y' + \dots + f_n(x)\,y^{(n)}$$

---

[۱] Ordinary differential equation

[۲] partial differential equation

که در آن $f(x)$ ,$f_i(x)$ برای هر $0 \le i \le n$، توابعی برحسب $x$ هستند.

**تعریف ۱-۱-۴ :** یک معادله دیفرانسیل جزئی را همگن گوییم، در صورتی که هر جمله آن شامل متغیر وابسته و یا یکی از مشتق‌های آن باشد.

**مثال ۱-۱-۱ :** معادله دیفرانسیل معمولی

۱) $(y''')^2 + (y'')^4 + (x^2+1)\,y = \cos x,$

از مرتبه سه، درجه دو، و غیر خطی؛

۲) $(y''')^3 + (y'')^4 + y' = x,$

از مرتبه سه، درجه سه، و غیر خطی؛

۳) $y'' + (3y')^3 + 2x = 5,$

از مرتبه دو و درجه یک و غیرخطی؛

و مثالی از معادلات دیفرانسیل جزئی

۱) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2},$

معادله با مشتقات جزئی، از مرتبه دو، درجه یک و همگن است؛

۲) $u\,u_x + u_y^2 = u^2 + y.$

معادله با مشتقات جزئی، از مرتبه یک، درجه دو و ناهمگن است.

**تعریف ۱-۱-۵** : به هر آشفتگی در محیط، که در فضا یا فضازمان منتشر می‌شود و اغلب حامل انرژی است، **موج** گویند.

اگر این آشفتگی در میدان الکترومغناطیسی باشد، آن را موج الکترومغناطیسی می‌نامند. در امواج الکترومغناطیسی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به طور عمود بر یکدیگر نوسان می‌کنند و با سرعت نور انتشار پیدا می‌کنند. نور و امواج رادیویی از این نوع هستند.

موج‌ها به دو دسته امواج طولی و امواج عرضی تقسیم می‌شوند. در امواج طولی، سرعت انتشار موج، موازی با حرکت نوسانی آن است، در حالی‌که، در امواج عرضی، این سرعت عمود بر آن است. امواج الکترومغناطیسی از نوع امواج عرضی هستند.

به عقیده ریاضیدانان، ساده‌ترین و اساسی‌ترین موج، انواع موج هارمونیک سینوسی است که آن را با $f(x,t)=A\sin(wt-cx)$، توصیف می‌کنند. که در آن $A$، دامنه موج است.

معادله موج، یک معادله دیفرانسیلی است که در هر زمان، تحول موج هارمونیک را توصیف می‌کند.

**تعریف ۱-۱-۶** : در محیط انتشار موج، مکان هندسی نقطه‌های هم فاز، را جبهه موج[۳] می‌نامند. مثلاً در امواج کروی حاصل از یک منبع صوت در هوا، جبهه‌های موج به‌صورت کره‌هایی با مرکز مشترک منبع صوت خواهند بود زیرا کلیه نقاط واقع برروی این کره، دارای فاصله یکسان از منبع صوت هستند و به این علت هم‌فاز می‌باشند.

**تعریف ۱-۱-۷** : اگر جبهه موج به صورت یک صفحه باشد به آن، **موج تخت** می‌گویند.

به‌طور مثال، در فاصله‌های دور از یک منبع موج کروی سطح کره‌های موج یا جبهه‌های موج، تقریبا به‌صورت سطح یا تخت هستند، به این علت به آن‌ها موج تخت می‌گویند.

**تعریف ۱-۱-۸ : امواج سیار**[۴] امواجی که به صورت $u(x,t)=f(x-ct)$ نمایش داده می‌شوند، امواج سیار نامیده می‌شوند. چنین تابعی، آشفتگی‌ای را نشان می‌دهد که با سرعت $c$ حرکت می‌کند.

**جواب موج سیار**[۵] یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، جوابی است که به صورت $u(x,t)=f(x-ct)$ نوشته می‌شود.

[۳] Front Wave
[۴] Travelling Wave
[۵] Travelling wave solution

**تعریف ۱-۱-۹** : موج شوک[۶] به ایجاد، انتشار، و یا پیشروی جبهه‌ای از تغییرات ناگهانی و برش گونه در منحنی، مقادیر حالات و مشخصات محیط‌ها، اطلاق می‌شود.

جوابی از معادله میدان را، موضعی می‌نامیم، که چگالی انرژی آن در زمان $t$، در منطقه‌ی محدودی از فضا، مقدار غیر بی‌نهایت، و در بی‌نهایت به صفر حرکت کند و در آن ناحیه انتگرالپذیر باشد.

**تعریف ۱-۱-۱۰ : موج منفرد**، به جوابی از معادله میدان غیرخطی، که موضعی بوده و خاصیت زیر را داشته باشد گفته می‌شود

$$\varepsilon(x,t)=\varepsilon(x-ct)$$

به بیان دیگر، چگالی انرژی با سرعت ثابت بی‌تغییر بماند.

**تعریف ۱-۱-۱۱** : در ریاضیات و فیزیک، **سولیتون**[۷] یک موج منفرد خود تقویت کننده ( یک بسته موج یا پالس) است که وقتی

با سرعت ثابت حرکت می‌کند شکل خود را حفظ می‌کند. سولیتون در نتیجه خنثی سازی آثار غیرخطی و پاشندگی در محیط حاصل می‌شود. اگر $u(x,t)=u(x-ct)=u(\varepsilon)$، و داشته باشیم $\lim\limits_{\varepsilon\to-\infty} u(\varepsilon)=\alpha$ و $\lim\limits_{\varepsilon\to+\infty} u(\varepsilon)=\beta$، آن‌گاه اگر $\alpha=\beta$ باشد، موج را سولیتون می‌نامیم. معمولا $\alpha=\beta=0$.

به موجی که سه خاصیت زیر را داشته باشد سولیتون گفته می‌شود

۱) شکل آن تغییر نکند.

۲) در منطقه‌ای از فضا، محدود باشد.

۳) بعد از برخورد با موج دیگر شکل خود را حفظ کند، مگر با یک انتقال فاز.

**تعریف ۱-۱-۱۲ : جواب‌های پریودیک**[۸] جواب‌هایی هستند که به‌طور متناوب تکرار می شوند.

یک یا چند معادله غیرخطی که جواب موج منفرد آن‌ها $\varepsilon_0(x-ct)$ باشد را در نظر می‌گیریم. اگر $N$ موج منفرد این جواب، با سرعت‌ها و محل‌های دلخواه، یک موج با انرژی $\varepsilon(x,t)$ تشکیل دهد، آن‌گاه

---

[۶] Shock wave
[۷] Soliton solution
[۸] Periodic solution

$$\varepsilon(x,t) \to \sum_{i=m}^{n} \varepsilon(x-a_i-c_i t) \qquad t\to -\infty$$

اینک، اگر رابطه

$$\varepsilon(x,t) \to \sum_{i=m}^{n} \varepsilon(x-a_i-c_i t+\delta_i) \qquad t\to +\infty$$

برقرار باشد، این موج منفرد، را سولیتون می‌گوییم.

**تعریف ۱-۱-۱۳ : جواب‌های عمومی، خصوصی و منفرد**

جوابی از یک معادله دیفرانسیل که شامل تعدادی ثابت باشد را جواب عمومی یا جواب کامل می‌نامند، تعداد ثابت‌ها باید برابر با مرتبه معادله دیفرانسیل باشد.

به عنوان مثال، $y = c_1\cos x + c_2 \sin x$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$ است.

جوابی از معادله دیفرانسیل که با جای‌گذاری مقادیر عددی به جای همه‌ی ثابت‌ها از جواب عمومی به‌دست آید، را جواب خصوصی می‌نامند.

به عنوان مثال $y = \cos x + \sin x$ و $y = \cos x$ جواب‌های خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$ هستند.

جواب عمومی باید شامل همه جواب‌های معادله دیفرانسیل باشد. یعنی جواب‌های خصوصی باید با نسبت دادن مقدارهای مناسب به ثابت‌ها از جواب عمومی به‌دست آیند. معادلات دیفرانسیلی موجودند که همه جواب‌های آن‌ها از جواب عمومی به‌دست نمی‌آیند،

جوابی از معادله دیفرانسیل که از جواب عمومی حاصل نشود را جواب منفرد می‌نامند.

به‌عنوان مثال، $y = -\dfrac{x^2}{4}$ یک جواب منفرد از معادله دیفرانسیل $y = x y' + y'^2$ است که از جواب عمومی آن یعنی $y = c x + c^2$ به‌دست نمی‌آید.

# فصل دوم

# روش انتگرال اول

**۲-۱ : مقدمه**

روش انتگرال اول، که بر اساس قضیه حلقه در جبر تعویض‌پذیر است، اولین بار توسط فنگ[۱] [۱] در سال ۲۰۰۲ برای حل معادله برگرز-کی دی وی پیشنهاد شد. این روش مفید، مورد استقبال بسیاری از ریاضیدانان [۶-۲] برای حل معادلات مختلف قرار گرفت. هدف این فصل، پیدا کردن جواب‌های دقیق برای معادله‌های مختلف به کمک روش انتگرال اول است.

**۲-۲ : روش انتگرال اول**

معادله غیرخطی با مشتقات جزئی، را برای تابع $u$، که به دو متغیر حقیقی $x$ و $t$ وابسته است، در نظر بگیرید

$$F(u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{tt}, u_{xx}, \dots) = 0. \tag{۲-۱}$$

تغییر متغیر $\xi = kx + wt$ و $u(x,t) = U(\xi)$، را که در آن $\xi$، $k$، و $w$ ثابت‌های دلخواه هستند، تعریف می‌کنیم.

بنا به قاعده مشتق زنجیری، داریم

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(.) = w\frac{d}{d\xi}(.), \quad \frac{\partial}{\partial x}(.) = k\frac{d}{d\xi}(.), \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}(.) = w^2\frac{d}{d\xi}(.),\\ &\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}(.) = kw\frac{d^2}{d\xi^2}(.), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(.) = k^2\frac{d^2}{d\xi^2}(.).\end{aligned} \tag{۲-۲}$$

با این تعریف معادله (۲-۱)، به معادله دیفرانسیل معمولی زیر تبدیل می‌شود

$$P(U, wU', kU', kwU'', w^2U'', k^2U'', \dots) = 0, \tag{۲-۳}$$

اگر معادله (۲-۳)، نسبت به بالاترین مرتبه مشتق $U$ قابل حل باشد، آن‌گاه توابع جدید زیر را تعریف می‌کنیم

$$V(\xi) = U(\xi), \quad W(\xi) = U'(\xi) \tag{۲-۴}$$

به کمک این توابع، معادله دیفرانسیل معمولی به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود

$$\begin{cases} V'(\xi) = W(\xi), \\ W'(\xi) = P(V(\xi), W(\xi)). \end{cases} \tag{۲-۵}$$

به کمک قضیه کیفی معادلات دیفرانسیل معمولی [۷] ، اگر انتگرال دستگاه (۲-۵) تحت شرایط مشابه، پیدا شود آن‌گاه جواب‌های کلی دستگاه (۲-۵)، به طور مستقیم به‌دست می‌آیند. اما چون هیچ نظریه نظام مندی وجود ندارد که، چگونه انتگرال اول را پیدا

[۱] Feng

کنیم بنابراین قضیه تقسیم را برای دستگاه (۲-۵) به کار می‌بریم تا معادله (۲-۳) را به یک دستگاه انتگرال پذیر تبدیل کند و به این ترتیب یک جواب دقیق برای معادله (۲-۱)، به‌دست می‌آید.

**تعریف ۲-۲-۱** : فرض کنیم $F$ یک میدان باشد،چند جمله‌ای غیر ثابت $f(X)$ روی میدان $F$ را تحویل ناپذیر[۲] گوییم اگر $f(X)=p(X)q(X)$ آن‌گاه $p(X)$ یا $q(X)$ باید چند جمله‌ای ثابت باشد.

مثال ۲-۲-۱ : چند جمله ای $X^2+1$ در $R[X]$ تحویل ناپذیر است اما در $\mathbb{C}[X]$ تحویل پذیر است چون

$$X^2+1=[X+i][X-i].$$

**قضیه تقسیم[۳] ۲-۲-۱ :** فرض می‌کنیم که $P(w,z)$ و $Q(w,z)$ دو چند جمله‌ای در فضای $\mathbb{C}(w,z)$ باشند و $P(w,z)$ در $\mathbb{C}(w,z)$ تحویل‌ناپذیر باشد. اگر $Q(w,z)$ در همه نقاط صفر $P(w,z)$ صفر شود، آن‌گاه چند جمله‌ای مانند $G(w,z)$ در فضای $\mathbb{C}(w,z)$ وجود دارد، به‌طوری‌که

$$Q(w,z)=P(w,z)G(w,z).$$

برای اثبات قضیه، می‌توانید به مرجع [۱] مراجعه کنید.

## ۲-۳ : حل چند معادله با روش انتگرال اول

### ۲-۳-۱ : معادله جدید همیلتنین امپلیتود[۴] [۸]

معادله به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$iu_x+u_{tt}+2\sigma|u|^2u-\varepsilon u_{xt}=0,$$

که در آن $\sigma=\pm1$.

تغییر متغیر زیر را تعریف می‌کنیم

$$u(x,t)=e^{i\theta}f(\xi),\quad \xi=k(x-\lambda t),\quad \theta=\alpha x-\beta t.$$

که در آن $\alpha$ و $\beta$، ثابت‌های دلخواه هستند و $f(\xi)$ یک تابع حقیقی و مثبت است.

[۲] irreducible
[۳] Division Theorem
[۴] New Hamiltonian amplitude

با اعمال این تغییر متغیر، داریم

$$k^2(\lambda^2+\varepsilon\lambda)f''(\xi)+ik(1+2\beta\lambda+\varepsilon\alpha\lambda+\varepsilon\beta)f'(\xi)-(\alpha+\beta+\varepsilon\alpha\beta)f(\xi)+2\sigma(f(\xi))^3=0,$$

و با فرض

$$\lambda=-\frac{1+\varepsilon\beta}{2\beta+\varepsilon\alpha},$$

با فرض $2\beta+\varepsilon\alpha\neq 0$.

این معادله، به صورت زیر تغییر می‌کند

$$k^2(\lambda^2+\varepsilon\lambda)f''(\xi)-(\alpha+\beta+\varepsilon\alpha\beta)f(\xi)+2\sigma(f(\xi))^3=0.$$

با تعریف توابع زیر، این معادله به دستگاه تبدیل می‌شود

$$X(\xi)=f(\xi),\quad Y(\xi)=f_{\xi}(\xi).$$

$$\begin{cases}\dot{X}(\xi)=Y(\xi),\\ \dot{Y}(\xi)=\dfrac{\alpha+\beta+\varepsilon\alpha\beta}{k^2(\lambda^2+\varepsilon\lambda)}X(\xi)-\dfrac{2\sigma}{k^2(\lambda^2+\varepsilon\lambda)}X(\xi)^3.\end{cases} \tag{۲-۶}$$

بنا به روش انتگرال اول $X(\xi)$ و $Y(\xi)$ جواب‌های غیر بدیهی (۲-۶) هستند ( در صورت انتخاب جواب بدیهی، به جواب صفر می‌رسیم) و فرض می‌کنیم $Q(X,Y)=\sum_{i=0}^{m}a_i(X)Y^i$ چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیری در دامنه اعداد مختلط است، به طوری‌که

$$Q(X(\xi),Y(\xi))=\sum_{i=0}^{m}a_i(X(\xi))Y(\xi)^i=0, \tag{۲-۷}$$

که در آن $a_i(X)$ ، $i=0,1,\ldots,m$ با فرض $a_m(X)\neq 0$، چندجمله ای‌هایی برحسب $X$ هستند. معادله (۲-۷) انتگرال اول برای دستگاه (۲-۶) نامیده می‌شود. واضح است که $\frac{dQ}{d\xi}$ چندجمله‌ای برحسب $X$ و $Y$ است و لذا از $Q(X(\xi),Y(\xi))=0$ می‌توان نتیجه گرفت که $\frac{dQ}{d\xi}=0$. لذا بنا به قضیه تقسیم، یک چندجمله ای مانند $g(X)+h(X)\,Y$ در دامنه اعداد مختلط وجود دارد، به طوری‌که

$$\frac{dQ}{d\xi}=\frac{dQ}{dX}\frac{dX}{d\xi}+\frac{dQ}{dY}\frac{dY}{d\xi}=(\sum_{i=0}^{m}a_i(X)\,Y^i)(g(X)+h(X)\,Y). \tag{۲-۸}$$

در این مثال دو حالت مختلف $m=1$ و $m=2$ ، بررسی می‌شود.

**حالت اول :** $m=1$

با جای‌گذاری در (۲-۸) و برابر قراردادن ضرایب $Y^i$ ، $i=0,1,2$، داریم

$$a_1'(X)=h(X)\,a_1(X), \tag{۲-۹}$$

$$a_0'(X)=g(X)\,a_1(X)+h(X)\,a_0(X), \tag{۲-۱۰}$$

$$a_1(X)\left[\frac{\alpha+\beta+\varepsilon\alpha\beta}{k^2(\lambda^2+\varepsilon\lambda)}X(\xi)-\frac{2\sigma}{k^2(\lambda^2+\varepsilon\lambda)}X(\xi)^3\right]=g(X)\,a_0(X). \tag{۲-۱۱}$$

از آن جا که $a_i(X)$ ، $i=0,1$، چند جمله ای‌هایی بر حسب $X$ و با شرط $a_1(X)\neq 0$ هستند. لذا از (۲-۹) نتیجه می‌شود که $a_1(X)$ یک ثابت است و $h(X)=0$. برای سادگی فرض می‌کنیم که $a_1(X)=1$ و از آن جا که توان های $X$، در دو طرف (۲-۱۱) باید با هم برابر باشند، لذا ،درجه $g(X)$، باید یک باشد. با فرض $g(X)=A_1X+B_0$، داریم

$$a_0(X)=\frac{A_1}{2}X^2+B_0X+A_0. \tag{۲-۱۲}$$

که در آن $A_0$ ثابت انتگرال گیری است.

با جای‌گذاری (۲-۱۲) در (۲-۱۱)، و صفر قراردادن ضرایب توان‌های $X$، به یک دستگاه معادلات جبری می‌رسیم که از حل آن،