به نام پروردگار اندیشه و قلم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر)

عنوان

گروه های ساده متناهی با گراف اول همبند

دانشجو

زهرا طاهری

استاد راهنما

دکتر علی ایرانمنش

اسفند ماه ۱۳۹۱

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم زهرا طاهری** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی **۸۹۵۲۰۵۱۰۱۴** تحت عنوان: «**گروه‌های ساده متناهی با گراف اول همبند**» را در تاریخ ۱۳۹۱/۱۲/۲ از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر علی ایرانمنش	استاد	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمحمد باقری	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر خسرو تاجبخش	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر محمدعلی ایرانمنش	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر خسرو تاجبخش	استادیار	

ایین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلا به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته   است که در سال   در دانشکده   دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر   ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر   و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر   از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب زهرا طاهری دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: زهرا طاهری

تاریخ و امضا:

۹۱/۱۲/۲

ایین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیات علمی، دانشجویان، دانش‌اموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درامدهای حاصل از انها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید اورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌اموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا اثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس ائین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این ایین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیات رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱٥ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب زهرا طاهری دانشجوی رشته ریاضی ورودی سال تحصیلی ۱۳۸۹ مقطع کارشناسی ارشد دانشکده ریاضی متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در ائین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد ائین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر ان به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمنا نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس براورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:

تاریخ: ۱۳۹۱/۱۲/۲

پیشکش به

خانواده مهربانم

و تمام اساتید و آموزگاران، از ابتدا تاکنون

سپاس گزاری...

پروردگار را شاکرم که نعمت هستی را به من عطا کرد؛ پدر و مادری مهربان و دلسوز و خانواده ای همراه نصیبم نمود و انسان هایی فرهیخته را در مسیر زندگیم قرار داده است. همچنین، شکر شایان نثار او که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان نامه را به پایان برسانم.

برخود لازم می دانم از استاد فاضل و پرمایه، جناب آقای دکتر علی ایرانمنش به عنوان استاد راهنما که همواره مرا مورد لطف و محبت خود قرار داده اند و از محضرشان بهره ها بردم خالصانه تشکر کنم. همچنین، به پاس تمام کمک های بی دریغ دوست مهربان و فرزانه ام، سرکار خانم دکتر مهناز فرودی قاسم آبادی سپاس بی کران را نثار ایشان می دارم. به علاوه، از اساتید بزرگوار، آقایان دکتر محمد علی ایرانمنش، دکتر خسرو تاجبخش و دکتر سید محمد باقری برای داوری این پایان نامه و حضورشان در جلسهٔ دفاع کمال تشکر را دارم.

اسفندماه ۱۳۹۱

زهرا طاهری

چکیده

مفهوم گراف اول، اولین بار توسط گروئنبرگ و کیگل در سال ۱۹۸۱ مطرح شد و آنها قضیه ای ساختاری در مورد گروه هایی با گراف اول ناهمبند بیان کردند. اثبات قضیهٔ کیگل-گروئنبرگ، براین اساس استوار است که گروه G شامل عضوی از مرتبهٔ فرد می باشد که در گراف اول آن در مولفه ای مجزا ازعدد ۲ واقع است. در سال ۲۰۰۵ وازیلو اثبات کرد که شرط ناهمبندی در گراف را می توان با شرطی ضعیف تر که بیان می کرد در گراف اول گروه G رأسی از مرتبهٔ فرد و نامجاور با ۲ موجود است، جایگزین کرد. همچنین، وازیلو و گروشکوف در سال ۲۰۰۹ صورت تکمیل شده ای از این قضیه را بیان کردند.

هدف اصلی ما در این پایان نامه، بیان و اثبات این قضیهٔ مشهور است. به علاوه، به عنوان کاربردی از این قضیه، نشان می دهیم گروه سادهٔ $L_n(۳)$ به ازای $n \geq ۷$، به وسیلهٔ گراف اول شبه شناسایی پذیر است. مرجع اصلی در این پایان نامه، [۳۹] می باشد.

کلمات کلیدی: گراف اول، گروه های سادهٔ متناهی، تشخیص پذیری، شبه شناسایی پذیری.

فهرست مطالب

فهرست نمادها

بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک n و m	$gcd(m,n)$
گروه خودریختی های G	$Aut(G)$
گروه خودریختی های داخلی G	$Inn(G)$
گروه خودریختی های بیرونی G	$Out(G)$
خودریختی داخلی القا شده با g	i_g
مرکز ساز x در G	$C_G(x)$
H با زیرگروهی از G یکریخت است	$H \hookrightarrow G$
H زیرگروه G است	$H \leq G$
H زیرگروه نرمال G است	$H \lhd G$
مرکزساز H در G	$C_G(H)$
نرمال ساز H در G	$N_G(H)$
حاصل ضرب نیم مستقیم گروه های N و H با زیر گروه نرمال N	$N \rtimes H$
گروه خطی عام از درجهٔ n روی میدان F	$GL(n,F)$
تعویض گر y و x (یعنی $x^{-1}y^{-1}xy$)	$[x,y]$
زیرگروه تعویض گر متناظر با زیر گروه های H و G	$[G,H]$
زیرگروه مشتق G	G'
مرکز گروه G	$Z(G)$
ماتریس همانی $n \times n$	$I_{n\times n}$
نگاشت همانی	I
بزرگترین $\pi-$ زیرگروه نرمال G	$O_\pi(G)$
میدان	F
گروه ضربی میدان F	$F^\times$

جزء صحیح x	$[x]$
شاخص N در G	$\|G:N\|$
گروه دوری مرتبهٔ n	$\mathbb{Z}_n$
مجموعهٔ اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$
میدان گالوای q عضوی	$GF(q)$
تابع ضربی اویلر	ϕ
گروه ضربی میدان گالوا	$GF(q)^{\times}$
مزدوج H	H^g
ترانهادهٔ ماتریس A	A^t
زیرگروه تولید شده با مجموعهٔ X	$< X >$
مرتبه گروه متناهی G	$\|G\|$
مرتبه g	$\|g\|$
مجموعه همهٔ p- زیرگروه های سیلوی گروه متناهی G	$Syl_p(G)$
گروه متقارن روی n حرف	S_n
گروه متناوب روی n حرف	A_n
گروه دو وجهی	$D_{۲n}$
گروه کواترنیون تعمیم یافته	$Q_{۴n}$
G توسیع شکافته شده N است	$G:N$
گراف اول گروه G	$GK(G)$
رئوس p و q در گراف اول G مجاورند	$(p,q)\in GK(G)$
مرتبهٔ ضربی q به پیمانه r	$e(r,q)(ord_r(q))$
عامل اول اولیهٔ $q^m-۱$	$r_m(q)$
بزرگترین عامل اولیهٔ $q^m-۱$	$k_m(q)$
طیف گروه G	$\omega(G)$
مجموعهٔ تمام عوامل اول $\|G\|$	$\pi(G)$
مجموعهٔ تمام عوامل اول n	$\pi(n)$

پیش گفتار

یکی از جالب ترین مباحث در ریاضیات ارتباط میان ساختمان های جبری و نظریهٔ گراف است. حتی اگر در ابتدای امر این ارتباط هدف اصلی ریاضیدانان نبوده، ولی در بسیاری موارد در حل مسائل جبری راهگشا بوده است. بر پایهٔ همین ارتباط گرایشها و شاخه های جدیدی از ریاضیات متولد می شوند و مفاهیم جدید را می توان در دو بعد جبری و گرافی مورد بررسی قرار داد. از جملهٔ این گراف ها که در این پایان نامه نیز مورد نظر است، گراف اول وابسته به یک گروه متناهی می باشد.

گراف اول یک گروه متناهی، گرافی است که رأس های آن عوامل اول مرتبهٔ گروه هستند و بین دو رأس متمایز p و q یالی موجود است هرگاه گروه موردنظر عضوی از مرتبهٔ pq داشته باشد.

با اینکه این گراف در مورد گروه های نامتناهی نیز قابل تعریف است (به [۲] رجوع شود.)، ولی در هر حال مفهوم این گراف با گروه های متناهی و به خصوص گروه های سادهٔ متناهی عجین شده است. این گراف اولین بار توسط دو ریاضیدان به نام های گروئنبرگ [۱] و کیگل [۲] معرفی شد و به علاوه آنها در مقاله ای قضیه ای مربوط به ساختار گروه هایی با گراف اول ناهمبند را بیان کردند. اما از آنجا که این مقاله هیچ گاه چاپ نشد، در سال ۱۹۸۱ ویلیامز [۳] در مقاله ای به بیان مفهوم گراف اول پرداخت و اثبات کامل قضیهٔ مورد نظر را بازگو کرد. علاوه بر آن، ویلیامز در همین مقاله مولفه های همبندی گراف اول تمام گروه های ساده ناآبلی متناهی به جز گروه های ساده متناهی از نوع لی روی میدان با مشخصهٔ ۲ را مشخص کرد و ثابت کرد تعداد مولفه های همبندی گراف اول هر گروه متناهی حداکثر ۶ است. پس از آن، کندراتیو [۴]،

[۱] K. W. Gruenberg
[۲] O. Kegel
[۳] J. S. Wiliams
[۴] A. S. Kondrat'ev

یاماکی [۵] و سوزوکی [۶] مولفه های همبندی گراف اول گروه های ساده باقی مانده را بدست آوردند.

تا کنون، گراف اول گروه های متناهی از هر دو دیدگاه گرافی و گروهی مورد بررسی قرار گرفته است. از دیدگاه نظریه گراف کارهای لوچیدو [۷] و مقدم فر در [۲۷]، [۲۸] و [۲۹] حائز اهمیت هستند. اما دراین پایان نامه جنبهٔ گروهی این مفهوم و به ویژه بحث شناسایی پذیری به وسیلهٔ گراف اول در گروه های ساده متناهی مورد توجه است. مفهوم شناسایی پذیری با گراف اول نخستین بار توسط امیر خسروی و بهروز خسروی مطرح شد.

فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد، گوییم گروه G به وسیلهٔ گراف اول شناسایی پذیر است، هرگاه به ازای هر گروه متناهی مانند H، که دارای گراف اول یکسانی با گروه G می باشد، نتیجه بگیریم $G \cong H$.

یافتن گروه هایی که به وسیلهٔ گراف اول شناسایی پذیرند، زمینهٔ مطالعاتی جدیدی برای دوستداران مباحث گروهی ایجاد کرد. در این بین گروه های ساده ناآبلی متناهی از حیث شناخته شده بودن، در اولویت قرار می گیرند. در اولین گام شناسایی پذیری یک گروه ساده، شبه شناسایی پذیری گروه ثابت می شود؛ بدین معنا که اگر گروه متناهی G دارای گراف اول یکسان با گروه سادهٔ مورد بحث باشد، آنگاه بتوانیم نتیجه بگیریم که گروه G عامل ترکیبی ناآبلی منحصر به فردی یکریخت با گروه ساده دارد.

درابتدای امر، برای بررسی شناسایی پذیری قضیهٔ موسوم به کیگل-گروئنبرگ ابزار اولیهٔ محققین به شمار می رفت. اما از آنجا که قضیهٔ مورد بحث، تنها برای گروه های با گراف اول ناهمبند کاربرد داشت، از جامعیت برخوردار نبود و گروه های با گراف اول همبند در این قضیه نادیده گرفته می شدند. در سال ۲۰۰۵ ریاضیدانی روسی با نام وازیلو [۸] توانست قضیه ای را بیان و اثبات کند که تحت شرایطی به این نقیصه پایان داد. همچنین او به همراه گروشکوف [۹] در سال ۲۰۰۹ مقالهٔ دیگری را در تکمیل قضیهٔ فوق ارائه دادند. اهمیت این قضیه را با توجه به ارجاعات متعدد مقالات چاپ شده به آن در زمینهٔ شناسایی پذیری می توان دریافت.

---

[۵] H. Yamaki
[۶] M. Suzuki
[۷] M. S. Lucido
[۸] A. V. Vasil'ev
[۹] I. B. Gorshkov

هدف اصلی ما در این پایان نامه نیز بیان و اثبات این قضیه بنابر مراجع [۳۸، ۳۹] است که فصل دوم را تشکیل می دهد. به علاوه، فصل ابتدایی نیز به طور معمول به یادآوری و بیان قضایا و مفاهیم مورد نیاز در فصول بعد می پردازد. همچنین، در فصل سوم پایان نامه به عنوان کاری جدید در راستای کاربرد قضیهٔ مطرح شده، شبه شناسایی پذیری گروه سادهٔ $L_n(۳)$ را به ازای $n \geq ۷$ ثابت کرده ایم. در قسمت پایانی پایان نامه نیز، جداول مورد نیاز پیوست شده است. جداول پیوست الف.۱، الف.۲ و ب برگرفته از [۲۵] و جداول پیوست پ برگرفته از [۴۱] است.

فصل ۱
پیش نیازها

در این فصل به بیان تعاریف و قضایایی می‌پردازیم که در فصول بعدی این پایان نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱.۱ مفاهیم اولیه

در این بخش ابتدا چند مفهوم شناخته شده در نظریهٔ گروه ها را یادآوری می کنیم :

تعریف ۱.۱.۱. [۴۶، صفحهٔ ۱۰۱] فرض کنیم $G_۱, G_۲, \cdots, G_n$، n گروه هستند. در مجموعهٔ $G_۱ \times G_۲ \times \cdots \times G_n$ عمل دوتایی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(g_۱, \cdots, g_n)(g'_۱, \cdots, g'_n) = (g_۱ g'_۱, \cdots, g_n g'_n)$$

که در آن g_i و g'_i عضوهایی از G هستند. به آسانی ملاحظه می‌شود که مجموعهٔ $G_۱ \times G_۲ \times \cdots \times G_n$ با عمل فوق یک گروه است. این گروه را **حاصلضرب مستقیم (خارجی)** گروه‌های $G_۱, G_۲, \cdots, G_n$ می‌نامند و آن را با همان $G_۱ \times G_۲ \times \cdots \times G_n$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۱.۱. [۳۴، صفحهٔ ۱۶۷] فرض کنیم N زیرگروهی (نه لزوماً نرمال) از گروه G است. در این صورت زیر گروه H از G را یک **متمم** N در G گوییم، هرگاه داشته باشیم $N \cap H = 1$ و $HN = G$. همچنین گروه G را **حاصل ضرب نیم مستقیم** N به وسیلهٔ H گوییم در صورتی که $N \lhd G$ و N دارای یک متمم $H \cong H_1$ باشد. در این صورت می نویسیم $G = N \rtimes H$ و همچنین می گوییم G روی N **شکافته** می شود.

مثال ۳.۱.۱. گروه S_n حاصل ضرب نیم مستقیم A_n به وسیلهٔ $\mathbb{Z}_2$ است.

تعریف ۴.۱.۱. [۳۴، صفحهٔ ۱۵۲] فرض کنیم K و Q دو گروه هستند. **توسیع** K توسط Q گروهی مانند G است که دارای زیرگروهی نرمال مانند $K \cong K_1$ است، به طوری که $Q \cong G/K_1$.

اگر G زیرگروهی یکریخت با Q داشته باشد، این توسیع را **شکافته شده** گوییم و آن را با نماد $K : G$ نشان می دهیم. واضح است که حاصل ضرب نیم مستقیم $G = K \rtimes Q$ همان توسیع شکافته شده است.

مثال ۵.۱.۱. حاصل ضرب مستقیم $K \times Q$ توسیعی از گروه K به وسیلهٔ گروه Q است.

تعریف ۶.۱.۱. [۴۶، صفحهٔ ۲۵] فرض کنیم G یک گروه و X مجموعه ای ناتهی است. گوییم گروه G بر مجموعهٔ X عمل می کند و آن را با نماد $G|X$ نشان می دهیم، هرگاه نگاشت $f : X \times G \longrightarrow X$ موجود است که به ازای هر g از G و هر x از X، که $(x, g) \mapsto f(x, g) := x^g$ داریم

۱. به ازای هر x از X، $x^1 = x$، و

۲. به ازای هر g_1، g_2 از G و هر x از X، $x^{(g_1 g_2)} = (x_1^g)_2^g$.

فرض کنیم گروه G بر X عمل کند و $g \in G$ و $x \in X$. گوییم g عضو (یا نقطهٔ) x را ثابت نگه می دارد هرگاه $x^g = x$. مجموعهٔ اعضایی از G را که هر عضو X را ثابت نگه می دارند، **هستهٔ عمل** می نامند.

مثال ۷.۱.۱. دو مورد از مهمترین عمل های یک گروه بر خودش ($X=G$)، یکی عمل تزویج و دیگری عمل منتظم است که به ازای هر x و g از G با $x^g=xg$ تعریف می شود که در اینجا xg به معنی ضرب دو عضو است.

لم ۸.۱.۱. [۴۶، قضیهٔ ۱.۱.۲] *فرض کنیم گروه G بر مجموعهٔ X عمل کند. به ازای هر g از G، تابع $\varphi_g : X \longrightarrow X$ را با ضابطهٔ $x\varphi_g = x^g$ تعریف می کنیم. دراین صورت $\varphi_g \in S_X$ و نگاشت $\varphi : G \longrightarrow S_X$ با ضابطهٔ $g \longmapsto \varphi_g$ یک همریختی است که هستهٔ آن با هستهٔ عمل برابر است.*

همریختی مذکور در قضیهٔ فوق را **نمایش جایگشتی** G متناظر با عمل گروه (بر X) نامند. در صورتی که تابع φ یک به یک باشد، این نمایش را **صادق** گویند؛ به عبارت دیگر، عضو همانی G تنها عضوی از گروه G است که همهٔ اعضای X را ثابت نگه دارد. همچنین، در قضیهٔ فوق اگر $X=G$، آنگاه گوییم G روی خودش به صورت جایگشتی عمل می کند.

تعریف ۹.۱.۱. [۴۶، صفحهٔ ۳۳] فرض کنیم گروه G بر مجموعهٔ X عمل کند. رابطهٔ $\sim$ را در X چنین تعریف می کنیم: گوییم $x_۱ \sim x_۲$ در صورتی که به ازای عضوی از G مانند g، $x_۱^g = x_۲$. رابطهٔ $\sim$ یک رابطهٔ هم ارزی در X است. هر ردهٔ هم ارزی را یک **مدار عمل** می نامیم.

با توجه به تعریف فوق واضح است که مدار شامل عضو x را که با $Orb_G(x)$ نشان می دهیم برابر است با: $Orb_G(x)=\{x^g \mid g\in G\}$.

تعریف ۱۰.۱.۱. [۳۳، صفحهٔ ۲۰۵] فرض کنیم H و K دو گروه هستند. گوییم H روی K (به عنوان یک گروه) عمل می کند هرگاه برای هر $h\in H$ و هر $k\in K$ عضو یکتایی مانند $k^h\in K$ موجود باشد که برای هر $k,k_۱,k_۲\in K$ و هر $h,h_۱,h_۲\in H$ سه شرط زیر برقرار باشد:

۱. $k^۱=k$،

۲. $(k^{h_۱})^{h_۲}=k^{h_۱h_۲}$،

۳. $(k_۱k_۲)^h = (k_۱)^h(k_۲)^h$.

لم ۱.۱.۱۱. [۳۳، قضیهٔ ۹.۳] *فرض کنیم H روی K (به عنوان یک گروه) عمل کند. در این صورت، به هر $h \in H$ نگاشت $\phi_h : K \longrightarrow K$ نسبت داده می شود که به صورت $\phi_h : k \mapsto k^h$ تعریف می شود و یک خودریختی از گروه K است. علاوه براین، نگاشت $\phi : H \longrightarrow Aut(K)$ که به صورت $\phi : h \mapsto \phi_h$ تعریف می شود یک همریختی است. به ϕ نمایش خودریختی H وابسته به عمل گفته می شود.*

تعریف ۱.۱.۱۲. [۳۳، صفحهٔ ۷۰] فرض کنیم گروه H روی K (به عنوان گروه) عمل کند. گوییم این عمل **صادق** است، هرگاه نمایش خودریختی H وابسته به عمل یک به یک است.

تعریف ۱.۱.۱۳. [۴۶، صفحهٔ ۱۰۴] فرض کنیم G یک گروه است. زیرگروه نرمال غیر بدیهی H را یک زیرگروه **نرمال مینیمال** G گوییم، هرگاه H حاوی هیچ زیرگروه نرمال G به جز خود و ۱ نیست. به عبارت دیگر، هرگاه $N \lhd G$ و $N \subseteq H$، آنگاه $N = H$ یا $N = ۱$.

تذکر ۱.۱.۱۴. هر گروه متناهی غیربدیهی یک زیرگروه نرمال مینیمال دارد.

تعریف ۱.۱.۱۵. [۴۶، صفحهٔ ۹] فرض کنیم G یک گروه است و $H \leq G$. زیرگروه H را **زیرگروه مشخص** G می نامیم در صورتی که به ازای هر خودریختی از G، مانند τ، $H\tau \leq H$ که در آن $H\tau = \{h\tau \mid h \in H\}$.

نمادگذاری ۱.۱.۱۶. گاهی به ازای زیرگروه مشخص K از G از نماد $K\ ch\ G$ استفاده می شود.

مثال ۱.۱.۱۷. مرکز یک گروه همواره یک زیرگروه مشخص آن گروه است.

لم ۱.۱.۱۸. [۲۰، لم ۱.۱۰] *فرض کنیم G یک گروه و $K \subseteq N \subseteq G$ و به علاوه، N زیرگروه نرمال G و K زیرگروه مشخص N است، آنگاه $K \lhd G$.*

تعریف ۱.۱.۱۹. [۴۶، صفحهٔ ۱۰۴] گروه G را **کاملاً تحویل پذیر** گوییم در صورتی که $G = ۱$ یا G به صورت حاصل ضرب مستقیم تعدادی متناهی از زیرگروه های ساده اش تجزیه شود.

این بخش را با یادآوری چند قضیهٔ مهم در نظریهٔ گروه ها و لم های مورد استفاده، پایان می دهیم:

قضیه ۲۰.۱.۱. [۴۶](*قضیهٔ اول یکریختی*)

(i) . *اگر* $f : G \longrightarrow H$ *یک همریختی باشد، آنگاه نگاشت* $\theta : G/Kerf \longrightarrow H$ *با ضابطهٔ* $(x(Kerf))\theta = xf$ *یک تکریختی است. در نتیجه* $G/Kerf \cong Imf$.

(ii) . *اگر* N *زیرگروه نرمال* G *باشد، آنگاه نگاشت* $\nu : G \longrightarrow G/N$ *با ضابطهٔ* $x\nu = Nx$ *یک بروریختی است که هستهٔ آن* N *است (* ν *را بروریختی طبیعی می نامیم).*

قضیه ۲۱.۱.۱. [۴۶](*قضیهٔ دوم یکریختی*) *فرض کنیم* G *یک گروه است و* $M \leq G$ *،* $N \lhd G$ *. در این صورت* $M \cap N \lhd M$ *و* $NM/N \cong M/M \cap N$.

قضیه ۲۲.۱.۱. [۴۶](*قضیهٔ سوم یکریختی*) *فرض کنیم* M *و* N *زیرگروه های نرمال یک گروه مانند* G *هستند به طوری که* $N \leq M$ *. در این صورت* $M/N \lhd G/N$ *و* $(G/N)/(M/N) \cong G/M$.

قضیه ۲۳.۱.۱. [۴۶](*قضیهٔ نرمالساز-مرکزساز*) *فرض کنیم* G *یک گروه و* H *زیرگروهی از* G *است. دراین صورت*

۱. $C_G(H) \lhd N_G(H)$.

۲. $N_G(H)/C_G(H) \hookrightarrow Aut(H)$.

لم ۲۴.۱.۱. [۲۰](*قانون مدولی ددکیند*)[1] *فرض کنیم* H *،* K *و* L *زیرگروه های یک گروه مانند* G *هستند، به طوری که* K *زیرگروهی از* L *است. دراین صورت* $(H \cap L)K = (HK) \cap L$.

لم ۲۵.۱.۱. [۴۶، صفحهٔ ۱۱۹] *فرض کنیم* $G = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ *تجزیه ای از گروه* G *به زیرگروه های نرمالش است، دراین صورت* $Z(G) = Z(M_1) \times Z(M_2) \times ... \times Z(M_n)$.

[1] R. Dedekind