بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه ، گروه ریاضی و آمار

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)

عنوان :

شاخص بهره‌وری مالم‌کوئیست سود و فرم سراسری آن در تحلیل پوششی داده‌ها

استاد راهنما :

دکتر شنبم رضویان

استاد مشاور :

دکتر مهدی طلوع

پژوهشگر:

بهمن اکبری مردق

زمستان ۱۳۹۱

این اثر را اگر قدر و منزلتی باشد

تقدیم به

پـــــــدر و مـــــادر عـــــزیز و بزرگوارم می‌کنم

سپاس خدایی را که نعمت زندگانی عطا کرد.

بر خود لازم می‌دانم

از زحمات بی دریغ استاد راهنمای ارجمندم خانم دکتر شبنم رضویان تقدیر و تشکر بنمایم.

همچنین از استاد گرانقدر آقای دکتر مهدی طلوع، که مشاورت اینجانب را به عهده داشته اند، کمال تشکر را دارم.

و در پایان از محبت های بی دریغ استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر قاسم توحیدی نهایت سپاس و قدردانی را دارم.

تعهد نامه اصالت پایان نامه کارشناسی ارشد

اینجانب **بهمن اکبری‌مردق** دانش آموخته مقطع کارشناسی ارشد نا پیوسته

به شماره دانشجویی **۸۹۰۹۳۹۳۵۹۰۰** در رشته ریاضی کاربردی که در تاریخ .....

از پایان نامه خود تحت عنوان :

شاخص بهره‌وری مالم‌کوئیست سود و فرم سراسری آن در تحلیل پوششی داده‌ها

با کسب نمره ..... و درجه ..... دفاع نموده ام بدینوسیله متعهد می شوم :

۱- این پایان نامه حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهاي علمی و پژوهشي دیگران (اعم از پایان نامه ، کتاب ، مقاله و ...) استفاده نموده ام ، مطابق ضوابط و رویه هاي موجود ، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست ذکر و درج کرده ام .

۲- این پایان نامه قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح ، پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاهها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است .

۳- چنانچه بعد از فراغت از تحصیل ، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب ، ثبت اختراع و ... از این پایان نامه داشته باشم ، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم .

٤- چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود ، عواقب ناشی از آن را بپذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت .

نام و نام خانوادگی :

تاریخ و امضاء :

بسمه تعالی

درتاریخ :

دانشــجوی کارشناســي ارشــد آقــاي / خــانم از پایــان نامــه

خود دفاع نموده وبا نمره بحروف

و با درجه مورد تصویب قرار گرفت .

امضاء استاد راهنما

باسمه تعالی

فرم اطلاعات پايان نامه هاي كارشناسي ارشد

دانشكده علوم پايه گروه آمار و رياضی

نام واحد دانشگاهي : تهران مركزي كد واحد : ۱۰۱	**كد شناسايي پايان نامه : ۱۰۱۳۰۱۰۹۹۱۱۰۲٤**
نام ونام وخانوادگي دانشجو: بهمن اكبری مردق **شماره دانشجويی: ۸۹۰۹۳۹۳۵۹۰۰**	سال و نيمسال اخذ پايان نامه : دوم ۹۰-۹۱ رشته تحصيلی : رياضی كاربردی
عنوان پايان نامه كارشناسي ارشد : **شاخص بهره‌وری مالم‌كوئيست سود و فرم سراسری آن در تحليل پوششی داده‌ها**	
نام و نام خانوادگي استاد راهنما : دكتر شبنم رضويان **نام و نام خانوادگي استاد مشاور: دكتر مهدی طلوع**	
تعداد واحد پايان نامه: ٦ **تاريخ صدور كد شناسايي : ۱۳۹۱/۱۱/۲۸** **تاريخ دفاع از پايان نامه : ۱۳۹۱/۱۱/۳۰** **تاريخ ارائه مقاله :-**	**نمره پايان نامه دانشجو(از ۱۸ نمره)** **به عدد: ۱۷/۵** **به حروف: هفده و نيم** **نمره مقاله دانشجو(از ۲ نمره)به عدد:-** **به حروف:-**

چكيده پايان نامه (شامل خلاصه، اهداف، روش هاي اجرا و نتايج به دست آمده):

جهت رفع مشكلات محاسبه تغييرات بهره‌وری سود و مولفه‌های آن، ناشی از معرفی مرزهای سود متفاوت در دوره‌های زمانی متفاوت در اين پايان نامه شاخص بهره‌وری مالم‌كوئيست سراسری سود بررسی می‌شود.

اين شاخص زمانی كه هزينه ورودی‌ها و قيمت خروجی‌ها مشخص می‌باشد و موقعی كه توليد كننده‌ها به دنبال بيشترين سود كلی از واحدهای تصميم گيری (DMU) هستند، قابل اجرا است.

برای اين منظور، ابتدا، دو روش جهت به دست آوردن هزينه‌ها و قيمت‌های مشترک، يكی با اولويت تصميم گيرنده و ديگری بدون اولويت تصميم‌گيرنده ارائه می‌شود، سپس، مرز سود كارايی مشترک به دست می‌آيد.

شاخص پيشنهادی را می‌توان به چندين مولفه مدور، يعنی، تغيير كارايی سود، تغيير تكنيكی سود، تغيير كارايی تكنيكی، تغيير كارايی تخصيصی، تغيير تكنيكی و تغيير قيمت-سود تجزيه كرد.

برای نشان دادن شاخص پيشنهادی و مولفه‌های آن، مثال عددی در سه دوره متوالی از زمان داده شده است.

نظر استاد راهنما برای چاپ در پژوهش‌نامه دانشگاه **مناسب** است تاريخ

امضاء استاد راهنما

مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها[1] (DEA) یک روش غیرپارامتری است که می‌تواند در ارزیابی تغییرات بهره‌وری یک واحد تصمیم‌گیری[2] (DMU) با چندین ورودی[3] و خروجی[4] مورد استفاده قرار گیرد، برای محاسبه تغییرات بهره‌وری یک DMU در دوره‌های زمانی متفاوت، شاخص بهره‌وری مالم‌کوئیست[5] (MI) توسط کیوز[6] و همکاران[۱] معرفی شد. MI می‌تواند به مولفه‌های تغییرات کارایی تکنیکی[7] و تغییر تکنیکی[8] تجزیه شود. در این چار چوب، مانیاداکس[9] و تاناسیولیس[10] جهت ارزیابی تغییر بهره‌وری موقعی که هزینه‌های ورودی مشخص هستند و موقعی که تولید کننده به دنبال کمترین هزینه است، شاخص مالم‌کوئیست هزینه را پیشنهاد دادند.[۷]

پاستور[11] و لاول[12] [۸] شاخص بهره‌وری مالم‌کوئیست سراسری مدوری که ارزیابی منفردی از تغییر بهره‌وری داشت، معرفی کردند، این شاخص روی تکنولوژی همه داده‌ها در همه دوره‌های زمانی است. بعلاوه، پرتلا[13] و تاناسیولیس[۹] شاخص مالم‌کوئیست-متا[14] تحت تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت[15] (CRS)[16] و بازده به مقیاس متغیر[17] (VRS)[18] را پیشنهاد کردند. این شاخص می‌تواند به مولفه‌های تغییر کارایی و تکنیکی تجزیه شود.

شاخص مالم‌کوئیست هزینه پیشنهاد شده توسط مانیاداکس و تاناسولیس[۷]، به وسیله توحیدی[19] و همکاران[۱۰] به شاخص مالم‌کوئیست سود توسعه داده شد. موقعی که قیمت ورودی‌ها و خروجی‌ها در دسترس هستند و زمانی که تولید کننده‌ها به دنبال بیشترین سود کلی از DMUها هستند می‌تواند مورد استفاده گیرد. برای مقایسه کارایی هزینه[20] DMUها در دوره‌های زمانی متفاوت، توحیدی و

---

1. Data Envelopment Analysis (DEA) 2. Decision Making Unit (DMU) 3. Input 4.Output
5. Malmquist Productivity Index(MI) 6. Caves 7. Technical Efficiency Change
8. Technical Change 9. Maniadakis 10. Thanassoulis 11. Pastor 12. Lovell
13. Portela 14. Meta-Malmquist Index 15. Constant Returns to Scale 16. Charnes Cooper Rhodes
17. Variable Returns to Scale 18. Banker Charnes Cooper 19. Tohidi 20. Cost Efficiency

همکاران[۱۱] از ترکیب محدب (میانگین وزن) هزینه ورودی‌ها برای دوره‌های زمانی متفاوت استفاده کردند و هزینه مشترک برای ورودی‌ها به دست آوردند. آنها با استفاده از هزینه مشترک و مرز سراسری هزینه به دست آمده از پایه واحد، شاخص مالم‌کوئیست سراسری هزینه را پیشنهاد کردند. این شاخص مدور، ارزیابی منحصربفردی از تغییرات بهره‌وری ارائه می‌دهد و مدل‌های آن همواره شدنی هستند.

چندین مزر سود با وجود هزینه‌ها و قیمت‌های متفاوت برای دوره‌های زمانی متفاوت موجود است. در محاسبه تغییرات سود کلی و مولفه‌های آن بوسیله مرزهای سود متفاوت مقادیر متفاوتی بدست می‌آید. برای حذف این مشکل، شاخص بهره‌وری مالم‌کوئیست سراسری سود پیشنهاد شده است، این شاخص را می‌توان موقعی که هزینه‌ها و قیمت‌ها دردسترس هستند مورد استفاده قرار داد. در این راستا، از دو روش اولویت تصمیم گیرنده و بدون اولویت تصمیم گیرنده برای تعیین هزینه‌ها و قیمت‌های مشترک که عامل مشترک در مرز سود هستند، می‌توان استفاده کرد.

شاخص پیشنهادی و مولفه‌های آن خاصیت مدور بودن را دارند و ارزیابی منحصربفردی از تغییر سود بدون نیاز به میانگین هندسی در محاسبات بوجود می‌آورد.

این پایان نامه به بررسی شاخص مالم‌کوئیست سراسری سود مدور می‌پردازد، که شامل ساختار زیر است.

فصل اول به تعاریف و مقدماتی از تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) پرداخته است. فصل دوم شاخص‌های مالم‌کوئیست، مالم‌کوئیست سراسری، مالم‌کوئیست هزینه و مالم‌کوئیست سراسری هزینه مورد بررسی قرار داده و به تجزیه این شاخص‌ها پرداخته است.

فصل سوم، ابتدا، شاخص مالم‌کوئیست سود، تجزیه و نحوه محاسبه این شاخص همراه با یک مثال عددی پرداخته است، سپس، شاخص مالم‌کوئیست سراسری سود مدور بیان شده و تجزیه و نحوه محاسبه این شاخص ذکر شده و یک مثال عددی برای توضیح بیشتر شاخص آمده است.

فهرست مطالب

مقدمه..... ت

فصل اول مقدمات و تعاریفی از DEA

۱-۱- مقدمه..... ۱

۱-۲- مباحثی از DEA..... ۳

۱-۳-مدل CCR در ماهیت ورودی..... ۷

۱-۴- تابع فاصله..... ۱۰

۱-۵-مدل CCR در ماهیت خروجی..... ۱۱

۱-۶-مدل BCC در ماهیت ورودی ۱۲

۱-۷-مدل BCC در ماهیت خروجی ۱۳

۱-۸-کارایی هزینه ۱۴

۱-۹- کارایی هزینه سراسری..... ۱۶

۱-۱۰- کارایی سود..... ۱۸

۱-۱۱- کارایی سراسری سود..... ۱۹

فصل دوم شاخص بهره‌وری مالم‌کوئیست و هزینه

۲-۱- مقدمه..... ۲۶

۲-۲- شاخص مالم‌کوئیست..... ۲۷

۲-۳- محاسبه شاخص مالم‌کوئیست..... ۳۱

۲-۴- مشکلات شاخص مالم‌کوئسیت معمولی..... ۳۴

۲-۵- شاخص بهره‌وری مالم‌کوئیست کلی..... ۳۴

۲-۶- شاخص مالم‌کوئیست ـ متا مدور ۳۶
۲-۷- شاخص مالم‌کوئیست هزینه ۴۱
۲-۸- تجزیه شاخص بهره‌وری مالم‌کوئیست هزینه..... ۴۲
۹.۲. شاخص مالم‌کوئیست سراسری هزینه..... ٤٦
۱۰.۲. تجزیه شاخص بهره‌وری مالم‌کوئیست سراسری هزینه..... ٤٧

فصل سوم شاخص بهره‌وری مالم‌کوئیست سود

۳-۱- مقدمه..... ۵۳
۳-۲- شاخص بهره‌وری مالم‌کوئیست سود..... ۵۳
۳-۳- تجزیه شاخص بهره‌وری مالم‌کوئیست سود..... ۵۷
۳-۴ محاسبه شاخص PM و مولفه‌های آن..... ۶۰
۳-۵- مثال عددی برای شاخص PM..... ۶۵
۳-۶- شاخص بهره‌وری مالم‌کوئیست سراسری سود..... ۶۶
۳-۷- تجزیه شاخص بهره‌وری مالم‌کوئیست سراسری سود..... ۶۹
۳-۸- مقایسه بهره‌وری دو واحد متفاوت در دو دوره زمانی متفاوت..... ۷۵
۳-۹- محاسبه شاخص بهره‌وری مالم‌کوئیست سراسری سود و مولفه های آن..... ۷۷
۳-۱۰- مثال عددی برای شاخص مالم کوئیست سراسری سود..... ۸۰

مراجع..... ۸۴

فهرست شکل‌ها

شکل ۱-۱..... ۷
شکل ۱-۲..... ۱۱
شکل ۱-۳..... ۱۲
شکل ۱-۴..... ۱۳
شکل ۱-۵..... ۲۳
شکل ۲-۱..... ۲۹
شکل ۳-۱..... ۶۸

فهرست جدول‌ها

جدول ۳-۱..... ۶۵
جدول ۳-۲..... ۶۶
جدول ۳-۳..... ۸۲
جدول ۳-۴..... ۸۲
جدول ۳-۵..... ۸۲
جدول ۳-۶..... ۸۳
جدول ۳-۷..... ۸۳

فصل اول

تعاریف و مقدماتی از DEA

۱-۱ مقدمه

مساله ارزیابی عملکرد واحدها از دیرباز مورد توجه مدیران بوده است، برخورد علمی با این مطلب از اواخر جنگ جهانی دوم شروع و گسترش چشمگیری یافت، فرماندهان نظامی متفقین واقف شدند که هر گونه تصمیم‌گیری بدون به کاربردن روش‌های علمی مشکل آفرین می‌باشد. از این رو، اولین گروه از دانشمندان برای تصمیم‌گیری در مورد مسائل جنگی دعوت شدند که می‌توان گفت اولین پایه‌گذاران علم تحقیق در عملیات می‌باشند.

امروزه به دلیل پیچیدگی مسائل، حجم بسیار اطلاعات، اثرات عوامل خارجی بر عملکرد، رقابت شدید جهانی، محدود بودن واحدها در رابطه با تصمیم‌گیری‌های مناسب، تغییرات ناگهانی خط‌مشی به علت برخورد انفعالی با مشکلات حاد و غیره از عواملی هستند که بدون برخورد علمی با آنان، راهکار مناسبی در جهت بهره‌وری بهتر عاید نمی‌گردد.

DEA ابزار توانمندی است که امروزه به صورت چشمگیری در ارزیابی عملکرد سیستم‌هایی با چند

ورودی و چند خروجی رشد یافته است. رشد مستمر و کاربرد فراوان تکنیک DEA در سی سال اخیر، چه در بعد بسط تئوری و چه در قلمرو کاربردی، آن چنان بوده که حتی شگفتی خود صاحب نظران را برانگیخته است.

چگونگی ارزیابی عملکردها مورد سوال بود که با استفاده از روش‌های علمی به چه صورت باشد؟ مسلما رابطه عملکرد با عوامل تاثیرگذار تابعی به صورت زیر است :

$$y = f(u, v)$$

که در آن بردار ورودی (u,v) خروجی y تولید می‌کند. بردار ورودی از دو قسمت تشکیل شده، u عوامل قابل کنترل و v عوامل غیرقابل کنترل می‌باشد. وقتی که از ترکیب ورودی، ماکزیمم خروجی عاید گردد، یعنی y ماکزیمم خروجی باشد که از به کار بردن بردار ورودی (u,v) به دست می‌آید، در این صورت f تابع تولید[1] می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود.

تابع تولید : تابعی است که برای هر ترکیب از ورودی‌ها، ماکزیمم خروجی را بدهد.

این تابع در اقتصاد خرد بسیار مورد توجه است، زیرا با داشتن آن می‌توان قضاوت نمود که آیا یک DMU خوب عمل می‌کند (کارا است) یا نه.

در اغلب موارد تابع تولید در دسترس نیست و این به دلیل پیچیدگی فرآیند تولید، تغییر در تکنولوژی تولید و چند مقداره بودن تابع تولید می‌باشد، یعنی در اغلب موارد یک ترکیب از ورودی‌ها مانند $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ یک بردار خروجی مانند $(y_1 , \ldots , y_s)$ تولید می‌کنند، از این رو ناچاریم تقریبی از تابع تولید را در دست داشته باشیم. تقریب تابع تولید به دو صورت امکان پذیر می‌باشد :

۱. روش‌های پارامتری
۲. روش‌های غیرپارامتری

از زمان‌های بسیار قدیم روش‌های پارامتری یکی از روش‌های شناخته شده برای تخمین تابع تولید بوده است، در حقیقت می‌توان گفت تاسال ۱۹۵۷ که فارال[2] روش غیرپارامتری را پیشنهاد کرد، از روش‌های

1. Production Function 2. Farrell

پارامتری استفاده می‌شد. در این روش‌ها شکل خاصی از یک تابع را برای تخمین تابع تولید در نظر می‌گیرند و با استفاده از روش‌های ریاضی پارامترهای تابع را مشخص می‌کنند. اصطلاحا این روش به روش برازش منحنی[1] معروف است.

روش‌های پارامتری مشکلاتی داشت که می‌توان به شکل تابع تولید – محدود بودن فقط برای یک خروجی – تمایل مرکزی، اشاره کرد که با توجه به ایرادهای روش‌های پارامتری گاهی استفاده از این روش را غیر ممکن می‌سازد، برای همین استفاده از روش‌های غیر پارامتری گسترش بیشتری یافت.

۱-۲ مباحثی از DEA

یک واحد تصمیم‌گیری (DMU)، عبارت است از واحدی که با دریافت بردار ورودی مانند $x=(x_1,\ldots, x_m)$ بردار خروجی مانند $y = (y_1 , \ldots , y_s)$ را تولید می‌نماید.

واحدهای تصمیم‌گیری متجانس، عبارت است از واحدهایی که عمل مشابه دارند و با دریافت ورودی‌های مشابه، خروجی‌های مشابه تولید می‌کنند.

فرض کنید دو بردار Z_1 و Z_2 هم سایز باشند در این صورت، بردار Z_1 غالب بر بردار Z_2 است اگر و فقط اگر $Z_1 \geq Z_2$ و $Z_1 \neq Z_2$ در این صورت می‌گویند بردار Z_2 به وسیله بردار Z_1 مغلوب گردیده است.

به عبارت دیگر، بردار Z_1 غالب بر بردار Z_2 است اگر $Z_{1j} \geq Z_{2j}$ $(j = 1 , \ldots , n)$ و نامساوی حداقل برای یک مولفه به طور اکید بر قرار باشد.

۱-۲-۱ مجموعه امکان تولید

با داشتن تابع تولید به راحتی می‌توان کارایی یک واحد تصمیم‌گیری را ارزیابی کرد، ولی به دلایل مختلف که ذکر شد، تابع تولید به راحتی قابل محاسبه نیست و در بعضی از مواقع به دست آوردن

1. Curve Fitting

صورت تحلیلی آن غیر ممکن است. از این رو، مجموعه‌ای به نام مجموعه امکان تولید[1] می‌سازند و مرز آن را تقریبی از تابع تولید در نظر می‌گیرند.

تابع تولید حاصل از مجموعه امکان تولید یک مرز تقریبی با توجه به تکنولوژی تولید است، مجموعه امکان تولید را با T نشان می‌دهند و چنین تعریف می‌شود :

$$T = \{ (x, y) : \text{بردار } x \text{ می‌تواند بردار } y \text{ را تولید کند.} \}.$$

مجموعه امکان تولید با توجه به تکنولوژی تولید مشخص می‌شود.

۱-۲-۲ انواع تکنولوژی تولید :

۱. تکنولوژی تولید با بازده به مقیاس ثابت

یعنی اگر ورودی x خروجی y را تولید کند آنگاه به ازای هر $\lambda > 0$، λx، می‌تواند λy را تولید کند و کارایی نسبی (x, y) و $(\lambda x, \lambda y)$ یکسان است. به بیان دیگر، هر نوع تغییر در ورودی‌ها، همان نسبت تغییر در خروجی‌ها را باعث می‌گردد. به عبارتی، افزایش در ورودی‌ها نه باعث صرفه جویی می‌شود و نه باعث بالا رفتن هزینه. تکنولوژی تولید با بازده مقیاس ثابت را، اصل بی‌کرانی اشعه در تولید نیز می‌نامند.

۲ تکنولوژی تولید با خاصیت تحدب

اگر ورودی x_1، خروجی y_1 و ورودی x_2، خروجی y_2 را تولید کنند، آنگاه ورودی $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$، خروجی $\lambda y_1 + (1 - \lambda) y$ را تولید می‌کند که در آن $0 < \lambda < 1$. مطلب فوق تحت عنوان اصل تحدب[2] در تکنولوژی تولید مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۳ امکان پذیری (اختیاری بودن)

در تکنولوژی تولید امکان‌پذیر[3]، اگر $\bar{x}$، خروجی $\bar{y}$ را تولید کند آنگاه هر $x \geq \bar{x}$ می‌تواند $\bar{y}$ را تولید کند و اگر $\bar{x}$، $\bar{y}$ را تولید کند آنگاه هر $y \leq \bar{y}$ نیز می‌تواند به وسیله $\bar{x}$ تولید شود.

1. Production Possibility Set (PPS) 2. Convexity 3. Plausibility

با در نظر گرفتن نوع تکنولوژی تولید، مجموعه امکان تولیدهای متفاوتی می‌توان ساخت، که در این جا به دو نوع مجموعه امکان تولید اشاره می‌شود :

۱. مجموعه امکان تولید CCR یا همان بازده به مقیاس ثابت.

۲. مجموعه امکان تولید BCC یا همان بازده به مقیاس متغیر.

۱-۲-۳ مجموعه امکان تولید CCR

مجموعه امکان تولید زیر را در نظر گرفته:

$$T = \{ (x , y): x > 0 \text{ بتواند، } y > 0 \text{ را تولید کند} \}.$$

فرض کنید n مشاهده به صورت (x_j , y_j) $(j=1 , \dots , n)$ موجود است و بردار ورودی x_j بردار خروجی y_j تولید می‌کند که در آن $(j=1,\dots,n,\ x_j > 0,\ x_j \neq 0)$ و $(j=1,\dots,n,\ y_j \geq 0,\ y_j \neq 0)$.

به عبارت دیگر، حداقل یکی از مولفه‌های بردار ورودی و بردار خروجی مخالف صفر و مثبت است، مجموعه T طوری در نظر گرفته می‌شود که در اصول زیر صدق کند.

۱. اصل شمول مشاهدات :

این اصل می‌گوید که به ازای هر j $(j = 1 , .. , n)$ آنگاه $(x_j , y_j) \in T$، یعنی تمامی مشاهدات به مجموعه امکان تولید تعلق دارند.

۲. اصل بی کرانی اشعه (بازده مقیاس به ثابت)

با قبول این اصل فرض می‌کنید که تکنولوژی تولید بازده مقیاس ثابت دارد، یعنی اگر x y را تولید کند آنگاه به ازای هر $\lambda > 0$، λx می‌تواند λy را تولید کند و در این صورت کارای (x , y) با کارای $(\lambda x, \lambda y)$ به ازای هر $\lambda > 0$ یکسان است.

۳. اصل امکان پذیری

اگر $(\bar{x}, \bar{y}) \in T$، آنگاه به ازای هر x و y که در آن $x \geq \bar{x}$ و $y \leq \bar{y}$ ، رابطه زیر برقرار است :

$(x, y) \in T.$

٤. اصل تحدب

اگر $(x_2, y_2) \in T$ و (x_1, y_1) آنگاه برای هر λ $(0 < \lambda < 1)$ رابطه زیر برقرار است :

$$\lambda (x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2) \in T. \qquad (۱-۲-۱)$$

٥. اصل کمینه درونی

T کوچکترین مجموعه‌ای است که در اصول ۱ تا ٤ صدق می‌کند و مجموعه امکان تولید T که در اصول ۱ تا ٥ صدق می‌کند را با T_C یا T_{CCR} نشان می‌دهند که به صورت زیرتعریف می‌شود :

$$T_C = \left\{(x, y) : x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j,\ y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j,\ \lambda_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n\right\} \qquad (۲-۲-۱)$$

۱-۲-٤ مجموعه امکان تولید BCC

مجموعه امکان تولیدی را در نظر گیرید که در ٤ اصل زیر صدق می‌کند :

۱. اصل شمول مشاهدات

۲. اصل امکان پذیری

۳. اصل تحدب

٤. اصل کمینه درونی

تنها مجموعه‌ای که در اصول بالا صدق می‌کند، به صورت زیر تعریف شده که با T_V یا T_{BCC} نشان می‌دهند :

$$T_V = \{(x, y) : x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j,\ y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,\ \lambda \geq 0\} \qquad (۳-۲-۱)$$

۱-۳ مدل CCR در ماهیت ورودی

همان‌طور که در شکل ۱.۱ دیده می‌شود، T_c عبارت از مخروط AOX است، DMU_0 با ورودی x_o و خروجی y_o مورد ارزیابی قرار می‌گیرد، امکان تولید مانند $(\theta x_o, y_o)$ را در نظر گیرید که $y \geq y_o$ و $0 \leq \theta x_0 \leq x_0$ واضح است که اگر $\theta = \frac{AH'}{HH'}$ آنگاه امکان تولید روی مرز OA قرار می‌گیرد، که در این صورت θ کمترین مقداری است که $(\theta x_0 , y_0)$ روی مرز T_c قرار می‌گیرد. هدف پیدا کردن کوچکترین θای است که $(\theta x_0 , y_0)$ داخل PPS باشد، یعنی حل مدل زیر می‌شود:

$$\min \quad \theta \qquad (۱-۳-۱)$$

$$\text{s.t.} \quad (\theta x_o , y_o) T_c .$$

با توجه به تعریف T_c و شرط عضویت در آن، مدل بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت :

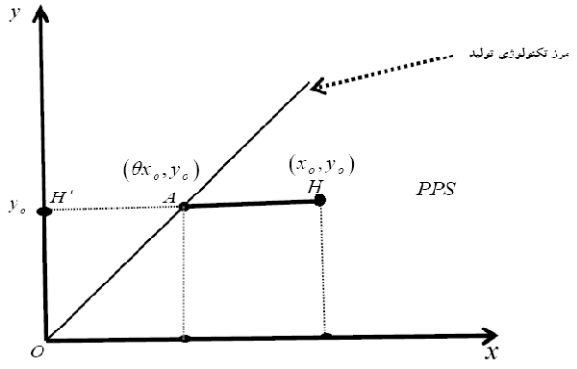
$$\min \quad \theta \qquad (۲-۳-۱)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq \theta x_o$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq y_o$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

که این مدل به مدل پوششی CCR در ماهیت ورودی معروف است .



شکل ۱-۱ مدل CCR در ماهیت ورودی

با معرفی متغیرهای کمکی S_i^- (i = 1 , … , m) و S_r^+ (r = 1 , … , s) صورت مدل پوششی CCR به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\min \quad \theta \qquad (۳-۳-۱)$$

$$\text{S.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + S_i^- = \theta x_{i0}, \ i = 1,\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - S_r^+ = y_{r0}, \ r = 1,\ldots,s$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad , \quad j = 1 , \ldots , n$$
$$S_i^- \geq 0 \quad , \quad i = 1 , \ldots , m$$
$$S^+_r \geq 0 \quad , \quad r = 1 , \ldots , s \ .$$

اگر در مدل (۱-۳-۳) $\theta^* < 1$، آنگاه DMU_o ناکارا است، ولی اگر $\theta^*=1$، دو حالت اتفاق می‌افتد که مبنای تعاریف زیر است.

تعریف (۱-۳-۱) :

اگر در مدل پوششی CCR با ماهیت ورودی $\theta^*= 1$ و در تمامی جواب‌های بهینه مقادیر متغیرهای کمکی برابر صفر باشند، آنگاه DMU_o کارای قوی یا کارای پاراتو است.

تعریف (۱-۳-۲) :

اگر در مدل پوششی CCR با ماهیت ورودی $\theta^*= 1$، ولی در بعضی جواب های بهینه حداقل یکی از متغیرهای کمکی مخالف صفر باشد، آنگاه DMU_o کارای ضعیف است.

تعریف (۱-۳-۳) :

در مدل (۱-۳-۳) وقتی $\theta^*= 1$، گویند DMU به مفهوم شعاعی کاراست که ممکن است این واحد کارای ضعیف یا قوی باشد.

وجه تسمیه کارای شعاعی آن است که در امتداد شعاعی، ورودی‌ها به یک نسبت منقبض یا خروجی‌ها در امتداد شعاعی، به یک نسبت منبسط می‌گردند.