بسم الله الرّحمن الرّحيم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

خمینه‌های کنموتسوی φ-ریچی متقارن

استاد راهنما

دکتر اسمعیل عابدی

استاد مشاور

دکتر قربانعلی حقیقت دوست

پژوهشگر

رقیه عبدی تازه‌کند

شهریورماه ۱۳۹۰

تبریز - ایران

تقدیم به

مادر مهربانم

و پدر بزرگوارم

سپاسگزاری

سپاس خدای را که وجودمان را بر پویش، قلممان را بر نگارش و جسممان را بر کوشش واداشت و تلاشمان را فرجام نیکو عنایت فرمود. حمد و سپاس خدای را که معرفت خویش را ارزانی بندگانش نمود تا او را بشناسند و افتخار عبودیت به ساحت قدسی‌اش را اعطاء نمود تا بسوی او تقرب جویند.

سپاس بیکران بر همدلی و همراهی خانواده دلسوز و فداکارم که همواره دعای خیرشان گره گشای مشکلات زندگی‌ام بوده و هست.

تشکر و سپاس از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر اسمعیل عابدی که از محضر پر فیض‌شان، بهره برده‌ام.

تقدیر و تشکر از زحمات جناب آقای دکتر قربانعلی حقیقت دوست که افتخار بهره‌مندی از نظرات و مشاورهٔ ایشان را در انجام این پایان‌نامه داشته‌ام.

تشکر و سپاس از جناب آقای دکتر رضا چاوش خاتمی که زحمت نظارت و داوری این پایان‌نامه را تقبل فرموده‌اند.

رقیه عبدی تازه‌کند

شهریورماه ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه خمینه‌های کنموتسوی φ-ریچی متقارن را مطالعه می‌کنیم. ثابت می‌کنیم هر خمینهٔ کنموتسوی φ-متقارن، φ-ریچی متقارن است همچنین یک خمینهٔ کنموتسو φ-ریچی متقارن است اگر وتنها اگر انیشتینی باشد. در نهایت نشان می‌دهیم CR-ابررویه‌های φ-متقارن فضا فرم کنموتسو دارای عملگر شکل $\mathcal{D}$-موازی می‌باشند. همچنین ثابت می‌کنیم عملگر شکل CR-ابررویه‌های فضا فرم کنموتسو با شرط $c \neq -1$، $\mathcal{D}$-موازی نیستند. بنابراین CR-ابررویه‌های φ-متقارن فضا فرم کنموتسو با شرط $c \neq -1$ وجود ندارند.

کلید واژه‌ها: خمینهٔ انیشتینی، خمینهٔ کنموتسو، خمینهٔ کنموتسوی φ-متقارن، خمینهٔ کنموتسوی φ-ریچی متقارن، فضا فرم، CR-زیر خمینه

فهرست مطالب

پیشگفتار

در سال ۱۹۷۲ $K.Kenmotsu$ خمینه‌های کنموتسو را معرفی می‌کند([۸]). $T.Takahashi$ فضاهای φ-ریچی متقارن ساساکی را معرفی و مورد مطالعه قرار می‌دهد([۱۵]). $U.C, De$ و $G.Pathak$ خمینه‌های کنموتسوی با بعد ۳ را مورد بررسی قرار می‌دهند([۴]). در سال ۲۰۰۶ $C.\ddot{O}zg\ddot{u}r$ و $U.C.De$ تانسور خمیدگی شبه همدیس خمینه‌های کنموتسو را مطالعه کرده‌اند([۱۲]).
در سال ۲۰۰۸ $U.C.De$ خمینه‌های کنموتسوی φ-متقارن را بررسی می‌کند([۵]). $U.C.De$ و $A.Sarkar$ خمینه‌های ساساکی φ-ریچی متقارن را معرفی و مورد مطالعه قرار داده‌اند([۶]).
در فصل اول تعاریف و قضیه‌های مقدماتی هندسه ریمانی را که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد بیان می‌کنیم.
در فصل دوم خمینه‌های مختلط، تقریباً مختلط، تقریباً هرمیتی، هرمیتی، کاهلری، کوشی-ریمان، کنتاکت، تقریباً کنتاکت، متری تقریباً کنتاکت، متری کنتاکت و تقریباً کنتاکت نرمال معرفی می‌شوند. خمینه‌های کنتاکت در واقع مشابه خمینه‌های مختلط می‌باشند با این تفاوت که خمینه‌های مختلط با بعد زوج و خمینه‌های کنتاکت با بعد فرد می‌باشند.
در فصل سوم خمینه‌ها و فضا فرم‌های ساساکی و کنموتسو معرفی می‌شوند و تعدادی از قضایای مربوط به خمینه‌ها و فضا فرم‌های کنموتسو را اثبات می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که خمینهٔ کنموتسو نمی‌تواند یک خمینهٔ ساساکی باشد.
در فصل چهارم خمینه‌های کنموتسوی φ-متقارن و φ-ریچی متقارن را معرفی می‌کنیم و تعدادی قضایای مربوط به این خمینه‌ها را اثبات می‌کنیم.
در فصل پنجم نشان می‌دهیم CR-ابررویه‌های φ-متقارن فضا فرم کنموتسو دارای عملگر شکل $\mathcal{D}$-موازی می‌باشند. همچنین ثابت می‌کنیم عملگر شکل CR-ابررویه‌های فضا فرم کنموتسو با شرط $c \neq -1$، $\mathcal{D}$-موازی نیستند. بنابراین CR-ابررویه‌های φ-متقارن فضا فرم کنموتسو با

شرط $c \neq -1$ وجود ندارند.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعاریف و قضیه‌های مقدماتی هندسه ریمانی را که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. نگاشت $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک فرم دو خطی متقارن روی فضای برداری V گوییم هر گاه $\mathbb{R}$-دو خطی باشد و به ازای هر $v, w \in V$ داشته باشیم $b(v,w) = b(w,v)$.

تعریف ۲.۱. یک فرم دو خطی متقارن b روی V

۱- مثبت معین (منفی معین) است هرگاه به ازای هر $v \neq ۰$ داشته باشیم $b(v,v) > ۰$ ($b(v,v) < ۰$).

۲- ناتباهیده است هر گاه $b(v,w) = ۰$ به ازای هر $w \in V$ نتیجه دهد $v = ۰$.

تعریف ۳.۱. یک ضرب اسکالر g روی فضای برداری V عبارتست از یک فرم دو خطی متقارن ناتباهیده.

تعریف ۴.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ هموار، TM کلاف مماس آن و $\pi : TM \longrightarrow M$ نگاشت تصویر کلاف مماس باشد.مقصود از یک میدان برداری C^∞ روی M، نگاشت C^∞ مانند $X : M \longrightarrow TM$ می‌باشد به طوریکه $\pi \circ X = id_M$. بنابراین X به هر نقطه $x \in M$، عضو X_x از T_xM را نسبت می‌دهد.

تعریف ۵.۱. فرض کنید M یک خمینه باشد. مجموعهٔ نگاشت‌های حقیقی C^∞ روی M را با $F(M)$ و مجموعهٔ میدان‌های برداری C^∞ روی M را با $\chi(M)$ نمایش می دهیم. هر یک از این

دو مجموعه تحت عمل جمع نگاشت‌ها یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است. ضرب نگاشت‌ها در $F(M)$، این مجموعه را به یک حلقه تبدیل می‌کند. برای $X \in \chi(M)$ و $f \in F(M)$ میدان برداری fX به ازای هر $p \in M$ به صورت $fX(p) = f(p)X(p)$ تعریف می‌شود بنابراین $\chi(M)$ یک مدول روی $F(M)$ است.

تعریف ۶.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ هموار باشد. نگاشت

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

را یک التصاق گوییم هر گاه:

۱- $\nabla_V W$ نسبت به V، $F(M)$-خطی باشد:

$$\nabla_{fX_۱+gX_۲}Y = f\nabla_{X_۱}Y + g\nabla_{X_۲}Y \qquad \forall\, f,g \in F(M)$$

۲- $\nabla_V W$ نسبت به W، $\mathbb{R}$-خطی باشد:

$$\nabla_X aY_۱ + bY_۱ = a\nabla_X Y_۱ + b\nabla_X Y_۲ \qquad \forall\, a,b \in \mathbb{R}$$

۳- در قاعدهٔ ضرب صدق کند:

$$\nabla_V(fW) = (Vf)W + f\nabla_V W \qquad\qquad \forall\, f \in F(M)$$

∇ را مشتق کواریان W در امتداد V نسبت به التصاق ∇ گوییم.

تعریف ۷.۱. فرض کنید $V_۱,\dots,V_s,W$ مدول‌هایی روی حلقهٔ K باشند در این صورت $V_۱ \times \dots \times V_s$ نیز یک مدول روی حلقهٔ K خواهد بود. $A : V_۱ \times \dots \times V_s \longrightarrow W$ را چند خطی گوییم هر گاه نسبت به تمام متغیرها خطی باشد یعنی

$$\begin{aligned} A(v_۱,\dots,\lambda v_i + \mu v_i, v_{i+۱},\dots,v_s) &= \lambda A(v_۱,\dots,v_i,\dots,v_s) \\ &+ \mu A(v_۱,\dots,v_i,\dots,v_s) \end{aligned}$$

که $\lambda,\mu \in K$ برای $۱ \le i \le s$.

تعریف ۸.۱. فرض کنید V یک K-مدول باشد در این صورت V^* که مجموعهٔ همهٔ توابع K-خطی از V به K می باشد، با عمل جمع توابع و ضرب توسط عناصر حلقهٔ K به یک K-مدول تبدیل می‌شود، که مدول دوگان V نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۱. به ازای اعداد صحیح $r \geqslant ۰$ و $s \geqslant ۰$ که هر دو همزمان صفر نیستند، تابع چند خطی $A : (V^*)^r \times V^s \longrightarrow K$ را یک تانسور از نوع (r,s) روی V گوییم و با نماد $T^r_s(V)$ نمایش می‌دهیم. تانسور از نوع $(۰,۰)$ را یک عنصر از حلقهٔ K می‌گیریم. یک میدان تانسوری A روی خمینهٔ M عبارتست از یک تانسور روی $F(M)$-مدول $\chi(M)$.

تعریف ۱۰.۱. یک مشتق تانسوری ∇ روی خمینهٔ هموار M عبارتست از گردایه‌ای از توابع $\mathbb{R}$-خطی مانند

$$\nabla = \nabla^r_s := T^r_s(M) \longrightarrow T^r_s(M) \qquad r \geqslant ۰, s \geqslant ۰$$

به طوریکه به ازای هر دو تانسور A و B و انقباض C داشته باشیم:

$$\nabla(A \otimes B) = \nabla A \otimes B + A \otimes \nabla B$$
$$\nabla(CA) = C(\nabla A)$$

لم ۱.۱. *فرض کنید ∇ یک مشتق تانسوری روی M باشد. اگر $A \in T^r_s(M)$ آنگاه داریم:*

$$\begin{aligned}\nabla(A(\theta^۱,\cdots,\theta^r,X_۱,\cdots,X_s)) &= (\nabla A)(\theta^۱,\cdots,\theta^r,X_۱,\cdots,X_s)\\ &+\sum_{i=۱}^{r} A(\theta^۱,\cdots,\nabla\theta^i,\cdots,\theta^r,X_۱,\cdots,X_s)\\ &+\sum_{j=۱}^{s} A(\theta^۱,\cdots,\theta^r,X_۱,\cdots,\nabla X_j,\cdots,X_s)\end{aligned}$$

که این رابطه را قاعدهٔ ضرب می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۱. مشتق کواریان (r,s) تانسور A روی خمینهٔ هموار M ، عبارتست از $(r,s+۱)$ تانسور ∇A به طوریکه به ازای هر $V, X_i \in \chi(M)$ و $\theta^j \in \chi^*(M)$ داشته باشیم:

$$(\nabla A)(\theta^۱,\cdots,\theta^r,X_۱,\cdots,X_s,V) = (\nabla_V A)(\theta^۱,\cdots,\theta^r,X_۱,\cdots,X_s)$$

در حالتی که $r = s = 0$ مشتق کواریان تابع f همان دیفرانسیل معمولی‌اش می‌باشد زیرا

$$(\nabla f)(V) = \nabla_V f = Vf = df(V) \qquad \forall\, V \in \chi(M).$$

تعریف ۱۲.۱. فرض کنید $u^1 \cdots u^n$ مختصات طبیعی $\mathbb{R}^n$ باشند اگر V و $W = \sum W^i \partial_i$ میدان‌های برداری روی $\mathbb{R}^n$ باشند آنگاه میدان برداری $\nabla_V W = \sum V(W^i)\partial_i$ را مشتق کواریان طبیعی W نسبت به V گوییم.

تعریف ۱۳.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ هموار باشد. یک متر ریمانی روی M عبارتست از یک $(0,2)$ میدان تانسوری متقارن که در هر نقطه مثبت معین است.

تعریف ۱۴.۱. یک خمینهٔ هموار همراه با یک متر ریمانی را یک خمینهٔ ریمانی گوییم.

تعریف ۱۵.۱. روی خمینهٔ ریمانی M یک التصاق منحصربفرد ∇ چنان موجود است که

۱- $T(V,W) = [V,W] - \nabla_V W + \nabla_W V = 0$ (تانسور تاب ∇ صفر است)

۲- $Zg(V,W) = g(\nabla_Z V, W) + g(V, \nabla_Z W)$ (∇ سازگار با متر ریمانی است)

در این صورت ∇ را التصاق لوی-سیویتا (التصاق ریمانی) گوییم.

تعریف ۱۶.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانی هموار و X یک میدان برداری روی M باشد، مشتق تانسوری L_X به ازای هر میدان برداری Y و تابع هموار f روی M به صورت

$$L_X Y = [X,Y]$$
$$L_X f = Xf$$

تعریف می‌شود که L_X را مشتق لی نسبت به میدان برداری X می‌نامیم.

تعریف ۱۷.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانی باشد. یک میدان برداری کیلینگ روی M، یک میدان برداری مانند X است که مشتق لی g نسبت به میدان برداری X صفر باشد یعنی داشته باشیم $L_X g = 0$.

تعریف ۱۸.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانی با التصاق ریمانی ∇ باشد. نگاشت $R : \chi^3(M) \longrightarrow \chi(M)$ با ضابطهٔ

$$R(X,Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

یک $(1,3)$ میدان تانسوری روی M می‌باشد که تانسور خمیدگی ریمانی نامیده می‌شود. نگاشت R در روابط زیر صدق می‌کند:

$$(1) \quad R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$$

$$(2) \quad R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0 \quad \text{(اتحاد اول بیانچی)}$$

$$(3) \quad g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$$

$$(4) \quad g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y).$$

روابط بالا را تقارن‌های تانسور خمیدگی می‌نامیم.

تعریف ۱.۱۹. فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانی و $p \in M$ باشد. در این صورت تابع چند خطی F که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F : T_pM^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v,w,x,y) \longrightarrow g(R(v,w)x,y)$$

یک تابع از نوع خمیدگی‌گوییم هر گاه در تقارن‌های تانسور خمیدگی صدق کند.

تعریف ۱.۲۰. فرض کنید M یک خمینهٔ هموار و Π یک زیر فضای دو بعدی از فضای مماس T_pM باشد به طوریکه Π توسط میدان‌های برداری X, Y تولید می‌شود در این صورت خمیدگی برشی M نسبت به Π در نقطه p عبارتست از:

$$K(X,Y) := \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}.$$

تعریف ۱.۲۱. فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانی باشد. M را با خمیدگی ثابت گوییم هر گاه خمیدگی برشی ثابت داشته باشد.

لم ۱.۲. فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانی باشد. اگر خمیدگی برشی در نقطهٔ $p \in M$ مساوی صفر باشد آنگاه تانسور خمیدگی ریمانی در نقطهٔ p نیز مساوی صفر خواهد شد.

اثبات. از اینکه $K = 0$ است از تعریف خمیدگی برشی به ازای هر $v, w \in T_pM$ داریم

$g(R(v,w)w,v) = 0$. به ازای هر $v, w \in T_pM$ نشان می‌دهیم $R(v,w)v = 0$. با پلاریزه کردن $R(v,w)v$ به ازای هر x داریم:

$$0 = g(R(v,w+x)v, w+x) = g(R(v,w)v,w) + g(R(v,x)v,x) + g(R(v,w)v,x) + g(R(v,x)v,w) \qquad (1.1)$$

ولی با توجه به تقارن تانسور خمیدگی داریم:

$$g(R(v,w)v,x) = g(R(v,x)v,w).$$

لذا از (۱.۱) به دست می‌آوریم $g(R(v,w)v,x) = 0$. حال به ازای هر $v,w,x \in T_pM$ نشان می‌دهیم $R(v,w)x = R(w,x)v$. با پلاریزه کردن $R(v,w)v$ داریم:

$$0 = R(v+x,w)(v+x) = R(v,w)v + R(x,w)v + R(v,w)x + R(x,w)x$$

لذا نتیجه می‌گیریم $R(v,w)x = R(w,x)v$. حال با توجه به اتحاد اول بیانچی به ازای هر $v,w,x \in T_pM$ داریم:

$$3R(v,w)x = R(v,w)x + R(w,x)v + R(x,v)w = 0$$

بنابراین در نقطهٔ $p \in M$ به دست می‌آوریم $R = 0$.

نتیجه ۱.۱. فرض کنید F تابع از نوع خمیدگی روی T_pM چنان باشد که

$$K(v,w) = \frac{F(v,w,w,v)}{g(v,v)g(w,w) - g(v,w)^2}.$$

که در آن v, w یک صفحه را تولید می‌کنند، در این صورت به ازای هر $v,w,x,y \in T_pM$ داریم:

$$g(R(v,w)x,y) = F(v,w,x,y).$$

اثبات. تابع تفاضل $\triangle(v,w,x,y) = F(v,w,x,y) - g(R(v,w)x,y)$ در تقارن‌های تانسور خمیدگی صدق می‌کند لذا یک تابع از نوع خمیدگی است، با توجه به فرض $\triangle(v,w,v,w) = 0$ لذا با توجه به لم قبل نتیجه می‌گیریم $\triangle = 0$.

نتیجه ۲.۱. اگر M دارای خمیدگی ثابت c باشد آنگاه داریم:

$$R(x,y)z = c\{g(z,y)x - g(z,x)y\}.$$

اثبات. یک محاسبهٔ سرراست نشان می‌دهد که

$$F(x,y,v,w) = c\{g(v,y)g(x,w) - g(v,x)g(y,w)\}$$

در تقارن‌های تانسور خمیدگی صدق می‌کند. بنابراین F یک تابع از نوع خمیدگی در هر نقطهٔ p تعریف می‌کند و $F(x,y,y,x) = c\,Q(x,y)$. لذا اگر x,y صفحهٔ ناتبهگون Q را تولید کنند آنگاه

$$K(x,y) = c = \frac{F(x,y,y,x)}{Q(x,y)}.$$

حکم با توجه به نتیجهٔ قبل، حاصل می‌شود.

تعریف ۲۲.۱. فرض کنید (M,g) یک خمینهٔ ریمانی باشد. تانسور ریچی عبارتست از $(۰,۲)$ میدان تانسوری Ric که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ric(X,Y) := TrZ \longrightarrow R(Z,X)Y \qquad \forall X,Y,Z \in \chi(M)$$

فرض کنید $\{e_i\}$ یک کنج (پایهٔ یکا متعامد) برای $T_p(M)$ نسبت به متر g باشد. در این صورت نمایش تانسور ریچی در پایهٔ $\{e_i\}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Ric(X,Y) := \sum_i g(R(e_i,X)Y, e_i). \qquad (۲.۱)$$

تعریف ۲۳.۱. فرض کنید (M,g) یک خمینهٔ ریمانی و $p \in M$ و $\{e_i\}$ یک کنج (پایهٔ یکا متعامد) برای $T_p(M)$ نسبت به متر g باشد. فرض کنید $\varepsilon_{ij} = g(e_i,e_j)$ و (ε^{ij}) ماتریس وارون آن باشد. خمیدگی اسکالر برای M در نقطهٔ p به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r := \varepsilon^{ij} Ric(e_i,e_j). \qquad (۳.۱)$$

تعریف ۲۴.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ هموار باشد. میدان برداری V را روی M موازی گوییم هر گاه به ازای هر میدان برداری X روی M داشته باشیم $\nabla_X V = ۰$.

لم ۳.۱. فرض کنید $\alpha : I \longrightarrow M$ یک خم هموار روی خمینهٔ هموار M و $a \in I$ و $z \in T_{\alpha(a)}(M)$ باشد. در این صورت میدان برداری موازی منحصربفرد Z روی α چنان وجود دارد که $Z(a) = z$.

تعریف ۲۵.۱. با توجه به لم قبل، اگر $b \in I$ در این صورت تابع

$$P = P_a^b(\alpha) : T_p(M) \longrightarrow T_q(M)$$
$$z \longrightarrow Z(b)$$

انتقال موازی در طول α از $p = \alpha(a)$ به $q = \alpha(b)$ نامیده می‌شود.

لم ۴.۱. انتقال موازی یک ایزومتری خطی می‌باشد.

تعریف ۲۶.۱. فرض کنید $\overline{M}$ یک خمینهٔ ریمانی با التصاق ریمانی $\overline{\nabla}$ و M یک زیر خمینهٔ $\overline{M}$ باشد در این صورت نگاشت $h : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)^{\perp}$ با ضابطهٔ

$$h(V, W) = nor\overline{\nabla}_V W$$

را فرم اساسی دوم M در $\overline{M}$ می‌نامیم. همچنین h، $F(M)$-دو خطی و متقارن می‌باشد.

تعریف ۲۷.۱. فرض کنید $\overline{M}$ یک خمینهٔ ریمانی با التصاق ریمانی $\overline{\nabla}$ و M یک زیر خمینهٔ $\overline{M}$ باشد. فرض کنید U یک میدان برداری قائم واحد روی M باشد. میدان تانسوری A از نوع $(۱, ۱)$، روی M با ضابطهٔ $g(AV, W) = g(h(V, W), U)$ تعریف می‌شود که عملگر شکل M در $\overline{M}$ می‌نامیم.

لم ۵.۱. فرض کنید $\overline{M}$ یک خمینهٔ ریمانی با التصاق ریمانی $\overline{\nabla}$ و M یک ابررویهٔ ریمانی از $\overline{M}$ باشد. فرض کنید U میدان برداری قائم واحد روی M باشد. اگر A عملگر شکل وابسته به U باشد آنگاه $\overline{\nabla}_V U = -AV$ و در هر نقطه عملگر خطی A روی T_pM متقارن می‌باشد.

لم ۶.۱. فرض کنید $\overline{M}$ یک خمینهٔ ریمانی با التصاق ریمانی $\overline{\nabla}$ و M یک زیر خمینهٔ $\overline{M}$ باشد. اگر $V, W \in \chi(M)$ آنگاه $\nabla_V W = tan\overline{\nabla}_V W$.

نتیجه ۳.۱. فرض کنید $\overline{M}$ یک خمینهٔ ریمانی با التصاق ریمانی $\overline{\nabla}$ و M یک زیر خمینهٔ $\overline{M}$ باشد در این صورت به ازای میدان‌های برداری X, Y روی M داریم $\overline{\nabla}_V W = \nabla_V W + h(V, W)$ که فرمول گاوس نام دارد.

تعریف ۲۸.۱. عملگر Q تعریف شده به صورت زیر را عملگر ریچی می‌نامیم

$$Ric(X, Y) = g(QX, Y). \qquad (۴.۱)$$

تعریف ۲۹.۱. یک فضای متقارن ریمانی عبارتست از یک خمینهٔ ریمانی همبند M چنان که برای هر $p \in M$ یک ایزومتری یکتا مانند $\zeta_p : M \longrightarrow M$ با شرط $d\zeta_p = -id$ روی $T_p(M)$ موجود باشد.

مثال ۱.۱. $\mathbb{R}^n$ متقارن است. زیرا به ازای هر $p \in \mathbb{R}^n$ نگاشت $p + x \longrightarrow p - x$ یک ایزومتری می‌باشد.

تعریف ۳۰.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ هموار باشد. هر گاه هر ژئودزیک M با دامنهٔ کل اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ تعریف شود در این صورت M را خمینهٔ کامل می‌نامیم.

تعریف ۳۱.۱. خمینهٔ ریمانی M را موضعاً متقارن می‌نامیم هر گاه $\nabla R = 0$.

لم ۷.۱. هر فضای ریمانی متقارن، موضعاً متقارن می‌باشد.

لم ۸.۱. یک فضای ریمانی متقارن، کامل می‌باشد.

تعریف ۳۲.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ هموار n-بعدی ($n \geq 0$) باشد. فرض کنید Ric و r به ترتیب تانسور ریچی و خمیدگی اسکالر خمینهٔ M باشند. تانسور خمیدگی همدیس وایل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} C(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}\{Ric(Y,Z)X - Ric(X,Z)Y + g(Y,Z)QX \\ - g(X,Z)QY\} + \frac{r}{(n-1)(n-2)}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} \end{aligned}$$

که Q عملگر ریچی می‌باشد. تانسور خمیدگی همدیس وایل برای بعد ۲ و ۳ برابر با صفر می‌باشد. در این صورت تانسور خمیدگی ریمانی برای بعد ۳ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = Ric(Y,Z)X - Ric(X,Z)Y + g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY \\ - \frac{r}{2}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}. \end{aligned} \tag{۵.۱}$$

تعریف ۳۳.۱. یک توزیع k-بعدی D روی یک خمینهٔ M عبارتست از یک نگاشت D که به هر نقطهٔ $p \in M$ یک زیر فضای k-بعدی D_p از T_pM (فضای مماس بر M در نقطهٔ p) نسبت می‌دهد. D را مشتق‌پذیر گویند چنانچه به ازای هر $p \in M$ یک همسایگی U با k میدان برداری مستقل

خطی $X_1, \cdots, X_k$ روی U وجود داشته باشد به طوریکه به ازای هر $q \in U$، $\{X_{1_q}, \cdots, X_{k_q}\}$ یک پایه برای D_q باشد.

تعریف ۳۴.۱. یک زیر خمینهٔ k-بعدی N از خمینهٔ M را یک خمینهٔ انتگرال توزیع D گویند چنانچه به ازای هر $p \in N$، $D_p = i_*(T_pN)$ که در آن i_* مشتق نگاشت شمول $i : N \longrightarrow M$ است. توزیع D را انتگرال‌پذیر گویند، چنانچه به ازای هر $p \in M$ یک خمینهٔ انتگرال D مماس بر p وجود داشته باشد. یعنی هر نقطه از M مشمول در یک خمینهٔ انتگرال توزیع D باشد. همچنین توزیع D را چرخشی گوییم هر گاه به ازای هر $X, Y \in D$ داشته باشیم $[X, Y] \in D$. توزیع D را انتگرال پذیر گوییم اگر و تنها اگر چرخشی باشد.

تعریف ۳۵.۱. فرض کنید M یک خمینهٔ هموار و w یک k-فرم دیفرانسیل‌پذیر روی M باشد. w را روی M بسته گوییم هر گاه $dw = 0$ و نیز w را روی M دقیق گوییم هر گاه یک $(k-1)$-فرم دیفرانسیل‌پذیر روی M وجود داشته باشد به طوریکه $w = d\eta$ باشد. در واقع $d \circ d = 0$ نتیجه می‌دهد که هر فرم دقیق بسته است. ۱-فرم w را روی خمینهٔ هموار M دقیق گوییم هر گاه تابع $f \in F(M)$ موجود باشد به طوریکه $w = df$.

فصل ۲

خمینه‌های کوشی-ریمان و خمینه‌های کنتاکت

تعریف ۱.۲. فرض کنید D یک زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{C}^n$ باشد. یک تابع $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ در نقطهٔ $z_۰$ دیفرانسیل‌پذیر نامیده می‌شود اگر

$$lim_{h\rightarrow ۰}\frac{۱}{h}\{f(z_۰^۱,\cdots,z_۰^i+h,\cdots,z_۰^n)-f(z_۰^۱,\cdots,z_۰^i,\cdots,z_۰^n)\}$$

برای هر $i = ۱,\cdots,n$ وجود داشته باشد. اگر f در هر نقطهٔ D دیفرانسیل‌پذیر باشد در این صورت f روی D هولومرفیک نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲. فرض کنید D یک زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{C}^n$ باشد و فرض کنید $\psi : D \longrightarrow \mathbb{C}^n$ به صورت

$$\psi(z^۱,\cdots,z^n)=(w^۱,\cdots,w^n)$$

تعریف شود. اگر به ازای هر i که $(i = ۱,\cdots,n)$ توابع $w^i=\psi^i(z^۱,\cdots,z^n)$ نسبت به z^j $(j = ۱,\cdots,n)$ هولومرفیک باشند، آنگاه ψ هولومرفیک نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲. یک فضای هاسدورف M یک خمینهٔ مختلط از بعد مختلط n نامیده می‌شود هر گاه M در ویژگی‌های زیر صدق کند:

۱. برای M یک پوشش باز $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ وجود داشته باشد و برای هر α، یک هومئومورفیسم

$$\psi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \psi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n$$

وجود داشته باشد.

۲. برای هر دو مجموعهٔ باز U_α, U_β با مقطع ناتهی، نگاشت‌های

$$f_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$
$$f_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

هولومرفیک باشند.

مجموعهٔ $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ یک دستگاه از همسایگی‌های مختصاتی هولومرفیک نامیده می‌شود.

مثال ۱.۲. مثالی از یک خمینهٔ مختلط.
کرهٔ $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ را در نظر می‌گیریم. همچنین همسایگی‌های $U_1 = \mathbb{S}^2\backslash\{n\}$ و $U_2 = \mathbb{S}^2\backslash\{s\}$ را از $\mathbb{S}^2$ در نظر می‌گیریم که $n = (0,0,1)$ و $s = (0,0,-1)$ می‌باشد. $\psi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ و $\psi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi_1(x,y,z) = \frac{x+\sqrt{-1}y}{1-z}\ , \qquad \psi_2(x,y,z) = \frac{x-\sqrt{-1}y}{1+z}.$$

در این صورت نگاشت‌های $\psi_1\circ\psi_2^{-1}, \psi_2\circ\psi_1^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ هولومرفیک می‌باشند. زیرا برای $\mathbb{C} \ni w = u+\sqrt{-1}v$ از $u = \frac{x}{1-z}, v = \frac{y}{1-z}$ و $x^2+y^2+z^2 = 1$ نتیجه می‌گیریم

$$z = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1},\ \ x = \frac{2u}{u^2+v^2+1},\ \ y = \frac{2v}{u^2+v^2+1}.$$

بنابراین

$$\psi_1^{-1}(w) = \psi_1^{-1}(u+\sqrt{-1}v) = \Big(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\Big)$$

در نتیجه داریم:

$$\psi_2\circ\psi_1^{-1}(w) = \frac{u}{u^2+v^2} - \sqrt{-1}\frac{v}{u^2+v^2} = \frac{1}{w}.$$

بنابراین $\psi_2\circ\psi_1^{-1}$ هولومرفیک می‌باشد به طور مشابه نشان داده می‌شود که $\psi_1\circ\psi_2^{-1}$ نیز هولومرفیک می‌باشد. بنابراین $\mathbb{S}^2$ یک خمینهٔ مختلط است که کرهٔ ریمانی نامیده می‌شود.