دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

$[r, s, t]$-رنگ‌آمیزی گراف‌ها

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی کاربردی (گراف)

سارا صالحی‌راد

استاد راهنما

دکتر بهناز عمومی

۱۳۸۹

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی کاربردی (گراف) خانم سارا صالحی‌راد

تحت عنوان

$[r, s, t]$–رنگ آمیزی گراف‌ها

در تاریخ   توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ــ استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر بهناز عمومی
۲ــ استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر غلامرضا امیدی
۳ــ استاد داور ۱	دکتر سید عباداله محمودیان (دانشگاه صنعتی شریف)
۴ــ استاد داور ۲	دکتر حسین حاجی ابوالحسن (دانشگاه شهید بهشتی)

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده   دکتر اعظم اعتماد

فهرست مطالب

چکیده:

رنگ‌آمیزی یکی از زمینه‌های کاربردی با اهمیت در نظریه‌ی گراف است که از جنبه‌های نظری و عملی به طور قابل توجهی مورد تحقیق و بررسی قرار گرفته است. رنگ‌آمیزی‌های متعددی برای گراف‌ها وجود دارد، به عنوان مثال می‌توان به رنگ‌آمیزی رأسی، یالی، کلی و... اشاره نمود.

موضوع مورد مطالعه در این پایان‌نامه $[r,s,t]$–رنگ‌آمیزی گراف‌ها است که تعمیمی از رنگ‌آمیزی‌های رأسی، یالی و کلی است. این مفهوم در سال ۲۰۰۲، توسط هاکمن و همکاران، معرفی شد و مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. این رنگ‌آمیزی، یک رنگ‌آمیزی رأسی‌یالی است که تفاضل رنگ رأس‌های مجاور، رنگ یال‌های مجاور و رنگ رأس و یال واقع بر آن به ترتیب حداقل r، حداقل s و حداقل t می‌باشد.

در این پایان‌نامه مفهوم $[r,s,t]$–رنگ‌آمیزی را معرفی می‌کنیم و به بررسی نتایج به دست آمده در این زمینه می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: $[r,s,t]$—رنگ‌آمیزی، $[r,s,t]$—عدد رنگی، عدد رنگی، برچسب رنگی، عدد رنگی کلی.

فصل ۱

مقدمه

در این فصل ضمن بیان تاریخچه‌ی مختصری از موضوع مورد مطالعه، تعاریف و مقدمات لازم برای فصل‌های بعد را بیان می‌کنیم و در پایان مروری بر مطالب فصل‌های پایان‌نامه خواهیم داشت. مرجع‌های اصلی این فصل [۱۸] و [۱۹] هستند.

۱—۱ تعاریف اولیه

در این بخش مفاهیم اولیه‌ی مورد نیازمربوط به این پایان‌نامه را، در نظریه‌ی گراف به اختصار بیان می‌کنیم. **گراف** G عبارت است از یک سه‌تایی، شامل یک مجموعه‌ی $V(G)$ به نام **رأس**، یک مجموعه‌ی $E(G)$ به نام **یال** و یک **رابطه‌ی وقوع** که به هر عضو از $E(G)$ یک زوج نامرتب از $V(G)$ را که لزوماً متمایز نیستند، نظیر می‌کند. در این پایان‌نامه همه جا منظور از عناصر یک گراف، رأس‌ها و یال‌های آن گراف است. رابطه‌ی وقوع لزوماً یک‌به‌یک و پوشا نیست. اگر رابطه‌ی وقوع به یال e، دو رأس u و v را نسبت دهد، گوییم رأس‌های u و v بر یال e **واقع** شده‌اند و **رأس‌های انتهایی** e هستند. منظور از یال uv یالی با دو رأس انتهایی u و v است.

دو رأس u و v را **مجاور یا همسایه** گوییم هرگاه یال e در $E(G)$ وجود داشته باشد به طوری که u و v رأس‌های انتهایی آن باشند. در این حالت، یال e را نیز یک یال مجاور یا واقع بر هر یک از رأس‌های u و v می‌نامیم. دو یال را در گراف G **مجاور** گوییم هرگاه یکی از رأس‌های انتهایی آن‌ها مشترک باشد.

یال‌هایی که دارای رأس‌های انتهایی یکسان هستند را **یال‌های چندگانه** و یالی که دارای دو انتهای یکسان باشد را **طوقه** می‌نامیم. گراف G را یک **گراف ساده** گوییم هرگاه یال چندگانه و طوقه نداشته باشد. بنابراین در هر گراف ساده، رابطه‌ی وقوع یک‌به‌یک است.

از آنجایی که در هر گراف ساده، هر یال به کمک نقاط انتهایی خود به طور منحصر به فرد مشخص می‌شود، گراف ساده‌ی G را می‌توان به شکل زوج مرتب $G = (V(G), E(G))$ در نظر گرفت که در آن $V(G)$ یک مجموعه‌ی ناتهی از رأس‌ها و $E(G)$ مجموعه‌ای از زوج‌های نامرتب (و متمایز) از اعضای $V(G)$ است. نمادهای $V(G)$ و $E(G)$، در صورتی که ابهام ایجاد نشود، به ترتیب می‌توانند با نمادهای V و E جایگزین شوند. در این حالت، گراف G را به صورت $G = (V, E)$ نمایش می‌دهیم.

گراف G را یک **گراف تهی**، N_p، گوییم هرگاه مجموعه‌ی رأس‌های آن، $V(G)$، تهی باشد. گراف G را یک **گراف بدیهی** گوییم هرگاه مجموعه‌ی یال‌های آن، $E(G)$، تهی باشد. در غیر این‌صورت گراف G را **غیربدیهی** گوییم. گراف G را **متناهی** گوییم هرگاه $V(G)$ و $E(G)$ هر دو متناهی باشند. در غیراین‌صورت گراف G را **نامتناهی** می‌نامیم. در این پایان‌نامه همه‌جا منظور از یک گراف، گراف ساده‌ی متناهی است.

تعداد رأس‌های گراف G را **مرتبه‌ی** آن گراف گوییم و منظور از **اندازه‌ی** گراف G، تعداد یال‌های گراف G است. **درجه‌ی** رأس v در گراف G برابر با تعداد یال‌های مجاور به رأس v در گراف G است و با نماد $\deg_G(v)$ نمایش داده می‌شود. به هر رأس با درجه‌ی یک، **برگ** گوییم. درجه‌ی یک رأس با کمترین درجه در گراف G را با $\delta(G)$ و درجه‌ی یک رأس با بیشترین درجه درگراف G را با $\Delta(G)$، نمایش می‌دهیم. گرافی که درجه‌ی همه‌ی رأس‌های آن با یکدیگر برابر باشد را **گراف منظم** می‌نامیم.

گراف H را **زیرگراف** G گوییم هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ و می‌نویسیم $H \subseteq G$. اگر $H \subsetneq G$، زیرگراف H را یک **زیرگراف سره** از G می‌نامیم و در غیراین‌صورت H را یک **زیرگراف ناسره** از G گوییم. اگر U زیرمجموعه‌ای ناتهی از رأس‌های گراف G باشد، **زیرگراف القایی** G توسط U، گرافی با مجموعه‌ی رأس‌های U و یال‌هایی از G است که هر دو رأس انتهایی آن‌ها در U باشند.

گراف G را **گراف کامل** گوییم هرگاه هر دو رأس مجزا در آن مجاور باشند. گراف کامل $n-$رأسی را با K_n نمایش می‌دهیم. زیرگراف H از گراف G را یک **خوشه** در G گوییم هرگاه H یک گراف کامل باشد. مرتبه‌ی بزرگ‌ترین خوشه در گراف G را با $\omega(G)$ نشان می‌دهیم و به آن **عدد خوشه‌ای** گراف G می‌گوییم. **مکمل گراف** G، $\overline{G}$، گرافی با مجموعه‌ی رأس‌های $V(G)$ است که دو رأس در آن مجاورند اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند.

یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از رأس‌های گراف G، مانند V_i را یک **مجموعه‌ی مستقل رأسی** گوییم هرگاه هیچ دو رأسی از V_i در گراف G با یکدیگر مجاور نباشند. یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از یال‌های گراف G، مانند E_i را یک **مجموعه‌ی مستقل یالی** گوییم هرگاه هیچ دو یالی از E_i در گراف G با یکدیگر مجاور نباشند.

گراف G را **دوبخشی** گوییم هرگاه بتوان $V(G)$ را به دو زیرمجموعه‌ی ناتهی X و Y افراز کرد به طوری که هر یال یک انتها در X و یک انتها در Y داشته باشد. به دو مجموعه‌ی X و Y **بخش‌های** گراف G می‌گوییم. گراف G را **گراف** k-**بخشی**، $k \geq 1$، گوییم هرگاه $V(G)$ را بتوان به k بخش V_1، V_2، $\cdots$، V_k (به نام بخش‌های گراف) افراز کرد به طوری که هر عضو $E(G)$، رأسی از V_i را به رأسی از V_j، $i \neq j$ متصل کند، به عبارت دیگر برای هر i، $1 \leq i \leq k$، V_i یک مجموعه‌ی مستقل باشد. در حالت خاص $k = 2$، چنین گرافی را **گراف دوبخشی** گوییم. **گراف کامل** k-**بخشی** G یک گراف k-بخشی با بخش‌های V_1، V_2، $\cdots$، V_k است با این خاصیت که اگر $u \in V_i$ و $v \in V_j$، $i \neq j$، آن‌گاه $uv \in E(G)$. اگر $|V_i| = n_i$ چنین گرافی را با $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ نشان می‌دهیم. گراف $K_{1,n}$ یا (S_n) را **ستاره** می‌نامیم و رأس با درجه‌ی n در آن را **رأس مرکزی** می‌گوییم.

یک **گشت** در گراف G عبارت است از دنباله‌ی متناهی $W : v_0 e_1 v_1 \ldots e_k v_k$، به طوری که برای هر i، $e_i = v_{i-1} v_i$. رأس v_0 را **ابتدا** و رأس v_k را **انتهای** گشت می‌نامیم. اگر گراف G ساده باشد، آن‌گاه یک گشت را می‌توان تنها با دنباله‌ی رأس‌ها نمایش داد. اگر در گشت W، $v_0 = v_k$، آن‌گاه W را یک **گشت‌بسته** گوییم. در صورتی که همه‌ی یال‌ها و رأس‌های ظاهر شده در گشت متمایز باشند آن را یک **مسیر** می‌نامیم. مسیر بسته را یک **دور** گوییم. مسیر شامل n رأس را با P_n و دور شامل n رأس را با C_n نشان می‌دهیم. گرافی را که بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود دارد **همبند** و در غیراین‌صورت **ناهمبند** گوییم. همچنین هر زیرگراف همبند ماکزیمال از یک گراف را یک **مؤلفه‌ی** آن گراف می‌نامیم.

هر گراف را می‌توان به شکل نموداری در صفحه نمایش داد به طوری که هر رأس توسط یک نقطه (رأس‌های متمایز توسط نقاط مجزا) و هر یال به صورت خطی نشان داده می‌شود که دو رأس انتهایی خود را به یکدیگر متصل می‌کند. در نمودار یک گراف ممکن است دو یال یکدیگر را در نقاطی از صفحه قطع کنند که لزوماً رأس گراف نیستند. نمایش یک گراف به این‌صورت کمک می‌کند که یک تصویر شهودی از آن پیدا کنیم.

گراف G **مسطح** است هرگاه یک نمایش بدون تقاطع داشته باشد وبه چنین نمایشی یک **نشاندن مسطح** G در صفحه می‌گوییم. وجه‌های گراف مسطح G، ناحیه‌های ماکزیمال در صفحه هستند که شامل هیچ نقطه‌ای از تصویر گراف G نیستند.

۱—۲ رنگ‌آمیزی‌های رأسی، یالی و کلی

۱—۲—۱ رنگ‌آمیزی رأسی

رنگ‌آمیزی رأسی، یکی از مباحث مهم و مورد توجه در نظریه گراف است. تاکنون مطالعات و تحقیقات زیادی در این زمینه انجام شده است.

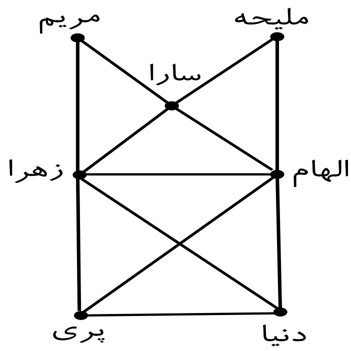
تعریف ۱.۱ یک k–**رنگ‌آمیزی** (k–رنگ‌آمیزی رأسی) گراف G، یک برچسب‌گذاری $f : V(G) \longrightarrow S$ است که $|S| = k$. برچسب‌ها را رنگ می نامیم. رأس‌هایی که رنگ یکسان دارند، یک کلاس رنگی تشکیل می‌دهند. یک k–رنگ‌آمیزی گراف G را**معتبر** گوییم هرگاه رأس‌های مجاور رنگ‌های متفاوت بگیرند. گراف G، k–**رنگ‌پذیر** است هرگاه یک k–رنگ‌آمیزی معتبر داشته باشد. مینیمم k به طوری که G، k–رنگ‌پذیر باشد، **عدد رنگی**، $\chi(G)$، نامیده می‌شود.

در یک رنگ‌آمیزی معتبر، هر کلاس رنگی یک مجموعه‌ی مستقل است بنابراین گراف G، k–رنگ‌پذیر است اگر وفقط اگر $V(G)$ اجتماع k مجموعه‌ی مستقل باشد.
مثال زیریکی از کاربردهای رنگ‌آمیزی رأسی را نشان می‌دهد.

مثال ۲.۱ سه گروه دانش آموز به صورتی که در جدول زیر نشان داده شده است، در یک مدرسه وجود دارند.

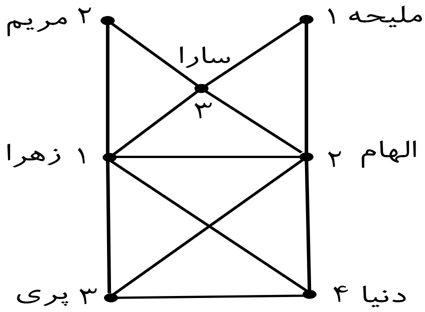
گروه	۱	۲	۳
معلم‌ها	صالحی	رضایی	محمدی
دانش آموزان	سارا زهرا مریم	سارا الهام ملیحه	زهرا الهام پری دنیا

دانش آموزانی که معلم مشترک دارند، عضو یک گروه هستند. هر دانش آموز باید در یک روز جلسه‌ای با همه‌ی معلم‌هایش داشته باشد و جلسه‌ها به صورت تک‌نفره برگزار می‌شوند (هم‌گروهی‌ها در روز یکسان نمی‌توانند با همه‌ی معلم‌هایشان جلسه داشته باشند). چند روز برای این‌که تمام جلسه‌ها برگزار شوند، مورد نیاز است؟ ابتدا مسأله را به صورت زیر مدل‌سازی می‌کنیم.
هر دانش آموز را با یک رأس نشان می‌دهیم و دو رأس را با یک یال به هم وصل می‌کنیم اگر وفقط اگر دانش آموزان متناظر با آن‌ها در یک گروه باشند. شکل ۱—۱ گراف مدل متناظر با مسأله را نشان می‌دهد.



شکل ۱—۱: گراف مدل.

سؤال فوق را می‌توان با یک رنگ‌آمیزی معتبر برای گراف مدل پاسخ داد. رنگ‌های نظیر شده به هر رأس، نشان دهنده‌ی روزی است که دانش‌آموز متناظر با آن رأس همه‌ی معلم‌هایش را ملاقات می‌کند. شکل ۱—۲، یک رنگ‌آمیزی رأسی معتبر با ۴ رنگ برای گراف شکل ۱—۱ است.



شکل ۱—۲: یک رنگ‌آمیزی رأسی معتبر.

بنابر رنگ‌آمیزی شکل ۱—۲، جلسه‌ها به صورت زیر انجام می‌شود.

روز اول:	زهرا– صالحی و محمدی	ملیحه – رضایی
روز دوم:	مریم – صالحی	الهام – محمدی و رضایی
روز سوم:	سارا – صالحی و رضایی	پری – محمدی
روز چهارم:	دنیا – محمدی	

بنابراین می‌توان تمام جلسه‌ها را درچهار روز برگزار کرد. این کار در کمتر از چهار روز امکان‌پذیر نیست، زیرا خانم محمدی چهار دانش‌آموز دارد و برای برگزاری جلسه با هر یک از آن‌ها یک روز نیاز دارد.

در سال ۱۸۵۲، دمورگان [۱] مسأله‌ی چهار رنگ را به صورت زیر مطرح کرد

[۱] DeMorgan

هر نقشه‌ی جغرافیایی را تنها با چهار رنگ می‌توان رنگ‌آمیزی کرد به طوری که کشورهایی که مرز مشترک دارند، رنگ متمایز می‌گیرند.
مسأله‌ی چهار رنگ را می‌توان به صورت یک مسأله‌ی رنگ‌آمیزی رأسی گراف مسطح دوگان نقشه‌ی G در نظر گرفت. گراف دوگان نقشه‌ی G، G^*، گراف مسطحی است که رأس‌های آن ناحیه‌های نقشه‌ی G هستند و اگر دو ناحیه در نقشه‌ی G مرز مشترک داشته باشند، در گراف G^* رأس‌های متناظر با آن‌ها را توسط یالی به یکدیگر متصل می‌کنیم.

قضیه ۳.۱ [۱] (قضیه چهار رنگ) برای هر گراف مسطح همبند ساده، یک ۴−رنگ‌آمیزی معتبر وجود دارد.

در ادامه بعضی از قضیه‌ها و نتیجه‌های مربوط به رنگ‌آمیزی رأسی و عدد رنگی، $\chi(G)$، که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار گرفته‌اند، به اختصار بیان می‌کنیم.

لم ۴.۱ اگر $H \subseteq G$، آن‌گاه $\chi(H) \leq \chi(G)$.

اگر ماکزیمم درجه گراف G، $\Delta(G)$ باشد، می‌توان ثابت کرد که گراف G با $\Delta(G) + ۱$ رنگ، رنگ‌آمیزی می‌شود. این کران توسط بروکس[۵] بهتر شد.

قضیه ۵.۱ (قضیه بروکس) فرض کنید G یک گراف ساده و همبند باشد. اگر G گراف کامل یا دور فرد نباشد، آن‌گاه $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

بنابر قضیه بروکس، اگر G گراف کامل، K_n باشد، آن‌گاه $\chi(G) = \Delta(K_n) + ۱ = n$ واگر G یک دور به طول فرد، $C_{۲n+۱}$ باشد، آن‌گاه $\chi(G) = \Delta(C_{۲n+۱}) + ۱ = ۳$.

لم ٦.۱ اگر G گراف دوبخشی باشد، آن‌گاه $\chi(G) = ۲$.

لذا این مقدار برای مسیرها، دورهای زوج و ستاره‌ها برقرار است، زیرا همه‌ی آن‌ها گراف‌های دوبخشی هستند.

۱−۲−۲ رنگ‌آمیزی یالی

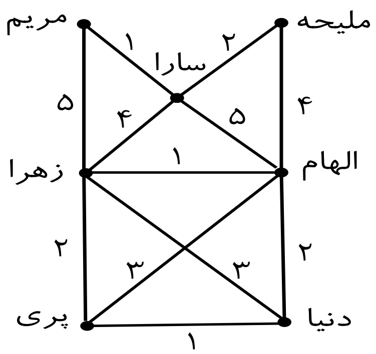
در این قسمت مفهوم رنگ‌آمیزی یالی و بعضی از نتیجه‌های مربوط به آن را بیان می‌کنیم و با ذکر یک مثال کاربرد این نوع رنگ‌آمیزی را در برنامه زمان‌بندی نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۱ یکk-**رنگ‌آمیزی یالی** گراف G، یک برچسب‌گذاری $f : E(G) \longrightarrow S$ است که $k = |s|$. مجدداً برچسب‌ها رنگ نامیده می‌شوند. یک k-رنگ آمیزی یالی را**معتبر** گوییم هرگاه یال‌های مجاور رنگ‌های متمایز اختیار کنند. یال‌هایی که رنگ یکسان دارند، یک کلاس رنگی تشکیل می‌دهند. یک گرافk-**یال رنگ‌پذیر** نامیده می‌شود هرگاه یک k-رنگ آمیزی یالی معتبر داشته باشد. **عددرنگی یالی** (یا برچسب رنگی)، $\chi'(G)$، مینیمم kای است که G، k-یال رنگ‌پذیر باشد.

به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۸.۱ گروه‌های دانش آموزان مثال ۲.۱ را در نظر بگیرید. حال می‌خواهیم هر دانش آموز در یک روز فقط با یک نفر از هم‌گروهی‌های خود به رقابت علمی بپردازد. چند روز لازم است تا همه‌ی دانش آموزان با هم‌گروهی‌های خود مسابقه دهند؟

این سؤال با یک رنگ آمیزی یالی معتبر گراف مدل شکل ۱—۱ پاسخ داده می‌شود. رنگ نظیر شده به‌یک یال نشان دهنده‌ی روزی است که زوج متناظر با رأس‌های انتهایی آن یال با یکدیگر به رقابت می‌پردازند. به شکل زیر توجه کنید.



شکل ۱—۳: یک رنگ آمیزی یالی معتبر.

بنابراین، تمام رقابت‌ها در ۵ روز می‌تواند انجام شود. این جواب بهینه است؛ زیرا، زهرا و الهام هر کدام با ۵ نفر هم‌گروه هستند.

بنابر رنگ آمیزی شکل ۱—۳، رقابت‌ها به صورت زیر انجام می‌شود.

روز اول:	سارا– مریم	الهام – زهرا	پری – دنیا
روز دوم:	سارا – ملیحه	زهرا – پری	الهام – دنیا
روز سوم:	زهرا– دنیا	الهام – پری	
روز چهارم:	سارا – زهرا	ملیحه – الهام	
روز پنجم:	زهرا – مریم	سارا – الهام	

در ادامه برخی از قضیه‌ها و نتیجه‌های به دست آمده در رابطه با برچسب رنگی گراف G، $\chi'(G)$، را به اختصار بیان می‌کنیم.

لم ۹.۱ اگر $G \subseteq H$، آن‌گاه $\chi'(H) \leq \chi'(G)$.

تعریف ۱۰.۱ گراف یالی G، $L(G)$، گراف ساده‌ای است که رأس‌های آن یال‌های گراف G هستند و $ef \in E\big(L(G)\big)$، هرگاه f و e در G مجاور باشند.

بنابراین مسائل مربوط به یال‌های گراف G را می‌توان به عنوان مسائلی درباره‌ی رأس‌های $L(G)$ در نظر گرفت.
توجه کنید که از روی هر گراف G، می‌توان $L(G)$ را ساخت؛ ولی به ازای هر گراف H، نمی توان G را به گونه‌ای پیدا کرد که $L(G) = H$.
به وضوح $\chi'(G) \geq \Delta(G)$، زیرایال‌هایی که بر رأس از درجه‌ی ماکزیمم واقع هستند، رنگ‌های متفاوت می‌گیرند. و همچنین

$$\chi'(G) \leq ۲\Delta(G) - ۱,$$

زیرا

$$\begin{aligned} \chi'(G) = \chi(L(G)) &\leq ۱ + \Delta(L(G)) \\ &= ۱ + ۲\Delta(G) - ۲ = ۲\Delta(G) - ۱. \end{aligned}$$

این کران توسط ویزینگ[۱۸] بهتر شد.

قضیه ۱۱.۱ (قضیه ویزینگ) فرض کنید G یک گراف ساده باشد، در این صورت

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + ۱.$$

بنابراین تمام گراف‌ها به دو کلاس تقسیم می شوند.

تعریف ۱۲.۱ اگر $\chi'(G) = \Delta(G)$، گراف G را عضو کلاس ۱ و اگر $\chi'(G) = \Delta(G) + ۱$، گراف G را عضو کلاس ۲ گوییم.

قضیه ۱۳.۱ (قضیه کونینگ)[۱۳] گراف‌های دوبخشی عضو کلاس ۱ هستند.

بنابراین مسیرها، دورهای زوج و ستاره‌ها، کلاس ۱ و دورهای فرد، عضو کلاس ۲ هستند.

لم ۱۴.۱ برای تمام گراف‌های کامل، K_n، رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ n & \text{اگر } n \text{ فرد باشد.} \end{cases}$$

۱–۲–۳ رنگ آمیزی کلی

رنگ آمیزی کلی تعمیمی از دو رنگ آمیزی رأسی و یالی است و در سال‌های ۱۹۶۵ و ۱۹۶۴ توسط ویزینگ[۱۸] و بهزاد[۳] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفت.

تعریف ۱۵.۱ یک k–**رنگ آمیزی کلی معتبر** گراف G، یک برچسب‌گذاری $f : V(G) \cup E(G) \longrightarrow S$ است به طوری که $|s| = k$ و هیچ دو رأس مجاور یا یال مجاور برچسب مشابه نگیرند و همچنین برچسب هر رأس با برچسب یالی که بر آن واقع است، متفاوت باشد. برچسب‌ها مجدداً رنگ نامیده می‌شوند.
گراف G،k–**رنگ‌پذیر کلی** نامیده می‌شود هرگاه یک k–رنگ آمیزی کلی معتبر داشته باشد.
مینیمم k ای که G، k–رنگ‌پذیر کلی باشد را**عدد رنگی کلی** گراف، $\chi''(G)$، می‌نامیم.
اگر f یک رنگ آمیزی کلی گراف G باشد، آن‌گاه $f|_{V(G)}$، تحدید f به $V(G)$، یک رنگ آمیزی رأسی و $f|_{E(G)}$ یک رنگ آمیزی یالی گراف G است.
یک رنگ آمیزی کلی گراف G، مجموعه‌ی $V(G) \cup E(G)$ را به مجموعه‌های مستقل زیر افراز می‌کند

$$V_1 \cup E_1, V_2 \cup E_2, \cdots$$

به طوری که $V_1, V_2, \cdots$ مجموعه‌های مستقل رأسی گراف G و $E_1, E_2, \cdots$ مجموعه‌های مستقل یالی گراف G هستند و هیچ رأسی در V_i بر هیچ یالی در E_i واقع نیست. مجموعه‌های مستقل $V_1 \cup E_1, V_2 \cup E_2, \cdots$ کلاس‌های رنگی نامیده می‌شوند.

لم ۱۶.۱ اگر $H \subseteq G$، آن‌گاه $\chi''(H) \leq \chi''(G)$.

به وضوح، برای هر گراف G، $\chi''(G) \geq \Delta(G) + ۱$، زیرا رأس با درجه ماکزیمم به یک رنگ متفاوت از $\Delta(G)$ رنگ تخصیص داده شده به یال‌های مجاورش نیاز دارد. از طرف دیگر، چون هر یال گراف G حداکثر $۲\Delta(G)$ همسایه دارد؛ بنابراین

$$\chi''(G) \leq ۲\Delta(G) + ۱.$$

حدس زیر یک کران بالای بهتر به دست می‌دهد. این کران‌در سال‌های ۱۹۶۵ و۱۹۶۴، به طور جداگانه توسط بهزاد [۳] و ویزینگ [۱۸] مطرح شد.

قضیه ۱۷.۱ (حدس رنگ‌آمیزی کلی (TCC)) برای هر گراف G،

$$\chi''(G) \leq \Delta(G) + ۲.$$

بنابراین اگر TCC درست باشد، تمام گراف‌های ساده به دو دسته تقسیم می‌شوند.

تعریف ۱۸.۱ اگر $\chi''(G) = \Delta(G) + ۱$، گراف G، نوع ۱ و اگر $\chi''(G) = \Delta(G) + ۲$، گراف G، نوع ۲ نامیده می‌شود.

تاکنون درستی TCC برای کلاس‌هایی از گراف‌ها ثابت شده است. به طور مثال، برای گراف‌های کامل، گراف‌های دوبخشی، گراف‌های کامل چندبخشی[۲۱] ، گراف G با $\Delta(G) \geq \frac{۳}{۴}|V(G)|$ [۹] یا $\Delta(G) \leq ۵$ [۱۴] و برای گراف مسطح G با $\Delta(G) \neq ۶$ $[۴, ۱۰, ۱۷]$.

لم ۱۹.۱ برای هر دور، C_n، رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\chi''(C_n) = \begin{cases} ۳ & \text{اگر } n \equiv ۰ \text{ (پیمانه۳)} \\ ۴ & \text{اگر } n \not\equiv ۰ \text{ (پیمانه۳).} \end{cases}$$

رابطه‌ی زیر برای گراف‌های کامل برقرار است.

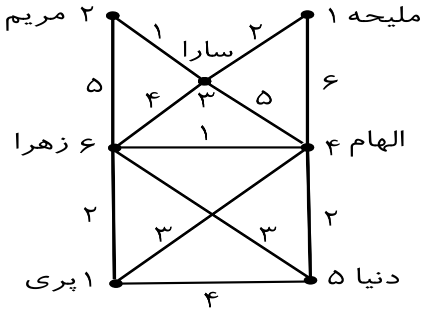
لم ۲۰.۱ برای هر گراف کامل، K_n، رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\chi''(K_n) = \begin{cases} \Delta(K_n) + ۱ = n & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ \Delta(K_n) = n - ۱ & \text{اگر } n \text{ زوج باشد.} \end{cases}$$

حال با استفاده از یک مثال، کاربرد رنگ‌آمیزی کلی را نشان می‌دهیم.

مثال ۲۱.۱ گروه‌های دانش آموزی مثال ۲.۱را در نظر بگیرید. می‌خواهیم هر دانش‌آموز هم با معلم‌های خود ملاقات کند و هم با هم‌گروهی‌های خود به رقابت علمی بپردازد. به طوری که‌هر دانش‌آموز همه‌ی معلم‌های خود را در روز ملاقات ببیند و فقط با یکی از هم‌گروهی‌های خود در یک روز به رقابت بپردازد، ولی دو فعالیت در روز یکسان صورت نگیرد.

به وضوح این عمل در ۹ روز انجام می‌شود؛ زیرا می‌توان ابتدا جلسات با معلم‌ها را برنامه‌ریزی کرد و سپس روزهای مسابقه با هم‌گروهی را تعیین کرد. اگر فعالیت‌ها به صورت متناوب صورت گیرد می‌توان جواب را بهینه کرد. یک جواب ممکن در شکل۱—۴ نشان داده شده است. رنگ رأس‌ها، روزهایی را که دانش‌آموز با معلم خود ملاقات می‌کند، نشان می‌دهد و رنگ یال‌ها نشان دهنده‌ی روزهایی است که دانش‌آموزان متناظر شده به رئوس انتهایی آن یال با یکدیگر به رقابت می‌پردازند.



شکل ۱—۴: یک رنگ‌آمیزی کلی معتبر.

ملاقات‌ها به صورت زیر انجام می‌شوند.

روز اول:	سارا– مریم	زهرا – الهام	ملیحه –رضایی	پری – محمدی
روز دوم:	سارا – ملیحه	زهرا – پری	الهام – دنیا	مریم – صالحی
روز سوم:	زهرا– دنیا	الهام – پری	سارا – صالحی و رضایی	
روز چهارم:	سارا – زهرا	پری – دنیا	الهام – محمدی و رضایی	
روز پنجم:	زهرا – مریم	سارا – الهام	دنیا – محمدی	
روز ششم:	الهام – ملیحه	زهرا – صالحی و محمدی		

بنابراین تمام جلسات را می‌توان در ٦ روز برگزار کرد. این جواب بهینه است زیرا الهام و زهرا هر کدام ۵ روز برای‌مسابقه با هم گروهی‌ها و ۱ روز برای جلسه با معلم خود نیاز دارند. اما اگر شرایط دیگری به

مسأله اضافه شود، چگونه می‌توان آن را حل کرد؟ به طور مثال، اگر معلم‌ها بخواهند بین هر دو جلسه با دانش‌آموزان حداقل یک روز استراحت کنند، یا اینکه بین دو مسابقه‌ی هر دانش‌آموز حداقل دو روز فاصله باشد. این گونه مسائل را نمی‌توان با رنگ‌آمیزی‌های رأسی ، یالی و کلی حل نمود.

۱—۳ تاریخچه و تعریف موضوع

در سال ۲۰۰۲، هاکمن [۲] و همکاران رنگ‌آمیزی کلی گراف‌ها را بررسی می‌کردند و به این موضوع پی بردند که برخی از مسائل را با این نوع رنگ‌آمیزی نمی‌توان حل کرد و مفهوم جدیدی را به نام $[r,s,t]$–رنگ‌آمیزی معرفی کردند و در سال ۲۰۰۳،کمنیتز [۳] و همکاران به بررسی خواص این رنگ‌آمیزی پرداختند. از سال ۲۰۰۳ تاکنون تحقیقات زیادی در زمینه‌ی این نوع رنگ‌آمیزی صورت گرفته است. به طور مثال درسال ۲۰۰۵ ویلا[۱۸] $[r,s,t]$–رنگ‌آمیزی گراف‌های ستاره‌ای، مسیرها و دورها را مورد بررسی قرار داد و در سال ۲۰۰۷ دکار و همکاران [٦] در زمینه‌ی $[r,s,t]$–رنگ‌آمیزی گراف‌های ستاره‌ای، دوبخشی و درخت‌ها تحقیق به عمل آوردند.
در این نوع رنگ‌آمیزی مانند رنگ‌آمیزی کلی، رأس‌ها و یال‌ها توأماً رنگ‌آمیزی می‌شوند، با این تفاوت که در این نوع رنگ‌آمیزی عناصر همسایه نه تنها رنگ‌های متفاوت می‌گیرند بلکه تفاضل بین رنگ رأس‌های مجاور حداقل r، بین رنگ یال‌های مجاور حداقل s و بین رنگ رأس و رنگ یال واقع بر آن حداقل t است.

تعریف ۲۲.۱ اعداد صحیح نامنفی r,s,t مفروض است، گوییم گراف G، یک $[r,s,t]$–رنگ‌آمیزی با k رنگ دارد، هرگاه نگاشت

$$c : V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{0, 1, \dots, k-1\}$$

وجود داشته باشد به طوری که برای هر دو رأس مجاور v_i و v_j،

$$|c(v_i) - c(v_j)| \geq r$$

برای هر دو یال مجاور e_i و e_j،

$$|c(e_i) - c(e_j)| \geq s$$

[۲] Hackman
[۳] Kemnitz

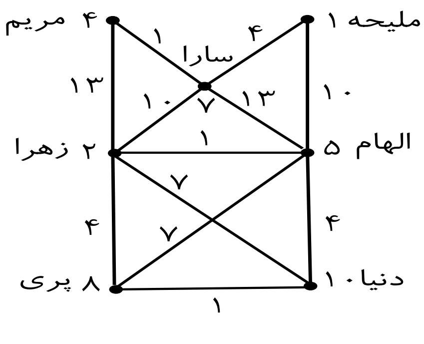
و برای رأس v_i که بر یال e_j واقع است،

$$|c(v_i) - c(e_j)| \geq t.$$

$[r, s, t]$–عدد رنگی گراف G، $\chi_{r,s,t}(G)$، مینیمم k ای است که G یک $[r, s, t]$–رنگ آمیزی با k رنگ داشته باشد.

این نگاشت لزوماً پوشا نیست، منظور از یک $[r, s, t]$–رنگ آمیزی با k رنگ، این است که مجموعه رنگ‌های استفاده شده $[۰, \ldots, k - ۱]$ باشد (کوچکترین و بزرگترین رنگ مورد استفاده در رنگ آمیزی ۰ و $k - ۱$ است). به وضوح این رنگ آمیزی تعمیمی از تمام رنگ آمیزی‌های قبلی است. تحدید یک $[۱, s, t]$–رنگ آمیزی به مجموعه‌ی رأس‌ها، یک رنگ آمیزی رأسی وتحدید یک $[r, ۱, t]$–رنگ آمیزی به مجموعه‌ی یال‌ها، یک رنگ آمیزی یالی و یک $[۱, ۱, ۱]$–رنگ آمیزی، یک رنگ آمیزی کلی است.

مثال ۲۳.۱ به مثال ۲۱.۱ شرایط زیر را اضافه می‌کنیم. معلم‌هامی‌خواهند بین هر دو جلسه با دانش‌آموزان حداقل یک روز استراحت کنند و بین دو مسابقه‌ی هر دانش‌آموز باید حداقل دو روز فاصله باشد. این مثال را می‌توان به عنوان یک $[۲, ۳, ۱]$–رنگ آمیزی گراف مدل مثال ۲.۱ در نظر گرفت. شکل زیر نشان دهنده‌ی این رنگ آمیزی است.



شکل ۱—۵: یک $[۲, ۳, ۱]$– رنگ آمیزی گراف مدل.

همه‌ی این فعالیت‌ها با شرایط خواسته شده در ۱۳ روز انجام می شود. اگر به رنگ آمیزی داده شده در شکل ۱—۵ توجه کنیم، می‌بینیم که زهرا حداقل سه روز برای هر یک از مسابقات (یک روز مسابقه و دو روز استراحت برای مسابقه بعدی) خود زمان دارد. او معلم خود را در روز دوم ملاقات می‌کند و در روزهای اول، چهارم ، هفتم، دهم و سیزدهم مسابقه می‌دهد. خانم صالحی در روز دوم با زهرا و در روز چهارم با مریم و در روز هفتم با سارا جلسه دارد، بنابراین او حداقل یک روز برای آماده کردن جلسه بعدی زمان دارد.