دانشگاه رازی

دانشکده علوم
گروه آمار

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

مقایسه ی تصادفی سیستم‌های $n-1$ از n با اجزای مسقل نمایی ناهمگن با سیستم‌های مشابه با اجزای مستقل و هم‌توزیع نمایی

توسط

عابدین حیدری

استاد راهنما

دکتر بهاءالدین خالدی

استاد مشاور

دکترعبدالرضا سیاره

فروردین ۱۳۸۹

تقدیم به

جناب دکتر بهاء الدین خالدی

هرچند استاد از این اوراق مستغنی‌اند

قدردانی

مراتب سپاس و قدردانی‌ام را به پیشگاه استاد گرانقدر و فرزانه‌ام جناب آقای دکتر بهاالدین خالدی تقدیم می‌دارم که شخصیت علمی و اخلاقی ایشان همواره برایم الگو بوده است.

همچنین از استاد گرانقدر آقای دکتر عبد الرضا سیاره به‌خاطر نقطه‌نظرات دانشمندانه‌ای که در انجام این پایان‌نامه ایراد نمودند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از اساتید محترم آقای دکتر جعفر احمدی و آقای دکتر داود قزوینی نژاد سپاسگزارم که بزرگوارانه زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شده و با دقت عالمانهٔ خود نکات ظریفی را در زیبا شدن این پایان‌نامه بیان داشتند.

صمیمانه ترین سپاسگزاری ها را تقدیم پدر و مادرم می دارم که لحظات زندگی ام لبریز از عطر محبت‌شان است.

همچنین از دوستانی که به هر نحو در انجام این کار مرا یاری رساندند، تشکر می‌کنم.

عابدین حیدری

کرمانشاه، فروردین ۱۳۸۹

مقایسه ی تصادفی سیستم‌های $n-1$ از n با اجزای مسقل نمایی ناهمگن با سیستم‌های مشابه با اجزای مستقل و هم‌توزیع نمایی

چکیده

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی به ترتیب با نرخ خطرهای $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ و $Y_1, \ldots, Y_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از جامعه‌ی نمایی با نرخ خطر λ باشند. با استفاده از روابط‌خاصی میان λ_i هاو λ شرایط لازم و کافی برای برقراری ترتیب متوسط باقی‌مانده‌ی عمر، ترتیب نرخ خطر، ترتیب پراکندگی و ترتیب نسبت درست‌نمایی میان $X_{2:n}$ و $Y_{2:n}$ به دست می‌آوریم. با استفاده از نتایج موجود می‌توان کران‌هایی برای تابع متوسط باقی‌مانده‌ی عمر، واریانس و تابع نرخ خطرطول عمر یک سیستم $n-1$ از n با اجزای مستقل نمایی ناهمگن به‌دست آورد.

واژه‌های کلیدی : آماره‌های ترتیبی، ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب نرخ خطر، سیستم k از n، سیستم مارکوفی، توزیع نمایی.

فهرست مندرجات

نمادها و علائم اختصاری

آماره‌های ترتیبی در نمونه‌ای به اندازه n	$X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$
امید ریاضی	$E(.)$
اندازه احتمال	$P(.)$
برابری در توزیع (هم‌توزیعی)	$\overset{st}{=}$
به‌شرط آنکه	$\mid$
بینهایت	∞
تابع بقاء توزیع F	$\bar{F}$
تابع توزیع	F ، G
تابع چگالی احتمال	f ، g
تابع معکوس تابع توزیع F	F^{-1}
تابع نرخ شکست توزیع F	$r_F(.)$
صعودی بودن (برای توابع)	$\uparrow$
صور عمومی	$\forall$
عضویت مجموعه‌ای	$\in$
بزرگ‌تری به معنای بیشاندن	$\geq_m$
بزرگ‌تری به معنای بیشاندن ضعیف	$\geq_w$
بزرگ‌تری به معنای بیشاندن معکوس	$\geq_{rm}$
p − بزرگ‌تر	$\geq_p$
بزرگ‌تری در ترتیب پراکندگی	$\geq_{disp}$
بزرگ‌تری در ترتیب تصادفی معمولی	$\geq_{st}$
بزرگ‌تری در ترتیب متوسط باقی‌مانده‌ی عمر	$\geq_{mrl}$
بزرگ‌تری در ترتیب نرخ شکست	$\geq_{hr}$

بزرگ‌تری در ترتیب نسبت درستنمایی .... $\geq_{lr}$

متوسط باقی‌مانده‌ی عمر متغیر تصادفی T در لحظه‌ی t .... $m_T(t)$

متغیر تصادفی هم‌توزیع با $[X-t|X>t]$ .... T^t

مجموعه اعداد حقیقی .... $\Re$

مجموعه اعداد حقیقی n بعدی .... $\Re^n$

مجموعهٔ اعداد حقیقی n بعدی مثبت .... $\Re^n_+$

نزولی بودن (برای توابع) .... $\downarrow$

نقطه انتهایی چپ تکیه‌گاه X .... l_X

نقطه انتهایی راست تکیه‌گاه X .... u_X

نمونه تصادفی به اندازهٔ n .... $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱—۱ مقدمه

این فصل در بردارنده‌ی تعاریف و مفاهیمی است که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در بخش ۱—۲ مروری گذرا به سیستم‌های پرکاربرد و مشخصه‌های مهم مرتبط با طول عمر یک سیستم خواهیم داشت. ترتیب‌های تصادفی مورد نیاز و ارتباط میان آن‌هادر بخش ۱—۳ مورد بررسی قرار می‌گیرند. بخش ۱—۴ به مفهوم بیشاندن و مفاهیم مرتبط با آن و هم‌چنین توابع شُور — کاو و شُور — کوژ اختصاص دارد. در بخش ۱—۵ میانگین‌های تعمیم‌یافته معرفی می‌شوند. خواص توزیعی آماره‌های مرتب از متغیرهای تصادفی مستقل و غیر هم‌توزیع در بخش ۱—٦ معرفی می‌شود. در بخش ۱—۷ نیز کلیاتی از پیشینه‌ی موضوع مورد بررسی را بیان می‌کنیم.

۱—۲ سیستم و مشخصه‌های طول عمر

یک سیستم مجموعه ای از عناصر یا جزء های مرتبط است که به طریقی خاص و برای انجام هدفی ویژه در کنار هم قرار داده شده‌اند. موتور هواپیما، انواع وسایل الکتریکی مانند رایانه، تلویزیون و حتی بدن انسان مثال‌هایی از یک سسیستم هستند. سیستم‌های پیچیده معمولاً از کنار هم قرار دادن اجزای ساده‌تر به وجود می آیند. بنابراین سیستم‌ها یا ساده هستند و یا از اجزای ساده‌تر تشکیل شده‌اند. هر جزء ساده‌ی یک سیستم را مؤلفه[۱] می‌نامند. آن‌چه که در مطالعه و بررسی سیستم‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است بهبود و ارتقای طول عمر سیستم‌ها است. طول عمر یک سیستم نه تنها وابسته به طول عمر اجزایش است بلکه به ساختار و نحوه‌ی کنار هم قرار گرفتن اجزای آن نیز بستگی دارد. پس با دانستن زمان از کار افتادگی اجزای یک سیستم و نحوه‌ی ارتباط آنها می توانیم طول عمر سیسستم را به دست آوریم. به عنوان نمونه یک سیستم متشکل از n مؤلفه با ساختار سری را در نظر بگیرید. این سیستم تا زمانی به فعالیت خود ادامه می‌دهد که همه‌ی مؤلفه‌های آن فعال باشند و به محض از کار افتادن یک مؤلفه سیستم نیز از کار باز می‌ماند. روشن است که طول عمر این سیستم برابر با کوچک‌ترین طول عمر مؤلفه‌های آن یعنی آماره‌ی مرتب اول است. چنان‌چه ساختار سیستم را از سری به موازی تغییر دهیم طول عمر سیستم نیز تغییر کرده و برابر با بزرگ‌ترین آماره‌ی مرتب خواهد بود. سیستم های سری و موازی حالت‌های خاصی از سیستم های کلی‌تر هستند که به سیستم‌های k از n معروفند. سیستمی متشکل از n مؤلفه را k از n گوییم هرگاه برای فعال بودن سیستم فعالیت حداقل k مؤلفه‌ی آن لازم باشد. طول عمر یک سیستم k از n متناظر با $X_{n-k+1:n}$، آماره‌ی مرتب

[۱] Component

$n-k+1$ ام است. بنابراین بررسی طول عمر یک سیستم با بررسی آماره‌های مرتب حاصل از طول عمر مؤلفه‌های آن سیستم معادل است. سیستم سری یک سیستم n از n و سیستم موازی یک سیستم ۱ از n می‌باشد. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توان به بارلو[۲] و پروشان [۳] (۱۹۸۱) و فام [۴] (۲۰۰۳) رجوع کرد.

فرض می‌کنیم متغیر تصادفی نامنفی T بیانگر طول عمر یک مؤلفه باشد. تابع چگالی و تابع توزیع این متغیر را به ترتیب با f و F نشان می دهیم. ساده‌ترین مشخصه‌ی مرتبط با طول عمر این مؤلفه تابع بقا[۵] است که به صورت

$$\bar{F}(t) = P(T > t) = 1 - F(t)\,.$$

تعریف می شود. یکی دیگر از مشخصه‌های بسیار مهم که در بررسی طول عمر یک مؤلفه از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است تابع نرخ خطر[۶] است. فرض می‌کنیم متغیر تصادفی T دارای تابع توزیع مطلقاً پیوسته‌ی F باشد. تابع نرخ خطر مؤلفه را با r_T نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$r_T(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \qquad \forall\, t \in [x : \bar{F}(x) > 0]\,. \tag{1.2.1}$$

از رابطه‌ی فوق نتیجه می گیریم که

$$r_T(t) = \frac{d}{dt}\left(-\log \bar{F}(t)\right)\,. \tag{2.2.1}$$

تابع نرخ خطر را می توان به صورت

$$\begin{aligned} r_T(t) &= lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t}\frac{1}{\bar{F}(t)} \\ &= lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T \le t+\Delta t | T > t)}{\Delta t}\,. \end{aligned}$$

نیز نوشت. بنابراین با فرض این‌که مؤلفه تا زمان t سالم بوده است احتمال این که بیشتر از زمان اضافی Δt عمر نکند تقریباً برابر است با:

$$P(\,t < T \le t + \Delta t \,|\, T > t) \approx r_T(t)\Delta t\,.$$

روشن است که بزرگی نرخ خطر یک مؤلفه نشان دهنده‌ی این مطلب است که طول عمر آن از نظر احتمالی کو چک‌تر می‌شود. تعریف بعدی مربوط به متغیرهای تصادفی IFR[۷] و DFR[۸] است که

۲ Barlow

۳ Proschan

۴ pham

۵ Survival

۶ Hazard rate

۷ Increasing Failure Rate

۸ Decreasing Failure Rate

نقش مهمی را در مطالعه‌ی طول عمر سیستم‌ها ایفا می کنند.

تعریف ۱.۱ متغیر تصادفی T را IFR (DFR) گوییم هر گاه تابع $r_T(t)$ (نرخ خطر) آن نسبت به t صعودی (نزولی) باشد.

با استفاده از تعریف فوق و رابطه ی (۲.۲.۱) می توان گفت که متغیر تصادفی X ، IFR (DFR) است اگر و فقط اگر $-\log \bar{F}$ کوژ[۹] (کاو[۱۰]) باشد. چنان‌چه طول عمر یک سیستم IFR باشد با گذشت زمان از توانایی فعالیت سیستم کم شده و سیستم فرسوده‌تر می‌گردد. وسایل الکتریکی مثال‌هایی از این نوع سیستم‌ها هستند. به همین ترتیب فعالیت سیستمی که دارای طول عمر DFR است با گذشت زمان مطلوب‌تر می‌گردد. طول عمر نوزادی که تازه متولد شده است مصداقی از این خاصیت می‌باشد. بنابراین متغیر تصادفی T، IFR (DFR) است اگر و فقط اگر

$$\frac{\bar{F}_T(t+s)}{\bar{F}_T(t)} \;\downarrow t \quad (\uparrow t) \qquad \forall s \geq 0 \,. \tag{۳.۲.۱}$$

مثال ۱.۱ فرض کنید متغیر تصادفی T دارای تابع توزیعی به صورت

$$\begin{aligned} F(t) &= 0 & ,t \leq 0 \\ &= 1 - e^{-(\lambda t)^\alpha} & ,t > 0 \end{aligned}$$

است که در آن $\alpha > 0$ و $\lambda > 0$. تابع چگالی متغیر تصادفی T عبارت است از:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 & ,t \leq 0 \\ &= \alpha \lambda^\alpha \, t^{\alpha - 1} \, e^{-(\lambda t)^\alpha} & ,t > 0 \,. \end{aligned}$$

تابع نرخ خطر متغیر تصادفی T عبارت است از:

$$\begin{aligned} r_T(t) &= \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \\ &= \alpha \lambda^\alpha \, t^{\alpha - 1} \quad \forall t > 0 \,. \end{aligned}$$

بنابراین برای $0 < \alpha < 1$ متغیر تصادفی T، DFR و برای $\alpha \geq 1$ متغیر تصادفی T، IFR است.

مؤلفه‌ای را در نظر بگیرید که در لحظه‌ی t سالم است و می خواهیم باقی‌مانده‌ی عمر آن را مورد بررسی قرار دهیم. تعریف بعدی معیاری را برای این منظور معرفی می‌کند.

---

[۹] convex

[۱۰] concave

تعریف ۲.۱ فرض کنید متغیر تصادفی T بیانگر طول عمر یک مؤلفه (سیستم) با تابع توزیع F و تابع بقای $\bar{F}$ باشد. متغیر تصادفی $T_t = [T - t | T > t]$ را باقی‌مانده‌ی طول عمر مؤلفه در لحظه‌ی t می گویند که دارای تابع بقای

$$\bar{F}_{T_t}(s) = \frac{\bar{F}(s+t)}{\bar{F}(t)}$$

است. متوسط باقی‌مانده‌ی عمر[11] مؤلفه در لحظه ی t عبارت است از:

$$\begin{aligned} m_T(t) &= E(T_t) \\ &= \left(\int_t^{\infty} \bar{F}(u)\, du\right) / \bar{F}(t) \end{aligned} \qquad (۴.۲.۱)$$

که آن را به اختصار با mrl نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱ متغیر تصادفی T را (با شرط وجود امید ریاضی آن) $IMRL$[12] ($DMRL$[13]) گوییم هرگاه تابع $m_T(t)$ (متوسط باقی‌مانده ی عمر) آن نسبت به t صعودی (نزولی) باشد.

خاصیت IFR خاصیت $DMRL$ را نتیجه می‌دهد. زیرا اگر متغیر تصادفی T، IFR باشد آن‌گاه از رابطه‌ی (۳.۲.۱)داریم:

$$\frac{\bar{F}_T(t_1+s)}{\bar{F}_T(t_1)} \geq \frac{\bar{F}_T(t_2+s)}{\bar{F}_T(t_2)} \qquad \forall\, t_1 \leq t_2\,,\, s \geq 0\,.$$

با انتگرال‌گیری نسبت به s از طرفین رابطه‌ی فوق خواهیم داشت :

$$\int_0^{\infty} \frac{\bar{F}_T(t_1+s)}{\bar{F}_T(t_1)}\, ds \geq \int_0^{\infty} \frac{\bar{F}_T(t_2+s)}{\bar{F}_T(t_2)}\, ds.$$

بنابراین

$$m_T(t_1) \geq m_T(t_2) \qquad \forall\, t_1 \leq t_2\,.$$

یعنی متغیر تصادفی X، $DMRL$ است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که اگر متغیر تصادفی T، DFR باشد، $IMRL$ نیز خواهد بود.

---

[11] Mean Residual Life

[12] Increasing Mean Residual Life

[13] Decreasing Mean Residual Life

۱—۳ ترتیب های تصادفی

مقایسه‌ی متغیرهای تصادفی با استفاده از توابعی از توزیع‌های احتمال تحت مطالعه مانند توابع توزیع، توابع نرخ خطر، توابع متوسط باقی‌مانده‌ی عمر و توابع مناسب دیگر مفیدتر از مقایسه بر اساس چند معیار عددی از توزیع‌ها مانند میانگین، میانه و واریانس است. مقایسه‌ی متغیرهای تصادفی با استفاده از توابع یاد شده معمولاً ترتیب‌های جزیی میان توزیع‌های احتمال به وجود می‌آورد. این مقایسه را ترتیب تصادفی می‌نامیم. ایده‌ی ترتیب تصادفی نخستین بار توسط لی من[۱۴] (۱۹۵۵) ارائه شد و طی سال‌های اخیر برای مقایسه‌ی توزیع‌های احتمال، چندین ترتیب تصادفی مختلف معرفی شده است. در این بخش ضمن ارائه‌ی تعاریف مربوط به چند ترتیب تصادفی، به بررسی روابط بین آنها نیز می‌پردازیم. تابع چگالی احتمال ، تابع توزیع احتمال، توابع بقا و نرخ خطر متغیرهای تصادفی X و Y را به ترتیب با f، g، F، G، $\bar{F}$، $\bar{G}$، r_F، r_G نشان می‌دهیم. به علاوه فرض کنید $l_X(l_Y)$ و $u_X(u_Y)$ به ترتیب نقاط انتهایی چپ و راست تکیه‌گاه $X(Y)$ باشند.

۱—۳—۱ ترتیب تصادفی معمولی

متغیر تصادفی Y در ترتیب تصادفی معمولی [۱۵] از متغیر تصادفی X بزرگ‌تر است $(Y \geq_{st} X)$ اگر

$$\bar{G}(t) \geq \bar{F}(t) \qquad \forall\, t \in (-\infty\,,\,\infty)\,. \tag{۵.۳.۱}$$

به عبارت دیگر Y با احتمال بیشتری نسبت به X مقادیر بزرگ‌تر را اختیار می‌کند. سکلی [۱۶] (۱۹۹۵) نشان داده است که برای هر تابع صعودی $\phi : \Re \to \Re$ و با شرط وجود امیدهای ریاضی ، $Y \geq_{st} X$ اگر و فقط اگر

$$E(\phi(Y)) \geq E(\phi(X))\,. \tag{۶.۳.۱}$$

مثال ۲.۱ الف) فرض کنید $\phi(x) = x^r$. اگر $Y \geq_{st} X$ آن گاه

$$E(Y^r) \geq E(X^r) \quad \forall\, r \geq 0$$

و

$$E(Y^r) \leq E(X^r) \quad \forall\, r \leq 0\,.$$

۱۴ Lehmann

۱۵ usual stochastic order

۱۶ Szekli

ب) اگر قرار دهیم $\phi(x) = e^{sx}$ آن گاه از $Y \geq_{st} X$ نتیجه می شود که

$$E(e^{sY}) \geq E(e^{sX}) \quad \forall s \geq 0$$

و

$$E(e^{sY}) \leq E(e^{sX}) \quad \forall s \leq 0 .$$

۱–۳–۲ ترتیب نرخ خطر

می گوییم متغیر تصادفی Y در ترتیب نرخ خطر از متغیر تصادفی X بزرگ‌تر است ($Y \geq_{hr} X$) اگر برای $t \in (-\infty\,, max\{u_X, u_Y\})$

$$\frac{\bar{G}(t)}{\bar{F}(t)} \qquad (۱.۳.۷)$$

نسبت به t صعودی باشد، یا به طور معادل

$$\bar{G}(v)\bar{F}(u) \leq \bar{G}(u)\bar{F}(v) \quad \forall v \leq u . \qquad (۱.۳.۸)$$

با قرار دادن $v = t$ و $u = t + s$ ($s \geq 0$) در رابطه ی فوق و دوباره نویسی آن نتیجه می شود که $Y \geq_{hr} X$ اگر و فقط اگر

$$\frac{\bar{F}(t+s)}{\bar{F}(t)} \leq \frac{\bar{G}(t+s)}{\bar{G}(t)} \quad \forall s \geq 0, t .$$

اما برای هر t و $s \geq 0$:

$$\frac{\bar{F}(t+s)}{\bar{F}(t)} = P(\,X - t > s |\, X > t) .$$

بنابر این $Y \geq_{hr} X$ اگر و فقط اگر

$$\forall t \in \Re \quad [Y - t|\, Y > t] \geq_{st} [X - t|\, X > t] . \qquad (۱.۳.۹)$$

در حالتی که متغیر های تصادفی X و Y نشان دهنده‌ی طول عمر سیستم‌ها باشند(نامنفی باشند)، مرتب کردن آنها بر اساس ترتیب نرخ خطر معادل است با این‌که متغیرهای باقیمانده‌ی طول عمر سیستم ها در لحظه‌ی t، به شرط آن که سیستم‌ها تا لحظه‌ی t عمر کرده باشند را برای هر t بر حسب ترتیب تصادفی معمولی مقایسه کنیم. به همین دلیل ترتیب نرخ خطر به ترتیب تصادفی یکنواخت نیز معروف

است. زمانی که X و Y دارای توزیع‌های مطلقاً پیوسته هستند به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که با شرط وجود توابع نرخ خطر، $Y \geq_{hr} X$ اگر و فقط اگر

$$r_X(t) \geq r_Y(t) \quad \forall t \in (-\infty , \infty) \qquad (۱۰.۳.۱)$$

که r_X و r_Y به ترتیب توابع نرخ خطر متغیرهای تصادفی X و Y هستند.

درقضیه‌ی بعد ارتباط میان ترتیب نرخ خطر و ترتیب تصادفی معمولی مشخص می شود.

قضیه ۱.۱ اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند طوری که $Y \geq_{hr} X$ آن گاه $Y \geq_{st} X$.

برهان. فرض کنید $Y \geq_{hr} X$. از رابطه ی (۸.۳.۱) داریم:

$$\bar{G}(v)\bar{F}(u) \leq \bar{G}(u)\bar{F}(v) \qquad v \leq u .$$

چون $\bar{G}(-\infty) = \bar{F}(-\infty) = ۱$ با میل دادن v به سمت $-\infty$ در رابطه‌ی فوق، برای هر u نتیجه می‌شود، $\bar{F}(u) \leq \bar{G}(u)$ و این یعنی $Y \geq_{st} X$. □

در حالت کلی عکس قضیه‌ی (۱.۱) برقرار نیست یعنی از این که $Y \geq_{st} X$ باشد همواره نمی‌توان نتیجه گرفت که $Y \geq_{hr} X$. به مثال بعدی توجه کنید.

مثال ۳.۱ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{۱}{۳} && , ۰ < t < ۳ \\ &= ۰ && \text{سایر نقاط}, \end{aligned}$$

و متغیر تصادفی Y دارای تابع چگالی

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{۱}{۶} && , ۰ < t \leq ۱ \\ &= \frac{۱}{۲} && , ۱ < t \leq ۲ \\ &= \frac{۱}{۳} && , ۲ < t < ۳ \\ &= ۰ && \text{سایر نقاط}. \end{aligned}$$

باشد. تابع توزیع متغیرهای X و Y به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} F(t) &= ۰ && , t < ۰ \\ &= \frac{t}{۳} && , ۰ \leq t < ۳ \\ &= ۱ && , ۳ \leq t \end{aligned}$$

و

$$
\begin{aligned}
G(t) &= ۰ && ,t < ۰\\
&= \frac{t}{۶} && ,۰ \le t < ۱\\
&= \frac{۳t-۲}{۶} && ,۱ \le t < ۲\\
&= \frac{t}{۳} && ,۲ \le t < ۳\\
&= ۱ && ,۳ \le t\,.
\end{aligned}
$$

برای هر t، $G(t) \le F(t)$ و در نتیجه $Y \ge_{st} X$. قرار می‌دهیم $X_۱ = [X - ۱ | X > ۱]$ و $Y_۱ = [Y - ۱ | Y > ۱]$. تابع توزیع متغیرهای $X_۱$ و $Y_۱$ به ترتیب عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
F_{X_۱}(t) &= ۰ && ,t < ۰\\
&= \frac{t}{۲} && ,۰ \le t < ۲\\
&= ۱ && ,۲ \le t
\end{aligned}
$$

و

$$
\begin{aligned}
F_{Y_۱}(t) &= ۰ && ,t < ۰\\
&= \frac{۳t}{۵} && ,۰ \le t < ۱\\
&= \frac{۲t}{۵} + \frac{۱}{۵} && ,۱ \le t < ۲\\
&= ۱ && ,۲ \le t\,.
\end{aligned}
$$

به سادگی نتیجه می شود که برای هر t، $F_{X_۱}(t) \le F_{Y_۱}(t)$، یعنی $X_۱ \ge_{st} Y_۱$. پس طبق رابطه‌ی (۹.۳.۱)، $Y \ngeq_{hr} X$.

در ادامه لمی بیان می‌شود که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

لم ۱.۱ اگر متغیرهای تصادفی X و Y چنان باشند که $Y \ge_{hr} X$ و Z یک متغیر تصادفی IFR باشد که از X و Y مستقل است، آن گاه

$$Y + Z \ge_{hr} X + Z\,.$$