بسم الله الرحمن الرحيم

چکیده

از آنجا که هسته یک سیستم بس ذره‌ای است بناچار برای توصیف رفتار آن باید به مفاهیم آماری روی آورد. چگالی تراز هسته ای (NLD) کلید پرداختن به این مفاهیم آماری است. زیرا با محاسبه این کمیت است که می‌توانیم آنتروپی سیستم هسته‌ای، ظرفیت گرمایی و احتمال گذار را محاسبه کنیم. مساله چگالی سطوح انرژی در فیزیک هسته‌ای هم به دلایل نظری و هم به دلایل تجربی از اهمیت خاصی برخوردار است. بنابراین در این تحقیق ابتدا چگالی تراز هسته‌ای را با شروع از تعریف تابع دلتا و مفهوم تابع پارش و استفاده از تقریب نقطه زینی مورد بررسی قرار داده ایم و سپس چگالی تراز هسته‌ای را با استفاده از مدل های مختلفی مانند: مدل گاز فرمی، مدل BCS و مدل ESM مورد مطالعه قرار داده‌ایم و آن را به صورت تابعی از انرژی برانگیزش و عدد پروتونی و عدد نوترونی و اسپین و آیزواسپین بدست آورده‌ایم. با توجه به اینکه چگالی تراز هسته‌ای به کمیت مهمی بنام پارامتر چگالی تراز هسته‌ای مربوط می‌شود، لذا این کمیت مهم را مورد بررسی قرار داده‌ایم و آن را با استفاده از تقریب اصلاح شده توماس- فرمی و یک روش نیمه‌تجربی به صورت تابعی از عدد جرمی A بدست آورده ایم. همچنین با استفاده از محاسبات آماری و تقریب اصلاح شده توماس- فرمی و با استفاده از مفهوم جرم مؤثر پارامتر چگالی تراز را به صورت تابعی از دما در دماهای پائین تعیین کرده‌ایم. در این میان رابطه ساده‌ای برای هسته‌هایی با اعداد جرمی ۱۶۰، ۱۱۰، ۶۰، ۴۰ =A ۲۱۰، بدست آورده‌ایم و نمودار تغییر پارامتر چگالی تراز با دما را برای هسته‌های $^{60}_{27}Co$ و $^{160}_{65}Tb$ برای دماهایی در گسترهٔ از T= ۰ تا (MeV) ۱۰= T رسم نموده‌ایم در نهایت نمودار تغییر پارامتر چگالی تراز را به صورت تابعی از عدد جرمی برای تعدادی هسته رسم نموده‌ایم. معلوم شده است که تغییر پارامتر چگالی تراز با عدد جرمی بطور خطی نیست.

دانشکده‌ی علوم

بخش فیزیک

پایان نامه

جهت اخذ درجه‌ی کارشناسی ارشد

در رشته فیزیک هسته‌ای

عنوان:

مطالعه بر روی پارامتر چگالی تراز هسته‌ای و بستگی آن به دما و عدد جرمی

استاد راهنما:

دکترمهدی نصری نصرآبادی

به وسیله:

اکبر ایروانی‌نسب

شهریورماه ۸۸

فهرست مطالب

عنوان | **صفحه**

فهرست شکل‌ها و نمودارها

عنوان **صفحه**

فهرست جداول

عنوان **صفحه**

فصل اول

بررسی روشهای محاسبه چگالی ترازهای هسته ای

فصل دوم

محاسبه پارامتر چگالی تراز هسته‌ای

فصل سوم

اثر (NLDP) بر روی چگالی تراز هسته‌ای

۱-۱- مقدمه

بررسی رفتار واقعی هسته به عنوان یک سیستم بس ذره ای با مطالعه برروی سطوح انرژی آن امکان پذیر است. براین اساس تحلیل ترازهای انرژی هسته درحالت برانگیخته بر اساس مکانیزم تشکیل هسته مرکب در دو ناحیه جداگانه صورت می پذیرد:

۱- ناحیه انرژی برانگیزش پایین

۲- ناحیه انرژی برانگیزش بالا

این تقسیم بندی به طور طبیعی ناشی از رهیافتهای متفاوتی است که برای تحلیل آنها بکار گرفته می‌شود. روش اسپکتروسکوپی برای ترازهای با انرژی پائین و روش آماری برای ترازهای با انرژی بالا بکار گرفته می‌شود. ترازهای با انرژی برانگیخته پائین از لحاظ ساختار نسبتاً ساده هستند. این ترازها جدا از هم و قابل شمارش می‌باشند. روش اسپکتروسکوپی مناسب‌ترین روشی است که منجر به اطلاعات مفیدی دررابطه با ساختار هسته و برهم کنش‌های باقیمانده می‌گردد. یکی از بر هم کنش‌های باقیمانده برهم کنش جفت[1]یا به اصطلاح جفت شدگی می‌باشد. باتوجه به مفهوم جفت شدگی و تمایل فرمیون ها به جفت شدن، تئوری چگالی ترازهای هسته‌ای پیشرفت کرده است. این نوع برهم کنش ها در انرژی های پائین اهمیت

1-Pairing Intraction

بسیاری دارند. یکی دیگر از بر هم کنش‌های باقیمانده بر هم کنش چهار قطبی-چهارقطبی[1] است که از روی محاسبه‌ی توزیع تابع تغییرشکل هسته برحسب انرژی برانگیزش به دست می آید. در محدوده انرژی‌های بالا ترازهای انرژی همپوشانی داشته و به صورت حالت های پیوسته در می‌آیند. بنابراین در ناحیه انرژی برانگیزش بالا با ترازهای انرژی فوق العاده زیاد که غیر قابل تفکیک بوده و از نظر ساختار پیچیده‌اند، روبرو هستیم. در نتیجه در محدودهٔ انرژی های برانگیزش بالا برای توصیف چنین رفتارهایی به ناچار به مفاهیم آماری رو می‌آوریم که در این میان چگالی تراز، کلید پرداختن به این مفاهیم است. چگالی ترازهای هسته‌ای برای سیستمی شامل A نوکلئون و انرژی برانگیختگی U با نماد ω نشان داده می شود و به صورت رابطه زیر تعریف می شود.

$$\omega(A,U) = \frac{dN(A,U)}{dU}$$

که $N(A,U)$ تعداد کل ترازهای هسته ای با انرژی کمتر یا مساوی با U است، در نتیجه چگالی ترازهای هسته‌ای تعداد ترازها در واحد انرژی، در انرژی برانگیختگی U را مشخص می‌کند. چگالی ترازهای هسته‌ای را می‌توان به طور تجربی به روش های زیر بدست آورد.

۱- شمارش مستقیم ترازها در واکنش های ذرات باردار مانند برهم کنش های (p,p') ، (α,p)و...

۲- از تحلیل رزونانس نوترون های کند $(\omega \approx D^{-1})$ که D فاصلهٔ ترازهای رزونانس نوترون است. این روش تنها در ناحیهٔ کوچکی از انرژی برانگیختگی دقیقاً بالای انرژی جدایی ذرات بکار می رود.

۳- استفاده از تحلیل طیف ذرات ساطع شده.

1-Quadrapole-Quadrapole

در این تحقیق به دنبال روشهایی برای محاسبه تعداد ترازها در واحد انرژی هسته ای[1] و به تبع آن تعداد حالات در واحد انرژی هسته‌ای[2] هستیم. عمومی ترین روش محاسبهNLD استفاده ازروش تابع پارش براساس تقریب نقطهٔ زینی است. این روش در بدست آوردن فرمولی تحلیلی ساده، بسیار توانا است. در این روش محاسبه از مدل های مختلفی مانند مدل گاز فرمی و مدل ترازهای هم فاصله استفاده می‌شود. NLD نقش مهم و قابل توجهی در واکنش‌های هسته‌ای از قبیل تشکیل هسته‌های مرکب و آهنگ واپاشی‌های هسته‌ای (احتمال گذار) از جمله واپاشی گاما در هسته هایی که تا حد بالایی برا نگیخته شده‌اند ایفا می‌کند. بر این اساس یک ایدهٔ تقریبی برای احتمال پیدا کردن یک حالت خاص در یک انرژی معین و یا تعیین آهنگ واکنش هایی که در یک ناحیهٔ معین انرژی رخ می دهد، شکل می گیرد. بنابراین مناسب ترین کمیتی که خواص آماری هسته ها را توصیف می کند، چگالی تراز هسته یا NLD است.

NLD از همان روزهای اولیهٔ فیزیک هسته‌ای موضوع تحقیق بوده و در این زمینه مقالات نظری و تجربی متعددی به رشته تحریر در آمده است در واقع NLD محک بسیار خوبی برای تقریب هایی است که در سیستم های بس ذره ای اعمال می شود. لازم به ذکر است که باید تمایز روشنی بین چگالی حالت و چگالی تراز قائل شد. این کمیت ها به ترتیب با توابع ρ و ω نمایش داده می‌شوند و تابعی از کمیت های اولیه از قبیل عدد پروتونی (Z) و عدد نوترونی (N) و عدد جرمی (A) می باشند. برای مثال فرض می کنیم که هامیلتونین هسته‌ای تحت چرخش ناورد است در نتیجه تفاوت حالت‌ها تنها در M تصویر اسپین J روی محور کوانتش می‌باشد همه این حالت ها در انرژی تبهگن هستند بنابراین 2J+1 حالت دارای J یکسانی هستند. اگر تعداد ترازها با J معین در واحد انرژی برانگیختگی U، با در نظرگرفتن $U = E - E_{ground}$ که E انرژی کل هسته و E_{ground} انرژی حالت پایه است، $\omega_j(U)$باشد، چگالی کل تراز از رابطه‌ی

1. Nuclear Level Density (NLD)
2. Nuclear State Density (NSD)

$\omega(U)$ با فاکتور $\omega(U)$ بدست می آید. چگالی حالت $\rho(U)$ با چگالی تراز $\omega_A(U) = \sum_j \omega_j(U)$ وزن (2J+1) برای هر تراز با اسپین J تفاوت دارد به این صورت که:

$$\rho(U) = \sum_j (2J+1)\omega_j(U) \qquad (۱-۱)$$

مشخصهٔ ویژه کمیت $\rho(U)$ افزایش سریع و فوق‌العاده آن با افزایش انرژی برانگیزش U می‌باشد. ساده‌ترین بیان برای چگالی ترازهای انرژی هسته‌ای توسط بت (Bethe) بر اساس روش مدل گاز فرمی[1] ارائه شده است [۲۰].

$$\rho(U) = \frac{\sqrt{\pi}}{12a^{\frac{1}{4}}U^{\frac{5}{4}}}\exp(2\sqrt{aU})$$

این مدل بعدها توسط بلوخ (Bloch) با در نظر گرفتن حالت‌های دقیق نوکلئون‌ها در پتانسیل مرکزی به جای تقریب توزیع پیوسته ترازها و اثر برهم کنش های دو طرفهٔ نوکلئون ها به صورت رابطه ی زیر اصلاح شده است.

$$\rho(U) = \frac{1}{\sqrt{48U}}\exp(2\sqrt{aU}) \qquad (۱- ۲)$$

که در آن (a) پارامتر چگای تراز است که اغلب برحسب عدد جرمی (A) داده می شود. در این رهیافت کمبودهایی وجود دارد که مهمترین آنها عدم وابستگی پارامتر چگالی تراز به انرژی می‌باشد. علی رغم این کمبودها فرمول بلوخ به طور وسیعی قابل استفاده است. پس از کارهای اولیه بت بر روی چگالی تراز، مطالعات زیادی برای تعیین این کمیت مهم و کلیدی صورت پذیرفته است. فرمول بت به واسطه سادگی به طور وسیعی در تحلیل آماری واکنش های هسته‌ای بکار گرفته شده است. این فرمول اساساً شکل ساده ای به خود می‌گیرد زیرا:

1-Fermi Gas Model

۱- ارتباط تابع پارش بزرگ با تابع پارش با استفاده از تقریب نقطهٔ زینی برای محاسبهٔ تریس (trace) روی حالت ها به آسانی میسر است .

۲- تابع پارش بزرگ با استفاده از طیف انرژی تک ذره مستقل که در آن فرض بر هم فاصله بودن ترازهای انرژی است، تقریب زده شده است.

اخیراً فعالیتهای نظری قابل ملاحظه ای در مورد تعیین چگالی حالت یا تراز هسته‌های چند نوکلئونی انجام شده است و اثرات لایه‌ای[۱]، جفت شدگی[۲]و تغییر شکل[۳]مدنظر قرار گرفته اند. همچنین موفقیت هایی در تعیین Spin-Cut off-Factor حاصل شده است.

۱-۲ - مبانی تئوری

برای محاسبه NLD در ابتدا سیستمی کوانتومی با ویژه مقادیر انرژی ε_1، ε_2، ε_3،.... متناظر با هامیلتونی H را برای طیف انرژی گسسته با انرژی ε_j در نظر می‌گیریم، چگالی تراز $\omega(E)$ این سیستم توسط رابطهٔ زیر داده می شود .

$$\omega(E) = \sum_j \delta(E - \varepsilon_j) \tag{۱-۲-۱}$$

$$\int_{E_1}^{E_2} \omega(E)dE = N(E_2) - N(E_1) \tag{۲-۲-۱}$$

که در آن $N(E)$ تعداد کل ترازهای با انرژی کمتر از E را نشان می‌دهد. نمایش فوریه $\delta(E - \varepsilon_J)$ به صورت زیر میباشد.

$$\delta(E - \varepsilon_J) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(E-\varepsilon_j)} \tag{۳-۲-۱}$$

1-Shell
2-Pairing
3.Deformation

در نتیجه:

$$\omega(E)=\sum_j \delta(E-\varepsilon_j)$$
$$=\sum_j \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(E-\varepsilon_j)}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikE}\left(\sum_j e^{-ik\varepsilon_j}\right)dk$$
$$\Rightarrow\ \omega(E)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\beta E} z(\beta)\, d\beta \qquad (۱-۲-۴)$$

در رابطه (۱-۲-۴) از تغییرمتغیر زیر استفاده کرده ایم.

$$ik=\beta \Rightarrow dk=\frac{1}{i}d\beta$$
$$z(\beta)=\sum_j \exp(-\beta\varepsilon_j)$$

$z(\beta)$ کمیت آشنایی است که در مکانیک آماری تابع پارش نامیده می‌شود. چنانچه هسته در حالت برانگیخته به عنوان یک سیستم تعادلی در نظر گرفته شود، βمعکوس دما نامیده می‌شود. از معادله (۱-۲-۴) معلوم است که با دانستن تابع پارش سیستم، کمیت های آماری مربوطه از جملهNLD بدست می آید. معادله (۱-۲-۴) با بکارگیری روش سریع ترین کاهش به صورت ساده‌ای بیان می‌شود. انتگرالده در این معادله در نقطه پایدار β_0دارای یک مینیموم است، بنابراین مشتق انتگرالده در این نقطه صفر می‌شود. نقطه β_0را نقطه زینی گویند. بنابراین روابط بدست آمده از مشتق انتگرالده در نقطه زینی را شرایط نقطه زینی می‌گویند.

$$\frac{d(e^{\beta E}z(\beta))}{d\beta}\Big|_{\beta_0}=0 \Rightarrow (Ee^{\beta E}z(\beta)+e^{\beta E}\frac{dz(\beta)}{d\beta})_{\beta_0}=0$$
$$\Rightarrow\ \left(e^{\beta E}\left[Ez(\beta)+\frac{dz(\beta)}{d(\beta)}\right]\right)_{\beta_0}=0$$
$$\Rightarrow\ E\ z(\beta_0)+\left(\frac{d\ z(\beta)}{d\ \beta}\right)_{\beta_0}=0$$

$$\Rightarrow Ez(\beta_0) = -\left(\frac{dz(\beta)}{d\beta}\right)_{\beta_0}$$

$$\Rightarrow E = -\frac{1}{z(\beta_0)}\left(\frac{dz(\beta)}{d\beta}\right)_{\beta_0}$$

$$\Rightarrow E = -\frac{d\ln z(\beta_0)}{d\beta_0}$$

(۱-۲-۵)

حال لگاریتم انتگرالده در معادلهٔ (۱-۲-۴)، یعنی تابع $\ln z(\beta) + \beta E$ را در همسایگی β_0 بسط می‌دهیم.

$$\ln z(\beta) + \beta E = \ln z(\beta_0) + \beta_0 E + (\beta - \beta_0)\frac{d}{d\beta}\left[\ln z(\beta) + \beta E\right]_{\beta_0}$$

$$+\frac{(\beta-\beta_0)^2}{2!}\frac{d^2}{d\beta^2}\left[\ln z(\beta) + \beta E\right]_{\beta_0}$$

$$= \ln z(\beta_0) + \beta_0 E + (\beta - \beta_0)\left[\frac{d\ln z(\beta)}{d\beta} + E\right]_{\beta_0}$$

$$+\frac{(\beta-\beta_0)}{2!}\left[\frac{d^2\ln z(\beta)}{d\beta^2} + \frac{d^2}{d\beta^2}(\beta E)\right]_{\beta_0}$$

$$\Rightarrow \ln z(\beta) + \beta E = \ln z(\beta_0) + \beta_0 E + (\beta - \beta_0)\left[\frac{d\ln z(\beta)}{d\beta} + E\right]$$

$$+\frac{(\beta-\beta_0)^2}{2!}\left[\frac{d^2\ln z(\beta)}{d\beta^2}\right]_{\beta_0}$$

(۱-۲-۶)

اما با توجه به رابطهٔ (۱-۲-۵)، یعنی شرط نقطه زینی جملهٔ سوم صفراست در نتیجه:

$$\ln z(\beta) + \beta E = \ln z(\beta_0) + \beta_0 E + \frac{1}{2}(\beta - \beta_0)^2\frac{d^2\ln z(\beta_0)}{d\beta_0^2}$$

$$\Rightarrow \ln z(\beta) = -\beta E + \ln z(\beta_0) + \beta_0 E + \frac{1}{2}(\beta - \beta_0)^2\frac{d^2\ln z(\beta_0)}{d\beta_0^2}$$

(۱-۲-۷)

$$\Rightarrow z(\beta) = e^{\left[-\beta E+\ln z(\beta_0)+\beta_0 E+\frac{(\beta-\beta_0)}{2}\cdot\frac{d^2 \ln z(\beta_0)}{d\beta_0{}^2}\right]} \qquad (۱-۲-۸)$$

بااستفاده از معادلات (۱-۲-۴) و (۱-۲-۸) داریم.

$$\omega(E) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} d\beta\, e^{\beta E}\, e^{\left[-\beta E+\ln z(\beta_0)+\beta_0 E+\frac{1}{2}(\beta-\beta_0)^2\frac{d^2 \ln z(\beta_0)}{d\beta_0{}^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} d\beta e^{\ln z(\beta_0)+\beta_0 E+\frac{1}{2}(\beta-\beta_0)\frac{d^2 \ln z(\beta_0)}{d\beta_0^2}}$$

$$\Rightarrow \omega(E) = \frac{1}{2\pi i} e^{\ln z(\beta_0)+\beta_0 E}\int_{-i\infty}^{+i\infty} d\beta e^{\frac{1}{2}(\beta-\beta_0)^2\frac{d^2 \ln z(\beta_0)}{d\beta_0{}^2}} \qquad (۱-۲-۹)$$

با استفاده از تغییر متغیر $\beta = i\beta$ داریم:

$$\omega(E) = \frac{1}{2\pi i} e^{\ln z(\beta_0)+\beta_0 E}\int_{-\infty}^{+\infty} d(i\beta) e^{\frac{1}{2}(i\beta-\beta_0)^2\frac{d^2 \ln z(\beta_0)}{d\beta_0{}^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{\ln z(\beta_0)+\beta_0 E}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\beta+i\beta_0)^2\frac{d^2 \ln z(\beta_0)}{d\beta_0{}^2}} d\beta$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{\ln z(\beta_0)+\beta_0 E}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2}\frac{d^2 \ln z(\beta_0)}{d\beta_0{}^2}}}$$

$$\Rightarrow \omega(E) = e^{\ln z(\beta_0)+\beta_0 E}\sqrt{\frac{1}{2\pi\frac{d^2 \ln z(\beta_0)}{d\beta_0{}^2}}}$$

$$= \frac{e^{\ln z(\beta_0)+\beta_0 E}}{\sqrt{2\pi\frac{d^2 \ln z(\beta_0)}{d\beta_0^2}}}$$

معرفی کمیت $S = \ln z(\beta_0) + \beta_0 E$ به عنوان آنتروپی داریم:

$$\omega(E) = \frac{e^S}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{d^2 \ln z(\beta_0)}{d\beta_0^2}}} \qquad (۱-۲-۱۰)$$

حال اگر از آنتروپی نسبت به انرژی مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$\frac{dS}{dE} = \frac{d}{dE}\left[\ln z(\beta_0) + \beta_0 E\right] = \frac{d \ln z(\beta_0)}{dE} + \frac{d\beta_0}{dE}E + \beta_0$$

$$= \frac{d\ \ln\ z(\beta_0)}{d\beta_0}\frac{d\beta_0}{dE} + E\ \frac{d\beta_0}{dE} + \beta_0$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dE} = \left(\frac{d \ln z(\beta_0)}{d\beta_0} + E\right)\frac{d\beta_0}{dE} + \beta_0 \qquad (۱-۲-۱۱)$$

با استفاده از شرط نقطه‌ی زینی، یعنی معادله (۱-۲-۵) داریم

$$\frac{dS}{dE} = \beta_0 = \frac{1}{t} \qquad (۱-۲-۱۲)$$

یعنی باتوجه به اینکه آنتروپی کمیتی ترمودینامیکی است β_0معکوس دمای ترمودینامیکی است با لگاریتم گرفتن از طرفین معادله (۱-۲-۱۰) داریم:

$$\ln \omega(E) = \ln z(\beta_0) + \beta_0 E - \ln\sqrt{2\pi\frac{d^2 \ln z(\beta_0)}{d{\beta_0}^2}}$$

$$= S - \ln\sqrt{2\pi\frac{d^2 \ln z(\beta_0)}{d{\beta_0}^2}} \qquad (۱-۲-۱۳)$$

$$\Rightarrow \frac{d\ \ln\ \omega(E)}{dE} = \frac{dS}{dE} = \beta_0 = \frac{1}{T} \qquad (۱-۲-۱۴)$$

چون روابط (۱-۲-۱۲) و (۱-۲-۱۴) از دو راه متفاوت بدست آمده‌اند، در راه دوّم کمیّت T به جای کمیت t برای کمیت $\frac{1}{\beta_0}$ بکار رفته است. در این روابط با توجه به اینکه $\omega(E)$چگالی ترازها و یا چگالی حالات هسته است و با توجه به معادلات ترمودینامیکی t دمای ترمودینامیکی

و T دمای هسته‌ای محسوب می‌شود. همچنین چگالی تراز بصورت تابعی از انرژی بدست آمده است.

۱-۳- محاسبه چگالی ترازهای هسته ای

NLD تابعی از کمیت‌های مختلف مانند: انرژیE، عددپروتونیZ، عدد نوترونیN، اسپینJ ، آیزواسپینτ و پاریته π می‌باشد که بستگی به انرژی آن در بخش (۱-۲) مورد بررسی قرار گرفته است و سایر وابستگی‌های آن به صورت زیر شرح داده می‌شوند

۱-۳-۱- محاسبه چگالی ترازبه صورت تابعی ازانرژی و عدد نوترونی

چگالی ترازهای هسته‌ای برای سیستمی باA نوکلئون را با بکارگیری روش سریع‌ترین کاهش برای (ω)و استفاده ازتقریب نقطه‌ی زینی، و روش تابع پارش بزرگ $z(\beta,\alpha)$ ، به صورت تابعی از انرژی(E) و تعداد نوترون ها(N) به صورت زیر بدست می‌آوریم.

$$\omega(E,N)=\sum_{j,\upsilon}\delta(E-\varepsilon_j)\delta(\upsilon-N)$$

$$=\sum_{j,\nu}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ik(E-\varepsilon_j(\upsilon))}dk\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ik'(\upsilon-N)}dk'$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikE}\sum_j e^{-ik\varepsilon_j(\upsilon)}dk\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{\upsilon}e^{ik'\upsilon}e^{-ik'N}dk'$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\left(\sum_j e^{-\beta\varepsilon_j(\upsilon)}\right)\left(\sum_{\upsilon}e^{\alpha\upsilon}\right)e^{\beta E}e^{-\alpha N}d\beta d\alpha$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\left(\sum_{j,\nu}e^{-\beta\varepsilon_j(\nu)+\alpha\nu}\right)d\beta d\alpha \qquad (۱۵-۳-۱)$$

$$\Rightarrow \omega(E,N)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty} z(\beta,\alpha)e^{\beta E-\alpha N}d\beta d\alpha \qquad (۱-۳-۱۶)$$

در این روابط از تغییرمتغیرهای زیر استفاده کرده ایم.

$$ik'=\alpha$$
$$ik=\beta$$
$$z(\alpha,\beta)=\sum_{j,\upsilon}e^{-\beta\varepsilon_j(\upsilon)+\alpha\upsilon}$$

$z(\alpha,\beta)$ کمیت شناخته شده‌ای در مکانیک آماری بوده که به آن تابع پارش بزرگ گفته می‌شود. به علاوه $\varepsilon_j(\upsilon)$ انرژی j امین حالت کوانتومی سیستمی υ ذره‌ای است، به بیان دیگر:

$$E_j=\sum_n(\nu(n))_j\,\varepsilon_j(\nu)=\sum_n(\nu(n)_j\,\varepsilon(n) \qquad (۱-۳-۱۷)$$

j حالت کوانتوی سیستم υ ذره‌ای بوده و (n) مربوط به حالت کوانتومی سیستم تک ذره‌ای می‌باشد. انتگرالده در معادله (۱-۳-۱۶) دارای یک مینیمم در نقطه‌ی زینی (α_0,β_0)است، بنابراین باید مشتق انتگرالده در این نقطه صفر باشد که پس از انجام عمل مشتقگیری شرایط نقطه زینی را خواهیم داشت.

$$\left(\frac{\partial\left(e^{\beta E-\alpha N}z(\alpha,\beta)\right)}{\partial\beta}\right)_{\beta_0,\alpha_0}=0$$

$$\Rightarrow\left(Ez(\beta,\alpha)+\frac{\partial z(\beta,\alpha)}{\partial\beta}\right)_{\beta_0,\alpha_0}=0$$

$$\Rightarrow\left(E+\frac{1}{z(\beta,\alpha)}\frac{\partial z(\beta,\alpha)}{\partial\beta}\right)_{\beta_0,\alpha_0}=0$$

$$\Rightarrow E+\left(\frac{\partial\ln z(\beta,\alpha)}{\partial\beta}\right)_{\beta_0,\alpha_0}=0\Rightarrow E=-\frac{\partial\ln z(\beta_0,\alpha_0)}{\partial\beta_0} \qquad (۱-۳-۱۸)$$