دانشگاه الزهرا (س)
دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه دکتری
رشته ریاضی (گرایش نظریه زبان‌ها و اتوماتا)

عنوان

اتوماتای (L-مقداری) درختی

استاد راهنما
دکتر محمدمهدی زاهدی

استاد مشاور
دکتر رضا عامری

دانشجو
مریم قرآنی

دی ۱۳۹۱

سپاس ایزد منان را که الطاف بیکرانش را از من دریغ ننموده و
چراغ هدایتش را در سایه ادب و کمالات بزرگان در وجودم برافروخت.

تقدیم به روح پرفتوح مادر عزیزم

به او که ظلال قامتش مآوای آسایش و آرامشم بود و
فرشته مهربانی که آفتاب مهرش در آستانه قلبم،
همواره پابرجاست و هرگز غروب نخواهد کرد.

تقدیم به پدر بزرگوارم

به او که از خواسته هایش گذشت، سختی ها را به جان خرید
و خود را سپر بلای مشکلات و ناملایمات کرد تا من به جایگاهی
که اکنون در آن ایستاده ام برسم.

تقدیم به همسر عزیزم

به او که سایه مهربانیش سایه سار زندگیم می باشد،
او که اسوه صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود.

تقدیم به خواهران مهربانم

به آنها که وجودشان شادی بخش و صفایشان مایه آرامش من است.

تشکر و قدردانی

سپاس و ستایش مر خدای را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.
اینک که به لطف الهی نگارش این رساله به پایان رسیده، وظیفه خود می‌دانم تشکر قلبی خود را نثار عزیزانی کنم که من را در انجام این کار یاری داده‌اند. از زحمات بی دریغ استاد ارجمندم جناب آقای دکتر محمدمهدی زاهدی که به عنوان استاد راهنما در دوره دکتری و کارشناسی ارشدم چون چراغی روشنگر راهم بودند، تشکر می‌کنم. همچنین، از آقای دکتر رضا عامری به خاطر مشاوره‌ها و حمایتهایشان در این دوره سپاسگزارم.

شایسته است از آقایان دکتر رجبعلی برزویی، دکتر رضا خراشادی زاده، دکتر یداله اردوخانی و دکتر داریوش بهمردی که داوری علمی این رساله را پذیرفتند و پیشنهادات و نظرات ارزشمندی ارایه دادند، تشکر و قدردانی کنم.

سرانجام، از پدر بزرگوارم، همسر عزیزم و خواهرهای مهربانم به خاطر همراهی و همدلی با من در این راه قدردانی می‌نمایم.

چکیده

در این پایان نامه، ابتدا روابط بین نظریه اتوماتای درختی و نظریه ابرساختارها را بررسی می‌کنیم. برای این منظور، تعدادی ابرعمل روی مجموعه درخت‌ها، حالت‌ها و الفبای یک اتوماتون درختی تعریف کرده و ثابت می‌کنیم که این ابرعمل‌ها ابرگروه‌های مختلفی ایجاد می‌کنند.

علاوه بر آن، گرامر درخت منظم متناوب و گرامر درخت منظم نرمال شده متناوب را تعریف کرده و هم‌ارزی بین آن‌ها نشان داده می‌شود. همچنین، ثابت می‌کنیم که کلاس زبان‌های درخت منظم متناوب دقیقاً همان کلاس زبان‌های پذیرفته شده توسط اتوماتای درختی از بالا به پایین متناوب است.

در ادامه، به بررسی مفهوم اتوماتای درختی متناهی مشبکه مقدار مانده‌ای کامل (L-مقدار) می‌پردازیم. یک لم تزریق برای اتوماتای درختی L-مقداری ثابت می‌کنیم. همچنین، وجود فرم مینیمال یک اتوماتون درختی L-مقداری را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

همچنین، برخی خواص اتوماتای درختی بر اساس منطق مشبکه مقدار مانده‌ای کامل را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این منظور، مفاهیمی مانند مجموعه L-مقداری از زیر سیستم‌های محض (قوی)، مجموعه L-مقداری از همریختی‌ها (قوی)، مجموعه L-مقداری از یکریختی‌ها (قوی) و مجموعه L-مقداری از روابط مجاز را تعریف کرده و رابطه بین آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی اتوماتای درختی، ابرگروه، فضای الحاقی، گرامر درخت منظم متناوب، منطق مشبکه مقدار، لم تزریق، مینیمم سازی.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

پیش‌گفتار

تقریباً تمام افرادی که به‌نوعی با ریاضیات سروکار دارند راجع به درخت اطلاعاتی دارند، چون این مفهوم در حوزه‌های مختلفی از ریاضیات از نظریه گراف گرفته تا جبرهای جامع ظاهر می‌شود. در علوم کامپیوتر، درخت‌ها، اغلب، به عنوان تعمیمی از رشته‌ها در نظر گرفته می‌شوند. نظریه اتوماتای درختی و زبان‌های درختی، که تعمیمی از اتوماتای متناهی است، در اواسط دهه ۱۹۶۰ توسط بوچی[1] و رایت[2] [۶] مطرح شد. آن‌ها در تعریف اتوماتای درختی، اتوماتای متناهی را به عنوان جبرهای یکتایی در نظر گرفتند. رشته‌ها روی یک الفبای متناهی می‌توانند به عنوان عبارت‌های روی یک الفبای متناهی یکتایی در نظر گرفته شوند.

این پایان نامه به بررسی نظریه زبان‌ها و اتوماتای درختی می‌پردازد. اتوماتای درختی متناهی در بسیاری از زمینه‌های علوم کامپیوتری مانند طراحی کامپایلر، پردازش بر روی پایگاه‌های داده‌های مبتنی بر XML و بازیابی اطلاعات دارای کاربردهای فراوانی می‌باشد. اکنون، به تفصیل شرح می‌دهیم که در هر فصل چه نتایجی و قضایایی بدست می‌آید.

در فصل اول پایان نامه، برخی مفاهیم و قضایای اولیه که در ادامه پایان نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند را ارایه می‌دهیم. در این فصل، در ابتدا تعاریف مربوط به منطق مشبکه مقدار را معرفی می‌کنیم. همچنین، تعاریف و قضایایی راجع به اتوماتا (فازی) را می‌آوریم. در ادامه به تعاریف مربوط به زبان‌های درختی (متناوب) و اتوماتای درختی (متناوب) پرداخته و تلاش می‌کنیم تا با مثال‌هایی مفاهیم مختلف را معرفی کنیم. در نهایت، به بررسی نظریه ابرگروه‌ها می‌پردازیم. مطالب این فصل از مراجع مختلف از جمله [۷، ۹، ۱۰، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۲۰، ۲۴، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۵، ۶۹، ۷۴] استخراج شده‌اند.

---

[1] Buchi

[2] Wright

از فصل دوم به بعد، نتایجی که در طول دوره دکتری آن‌ها را اثبات کرده‌ایم آورده می‌شود.

در فصل دوم رابطه بین اتوماتای درختی و نظریه ابرساختارها را بررسی می‌کنیم. در این فصل ابرعمل‌هایی روی اجزای مختلف یک اتوماتون درختی تعریف کرده و با کمک آن‌ها ابرگروه‌های مختلفی بدست می‌آوریم. در ابتدا، دو ابرعمل روی مجموعه درخت‌ها ارایه داده و ثابت می‌کنیم این ابرعمل‌ها ابرگروه‌هایی تولید می‌کنند. به‌علاوه، نشان می‌دهیم که یکی از آن‌ها باعث تولید یک فضای الحاقی می‌شود. پس از آن، ابرعملی روی مجموعه حالت‌های یک اتوماتون درختی معرفی کرده و نشان می‌دهیم که اگر یک اتوماتون درختی، کاهش یافته سره باشد، ابر عمل معرفی شده باعث تولید یک ابرگروه شبه مرتب می‌شود و اگر، اتوماتون درختی قطعی نیز باشد، ابرگروه بدست آمده یک فضای الحاقی می‌شود. در ادامه، رابطه ابرگروه حالت حاصلضرب $\perp$–مستقیم m اتوماتون درختی را با حاصلضرب رابطه‌ای ابرگروه‌های حالت بررسی می‌نماییم. در نهایت، ابرعملی روی مجموعه الفبای یک اتوماتون درختی تعریف کرده و ثابت می‌کنیم که یک فضای الحاقی تولید می‌کند.

در فصل سوم، اتوماتای درختی متناوب و زبان درخت منظم متناوب را معرفی می‌کنیم. گرامر درخت منظم متناوب و گرامر درخت منظم نرمال شده متناوب را تعریف کرده و هم‌ارزی بین آن‌ها را ثابت می‌نماییم. در ادامه، مفاهیم مختلفی از جمله اتوماتای درختی متناوب حالتی و اتوماتای درختی متناوب توسعه یافته را معرفی می‌کنیم و هم ارزی بین آن‌ها را نشان می‌دهیم. همچنین، ثابت می‌کنیم که برای هر گرامر درخت منظم متناوب حالتی خطی، یک گرامر درخت منظم متناوب خطی وجود دارد به‌طوری که زبان‌های یکسانی تولید می‌کنند.

فصل چهارم به بررسی اتوماتای درختی از دیدگاه منطق L–مقداری (منطق مشبکه مقدار مانده‌ای کامل) اختصاص دارد. در این فصل ابتدا یک اتوماتون درختی L–مقداری معرفی شده و چندین گزاره L–مقداری تعریف می‌کنیم و با کمک آن‌ها لم تزریق برای اتوماتای درختی L–مقداری را بیان و ثابت می‌کنیم. لم تزریق ثابت شده توسیعی از لم تزریق ارایه شده توسط کیو[۳] [۶۹] می‌باشد. در ادامه این فصل، رفتار اتوماتای درختی L–مقداری را مورد بررسی قرار داده و قضایایی راجع به قابل شناسایی بودن اجتماع و اشتراک دو گزاره L–مقداری قابل شناسایی اثبات می‌کنیم. علاوه بر آن، همریختی درختی توسعه یافته را تعریف کرده و قابل شناسایی بودن تصویر یک گزاره قابل شناسایی تحت همریختی توسعه یافته را بررسی می‌کنیم. در انتهای این فصل، وجود فرم مینیمال یک اتوماتون درختی L–مقداری را اثبات نموده و یک الگوریتم مینیمم سازی برای یک اتوماتون درختی ارایه می‌نماییم. همچنین، پیچیدگی زمانی الگوریتم ارایه شده را تحلیل کرده و با ارایه مثالی نحوه اجرای الگوریتم را شرح می‌دهیم.

[۳] Qiu

در فصل پنجم برخی خواص اتوماتای درختی L-مقداری را بررسی می‌کنیم. ابتدا مفاهیمی همانند مجموعه L-مقداری از زیرسیستم‌های محض و مجموعه L-مقداری از زیرسیستم‌های محض قوی را ارایه داده و سپس رابطه بین آن‌ها را بررسی می‌نماییم. در ادامه این فصل، مجموعه L-مقداری از همریختی‌ها و مجموعه L-مقداری از یکریختی‌ها را تعریف کرده و به تحلیل رابطه بین آن‌ها می‌پردازیم. همچنین، نتایجی راجع به مشخصه توپولوژیکی دو-فازی اتوماتای درختی بدست می‌آوریم. در انتها یک مجموعه L-مقداری از روابط مجاز را معرفی کرده و قضایایی راجع به آن ثابت می‌کنیم.

در نهایت در فصل ششم، به مرور نتایج فصل‌های قبلی پرداخته و پیشنهادهایی برای تحقیقات آتی ارایه می‌دهیم.

در ذیل مقالاتی که از این رساله استخراج شده‌اند را قید می‌نماییم.

(1) M. Ghorani, M.M. Zahedi, Characterization of complete residuated lattice-valued tree automata, Fuzzy Sets and Systems, 199, (2012), 28-46.

(2) M. Ghorani, M.M. Zahedi, R. Ameri, Algebraic properties of complete residuated lattice valued tree automata, Soft Computing, 16, (2012), 1723-1732

(3) M. Ghorani, M.M. Zahedi, Some hypergroups induced by tree automata, Australian Journal of Basic and Applied Sciences, accepted.

(4) M. Ghorani, M.M. Zahedi, On alternating regular tree grammars, submitted.

(5) M. Ghorani-damdabaja, M. M. Zahedi, The behavior of fuzzy trre automata, Applied Mathematics Conference, Zahedan, Iran, March 10-12, 2010.

(6) M. Ghorani, M.M. Zahedi, R. Ameri, On properties of lattice valued tree automata, The 11th Iranian Conference on Fuzzy Systems, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran, 2011.

(7) M. Ghorani, M.M. Zahedi, B.A. Ghaznavi-ghosoni, A pumping lemma for lattice-valued tree automata, The 11th Iranian Conference on Fuzzy Systems, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran, 2011.

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل برخی تعاریف و قضایای اولیه راجع به مشبکه ماندهای کامل[۱]، اتوماتای متناهی[۲] (فازی)، اتوماتای درختی[۳] (متناوب) و ابرگروهها[۴] را ارایه مینماییم. این تعاریف و قضایا در فصلهای بعدی مورد استفاده قرار میگیرند. برای توضیحات بیشتر به مراجع [۷، ۹، ۱۰، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۲۰، ۲۴، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۵، ۶۹، ۷۴] مراجعه شود.

۲.۱ مشبکه ماندهای کامل

تعریف ۱.۱. [۵] مشبکه $\mathcal{L}$، یک مجموعه بهطور جزئی مرتب[۵] $(L, \leq)$ است که برای هر دو عنصر آن کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین موجود باشد.

[۱] complete residuated lattice

[۲] finite automata

[۳] tree automata

[۴] hypergroups

[۵] partially ordered

تعریف ۲.۱. [۵] یک مشبکه $\mathcal{L}$ را کامل[۶] گویند هرگاه هر زیرمجموعه غیرتهی آن دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین باشد.

تعریف ۳.۱. [۶۹] یک مشبکه ماندهای کامل، ۵-تایی $\mathcal{L} =< L, +, \cdot, \odot, \rho >$ است که در آن:

(i) $< L, +, \cdot >$ یک مشبکه کامل است که کوچکترین و بزرگترین عناصر آن، به‌ترتیب، صفر و یک می‌باشند.

(ii) $\odot$ و ρ دو عمل دوتایی[۷] روی L اند به‌طوری‌که $< L, \odot, 1 >$ یک تکواره جابجایی[۸]است، یعنی $\odot$ شرکت پذیر[۹] و جابجایی است و ۱ مولفه همانی آن است، به‌عبارت دیگر برای هر $a \in L$ داریم $a \odot 1 = 1 \odot a = a$. هم‌چنین $\odot$ یک هم‌نوا[۱۰] و ρ یک پادنوا[۱۱] در اولین متغیر و یک هم‌نوا در دومین متغیر است. یعنی این‌که برای هر $a_1, a_2, b \in L$، اگر داشته باشیم $a_1 \leq a_2$ آن‌گاه

$$a_1 \odot b \leq a_2 \odot b, \quad b \odot a_1 \leq b \odot a_2, \quad a_2 \rho b \leq a_1 \rho b, \quad b \rho a_1 \leq b \rho a_2.$$

(iii) برای هر $a, b, c \in L$ ، $a \odot b \leq c$ اگر و فقط اگر $a \leq b \rho c$.

مثال ۱.۱. *فرض کنید $L = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. آن‌گاه، $\mathcal{L} =< L, \vee, \wedge, \odot, \rho >$ یک مشبکه مانده‌ای کامل است که در آن برای هر $a, b \in [0, 1]$ داریم $a \odot b = \max(0, a + b - 1)$ ، $a \rho b = \min(1, 1 - a + b)$ و $\vee$ و $\wedge$ به‌ترتیب نشان‌دهنده $\max$ و $\min$ می‌باشند.*

تبصره ۱.۱. در این پایان‌نامه، منظور از عبارت **منطق L-مقداری**[۱۲] همان منطق مشبکه-مقدار مانده‌ای کامل[۱۳] است. یعنی، L مجموعه مقادیر واقعی است که شامل a $(a \in L)$، یک رابط دوتایی[۱۴] $\&$، رابط‌های معمول $\vee$ و $\wedge$ و یک مفهوم $\rightarrow$ است. علاوه بر آن، در منطق L-مقداری، یک فرمول φ معتبر است، که به‌صورت $\models^{\mathcal{L}} \varphi$ نوشته می‌شود، اگر و فقط اگر $[\varphi] = 1$ که در آن $[\varphi]$ برای هر مقدار واقعی φ به‌کار برده می‌شود (به مراجع

[۶] complete

[۷] binary operation

[۸] commutative monoid

[۹] associative

[۱۰] isotone

[۱۱] antitone

[۱۲] L-valued logic

[۱۳] complete residuated lattice-valued logic

[۱۴] binary connective

[۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۹] رجوع شود). قوانین محاسبه واقعی منطق‌ها و مجموعه فرمول‌های تئوری به‌صورت می‌باشند:

(۱)

$$[a] = a \ (a \in L), \qquad [\varphi \vee \psi] = [\varphi] + [\psi],$$

$$[\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \cdot [\psi], \qquad [\varphi \to \psi] = [\varphi]\rho[\psi],$$

$$[\varphi \& \psi] = [\varphi] \odot [\psi].$$

(۲) اگر X مجموعه جامع باشد، آن‌گاه L^X نشان‌دهنده کلاس همه زیرمجموعه‌های L-مقداری روی X است، که در آن، یک زیر مجموعه L-مقداری روی X به معنی یک نگاشت از X به L می‌باشد. اکنون، فرض کنیم $A \in L^X$، لذا

$$[(\exists x)\varphi(x)] = \sum_{x \in X} [\varphi(x)], \quad [(\forall x)\varphi(x)] = \prod_{x \in X} [\varphi(x)], \quad [x \in A] = A(x).$$

همچنین

(الف) $\neg\varphi =^{def} \varphi \to ۰$،

(ب) $\varphi \leftrightarrow \psi =^{def} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$،

(ج) $A \subseteq B =^{def} (\forall x)((x \in A) \to (x \in B))$،

(د) $A \equiv B =^{def} (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$.

علاوه بر آن، برای هر $a, x_i, y_i \in L$، که i یک عنصر دلخواه از یک مجموعه اندیس[۱۵] است، داریم:

$$\prod_i (x_i \rho y_i) \leq \prod_i x_i \ \rho \ \prod_i y_i, \tag{۱.۱}$$

$$\prod_i (x_i \rho y_i) \leq \sum_i x_i \ \rho \ \sum_i y_i, \tag{۲.۱}$$

$$(a\rho x_i) \ . \ (x_i \rho y_i) \ \leq a \ \rho \ y_i, \tag{۳.۱}$$

$$(a\rho x_i) \odot a \leq x_i, \tag{۴.۱}$$

$$(\sum_i x_i)\rho a = \prod_i (x_i \rho a), \tag{۵.۱}$$

$$a\rho(\prod_i x_i) = \prod_i (a\rho x_i), \tag{۶.۱}$$

$$a_۱ \rho a_۲ \leq ((a_۱ \odot b)\rho c)\rho((a_۲ \odot b)\rho c), \tag{۷.۱}$$

[۱۵] index set

$$(a_۱ \rho a_۲) \odot (b_۱ \rho b_۲) \leq (a_۱ \cdot b_۱) \rho (a_۲ \cdot b_۲), \tag{۸.۱}$$

$$(a_۱ \rho a_۲) \odot (a_۲ \rho a_۳) \leq (a_۱ \rho a_۳). \tag{۹.۱}$$

۳.۱ اتوماتای متناهی (فازی)

تعریف ۴.۱. [۷۳] شش‌تایی $M = (Q, X, Y, f, g, s)$ را یک ماشین حالت متناهی[۱۶] گوییم که در آن:
۱) Q مجموعه‌ای متناهی است که مجموعه حالت‌ها[۱۷] نام دارد،
۲) X مجموعه‌ای متناهی است که الفبای ورودی[۱۸] را تشکیل می‌دهد،
۳) Y مجموعه‌ای متناهی است که مجموعه خروجی[۱۹] نامیده می‌شود،
۴) $f : Q \times X \to Q$ تابع انتقال حالت[۲۰] نام دارد،
۵) $g : Q \times X \to Y$ یک تابع است که تابع خروجی نامیده می‌شود،
۶) $s \in Q$ حالت ابتدایی[۲۱] نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱. [۷۳] فرض کنید $M = (Q, X, Y, f, g, s)$ یک ماشین حالت متناهی و X یک الفبای ورودی باشد. مجموعه تمام کلمات روی X، از جمله کلمه تهی، را با X^* نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۱. [۷۳] فرض کنید $M = (Q, X, Y, f, g, s)$ یک ماشین باشد. کلمه[۲۲] $x = x_۱ x_۲ \cdots x_n \in X^*$ را در نظر بگیرید. کلمه $y = y_۱ y_۲ \cdots y_n \in Y^*$ وابسته به x است هرگاه حالت‌های $q_۰, q_۱, \cdots q_n$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $f(q_{i-۱}, x_i) = q_i$ و $g(q_{i-۱}, x_i) = y_i$، $i = ۱, \cdots, n$.

تعریف ۷.۱. [۷۳] یک اتوماتون حالت متناهی، یک ماشین $M = (Q, X, Y, f, g, s)$ است که در آن $Y = \{۰, ۱\}$ و به‌علاوه دارای این خاصیت است که هر حالت، میزان خروجی یال‌های وارد به آن حالت را مشخص کند.

[۱۶] finite state machine

[۱۷] states

[۱۸] input alphabet

[۱۹] output set

[۲۰] state transition mapping

[۲۱] initial state

[۲۲] word

قرارداد: حالت‌هایی را که یال‌های ورودی به آن‌ها دارای خروجی ۱ هستند را حالت‌های پذیرشی می‌نامیم.
اکنون تعریفی معادل تعریف ۷.۱ ارایه می‌دهیم:

تعریف ۸.۱. [۷۳] یک اتوماتون حالت متناهی یک پنج‌تایی $A = (Q, X, f, F, q_\circ)$ است که در آن:
۱) Q مجموعه متناهی از حالت‌ها است،
۲) X مجموعه متناهی از ورودی‌ها می‌باشد،
۳) $f : Q \times X \to Q$ تابع انتقال حالت‌ها است،
۴) $F \subseteq Q$ مجموعه حالت‌های پذیرشی است،
۵) $q_\circ \in Q$ حالت ابتدایی می‌باشد.

تعریف ۹.۱. [۷۳] فرض کنید $A = (Q, X, f, F, q_\circ)$ یک اتوماتون حالت متناهی باشد و $x = x_۱ x_۲ \cdots x_n \in X^*$. اگر حالت‌های $q_\circ, q_۱, \cdots q_n$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $f(q_{i-۱}, x_i) = q_i$، $i = ۱, \cdots, n$ و $q_n \in F$، آن‌گاه گوییم که x یک کلمه پذیرشی در اتوماتون A است.

تعریف ۱۰.۱. [۵۸] یک اتوماتون فازی[۲۳] یک پنج‌تایی $A^* = (Q, X, \mu^*, F, \sigma)$ است که در آن:
۱) Q مجموعه متناهی از حالت‌ها است،
۲) X مجموعه متناهی از ورودی‌ها است،
۳) $\mu^* : Q \times X^* \times Q \to [\circ, ۱]$ یک مجموعه فازی روی $Q \times X^* \times Q$ است که تابع انتقال حالت فازی نامیده می‌شود،
۴) $F \subseteq Q$ مجموعه حالت‌های نهایی است،
۵) $\sigma \to [\circ, ۱]$ مجموعه‌ای فازی روی Q است که نگاشت حالت ابتدایی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱. [۵۸] فرض کنید $A^* = (Q, X, \mu^*, F, \sigma)$ یک اتوماتون فازی باشد. تابع پاسخ[۲۴] این اتوماتون به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_\mu : X^* \times Q \to [\circ, ۱]$$

$$r_\mu(x, q) = \vee_{q' \in Q}(\sigma(q') \wedge \mu^*(q', x, q)).$$

تعریف ۱۲.۱. [۵۸] فرض کنید $q \in Q$ و $c \in [\circ, ۱)$. گوییم q قابل دسترس[۲۵] با آستانه[۲۶] c است هرگاه $x \in X^*$

[۲۳] fuzzy automaton

[۲۴] response function

[۲۵] accessible

[۲۶] threshold

وجود داشته باشد به‌طوری‌که $r_\mu(x,q) > c$.

تعریف ۱۳.۱. [۵۸] فرض کنید $A^* = (Q, X, \mu^*, F, \sigma)$ یک اتوماتون فازی باشد. رفتار[۲۷] A^* در آستانه $c \in [0,1)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B(A^*, c) = \{x \in X^* |\ \vee_{q \in F}\, r_\mu(x,q) > c\}.$$

۴.۱ اتوماتای درختی (متناوب)

مجموعه اعداد صحیح مثبت را با $\mathbb{N}$ و مجموعه رشته‌های[۲۸] متناهی روی $\mathbb{N}$ را با $\mathbb{N}^*$ نشان می‌دهیم. همچنین، رشته تهی با ϵ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۴.۱. [۱۴] یک الفبای رتبه‌بندی شده[۲۹]، زوج $(F, Arity)$ است که در آن F مجموعه متناهی از علامت‌ها[۳۰] و $Arity$ یک نگاشت از F به $\mathbb{N}$ است. برای هر $f \in F$، $Arity(f)$ مرتبه[۳۱] f نامیده می‌شود.

مجموعه علامت‌های دارای مرتبه p با نماد F_p نشان داده می‌شود. عناصر دارای مرتبه ۰، ۱، $\cdots$ و p به‌ترتیب علامت‌های ثابت[۳۲]، یکتایی[۳۳]، $\cdots$ و pتایی هستند. در اینجا فرض می‌کنیم که مجموعه F حداقل شامل یک ثابت می‌باشد. در مثال‌ها برای اختصار از پرانتز و کاما برای تعریف علامت‌ها و مرتبه آن‌ها استفاده می‌کنیم. مثلا $f(,)$ اختصار علامت دوتایی f می‌باشد. قابل ذکر است که هر جا $arity$ مشخص باشد، به جای $(F, arity)$ از F استفاده می‌کنیم.

فرض کنید X مجموعه‌ای شامل متغیرها[۳۴] باشد و فرض کنید مجموعه X و F_0 مجزا هستند. در این صورت:

تعریف ۱۵.۱. [۱۴] مجموعه $T(F, X)$ شامل عبارت‌های[۳۵] روی الفبای رتبه‌بندی شده F و مجموعه متغیرهای X، کوچکترین مجموعه‌ای است که دارای خواص زیر است:

[۲۷] behavior

[۲۸] strings

[۲۹] ranked alphabet

[۳۰] symbols

[۳۱] arity

[۳۲] constant

[۳۳] unary

[۳۴] variables

[۳۵] terms

(i) $F_0 \subseteq T(F,X)$،

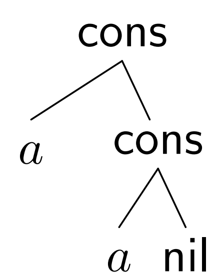
(ii) $X \subseteq T(F,X)$،

(iii) اگر $p \geq 1$، $f \in F_p$ و $t_1, \cdots, t_p \subseteq T(F,X)$ آن‌گاه $f(t_1, \cdots, t_p) \in T(F,X)$.

اگر مجموعه X تهی باشد، $T(F,X)$ به صورت $T(F)$ نوشته می‌شود. عبارت‌های در $T(F)$ را عبارت‌های پایه[۳۶] گویند.

تعریف ۱.۱۶. [۱۴] عبارت t در $T(F,X)$ را خطی[۳۷] گویند، اگر هیچ متغیری در t تکرار نشود.

مثال ۱.۲. *فرض کنیم $F = \{cons(,), nil, a\}$ و $X = \{x,y\}$. در اینجا $cons$ یک علامت دوتایی و nil و a ثابت هستند. عبارت $cons(x,y)$ خطی و عبارت $cons(x, cons(x, nil))$ غیر خطی است. عبارت $cons(a, cons(a, nil))$ یک عبارت پایه است. عبارت‌ها می‌توانند به شکل گرافیکی نشان داده شوند. به عنوان مثال نمایش گرافیکی عبارت $cons(a, cons(a, nil))$ چنین است:*



شکل ۱.۱: یک نمایش گرافیکی برای مثال ۱.۲

درخت مرتب متناهی t روی مجموعه برچسب‌های[۳۸] E، یک نگاشت از یک مجموعه پیشوندی-بسته[۳۹] $pos(t) \subseteq N^*$ به E می‌باشد. بنابراین عبارت $t \in T(F,X)$ را می‌توان به عنوان یک درخت رتبه‌بندی شده

[۳۶] ground terms

[۳۷] linear

[۳۸] label

[۳۹] prefix-closed set

مرتب[۴۰] متناهی در نظر گرفت. برگ‌های[۴۱] آن به وسیله متغیرها یا ثابت‌ها، و گره‌های[۴۲] داخلی با علامت‌های دارای مرتبه مثبت به همراه درجه خروجی برابر با مرتبه آن‌ها برچسب‌گذاری شده‌اند. یعنی یک عبارت $t \in T(F, X)$ را می‌توان به‌صورت یک تابع جزئی $t : N^* \to F \cup X$ با دامنه $pos(t)$ تعریف کرد، که شرایط زیر را برآورده می‌نماید:

(i) $t(\epsilon) = Head(t)$، جائیکه $Head(t)$ علامت ریشه[۴۳] t است.

(ii) $pos(t)$ غیرتهی و پیشوندی-بسته است.

(iii) برای $p \in pos(t)$، اگر $n \geq ۱$ و $t(p) \in F_n$ آن‌گاه $\{j | pj \in pos(t)\} = \{۱, ۲, \cdots, n\}$.

(iv) برای $p \in pos(t)$، اگر $t(p) \in F_۰ \cup X$، آن‌گاه $\{j | pj \in pos(t)\} = \emptyset$.

در این‌جا مفهوم عبارت و درخت را باهم معادل می‌گیریم به‌گونه‌ای که منظورمان از درخت، یک درخت رتبه‌بندی شده مرتب متناهی است که شرایط فوق را برآورده می‌سازد.

تعریف ۱.۱۷. [۱۴] هر عنصر در $pos(t)$ یک موقعیت[۴۴] نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱۸. [۱۴] یک موقعیت مرزی[۴۵]، یک موقعیت p است به‌طوری‌که برای هر $j \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $pj \notin pos(t)$.

تعریف ۱.۱۹. [۱۴] هر موقعیت p در t به‌طوری‌که $t(p) \in X$، یک موقعیت متغیر[۴۶] نام دارد.

تعریف ۱.۲۰. [۱۴] یک زیرعبارت[۴۷] $t|_p$ از یک عبارت $t \in T(F, X)$ در موقعیت p به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$pos(t|_p) = \{j | pj \in pos(t)\},$$

$$\forall q \in pos(t|_p),\ t|_p(q) = t(pq).$$

[۴۰] ordered ranked tree

[۴۱] leaves

[۴۲] nodes

[۴۳] root

[۴۴] position

[۴۵] frontier position

[۴۶] variable position

[۴۷] subterm

اگر در عبارت t زیر عبارت $t|_p$ با u جایگزین شود، آن را با نماد $t[u]_p$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲۱.۱. [۱۴] اندازه عبارت t با $|t|$ و ارتفاع[۴۸] آن با $\mathcal{H}(t)$مشخص می‌شوند و چنین تعریف می‌شوند:

(i) اگر $t \in X$ آن‌گاه داریم:

$$\mathcal{H}(t) = ۰,\ |t| = ۰$$

(ii) اگر $t \in F_۰$ آن‌گاه داریم:

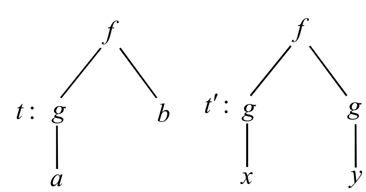
$$\mathcal{H}(t) = ۱,\ |t| = ۱$$

(iii) اگر $Head(t) \in F_n$ آن‌گاه داریم:

$$\mathcal{H}(t) = ۱ + max\{\mathcal{H}(t_i)|\ i \in \{۱, \cdots, n\}\},$$

$$|t| = ۱ + \sum_{i \in \{۱,۲,\cdots,n\}} |t_i|.$$

مثال ۳.۱. *فرض کنید* $F = \{f(,), g(), a, b\}$ *و* $X = \{x, y\}$*. شکل‌های زیر را در نظر بگیرید.*



شکل ۲.۱: درخت‌های ارایه شده در مثال ۳.۱

در این‌صورت داریم:

$$t \text{ مجموعه موقعیت‌های مرزی } = \{۱۱, ۲\},$$

$$t' \text{ مجموعه موقعیت‌های متغیر } = \{۱۱, ۲۱\},$$

$$t|_۱ = g(a),$$

$$t[b]_۱ = f(b, b),$$

$$|t| = ۴,$$

---

[۴۸] height