فهرست مطالب

تعریف ۱-۱-۱: مجموعه X، که عنصرهایش را نقاط خواهیم نامید، در صورتی یک فضای متری است که به هر دو نقطه ی p و q از X عدد حقیقی $d(p,q)$، به نام فاصله از p تا q، طوری مربوط شده باشد به طوری که

آ) اگر $p \neq q$ آنگاه $d(p,q) > 0$؛

ب) $d(p,q) = 0$ اگر و تنها اگر $p = q$؛

پ) $d(p,q) = d(q,p)$؛

ت) به ازای هر $r \in X$، $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$.

هر تابع با این چهار خاصیت یک تابع فاصله یا یک متر نام دارد.

مثال ۱-۱-۲: مهمترین مثالهای فضای متری عبارتند از فضاهای اقلیدسی R^{k}، بویژه R^1 (خط حقیقی) و R^2 (صفحه مختلط).

تعریف ۱-۱-۳: فرض کنید f تابعی حقیقی بر $(-\infty,\infty)$ باشد x را یک نقطه ثابت f خوانیم هرگاه $f(x) = x$.

تعریف۱-۱-۴: فرض کنیم X یک فضای متری با متر d باشد. هرگاه φ، X را به توی X بنگارد و عددی مثل $0 < c < 1$ باشد بطوری که به ازای هر $x, y \in X$، $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq cd(x, y)$ آنگاه φ یک انقباض از X بتوی X نام دارد.

قضیه ۱-۱-۵: هرگاه X یک فضای متری تام و φ یک انقباض از X بتوی X باشد، آنگاه یک و فقط یک $x \in X$ هست که $\varphi(x) = x$.

به عبارت دیگر، φ دارای یک نقطه ی ثابت منحصر بفردی می باشد.

تعریف ۱-۱-۶: (آ) گردایه ی (τ) از زیر مجموعه های مجموعه ی X را یک توپولوژی در X گوییم اگر τ از سه خاصیت زیر بهره مند باشد:

(یک) $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$؛

(دو) هرگاه به ازای $i = 1, \dots, n$، $V_i \in \tau$ آنگاه $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n \in \tau$

(سه) هرگاه $\{V_\alpha\}$ گردایه ی دلخواهی از اعضای τ (متناهی، شمارش پذیر یا شمارش ناپذیر) باشد، آنگاه $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

(ب) هرگاه τ یک توپولوژی در X باشد آنگاه X را یک فضای توپولوژی و اعضای τ را مجموعه های باز در X می نامند.

تعریف۱-۱-۷: X یک فضای هاسدورف[1] است در صورتی که به ازای هر $p, q \in \mathrm{X}$ که $p \neq q$ یک p همسایگی مانند U و q همسایگی مانند V وجود داشته باشد به طوری که

$U \cap \mathrm{V} = \emptyset.$

تعریف ۱-۱-۸: می گوییم دنباله $\{x_{\mathrm{n}}\}$ یک دنباله کوشی است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $N > 0$ وجود داشته باشد. بطوری که به ازای هر $m, n \geq N$ رابطه $d(x_{\mathrm{n}}, x_{\mathrm{m}}) < \varepsilon$ برقرار باشد.

تعریف۱-۱-۹: مجموعه کامل مجموعه ای است که هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد. مجموعه کامل: روش اول: هر دنباله ی کوشی در آن همگرا باشد. (همگرا به یک عضو مجموعه باشد. اگر به عضوی غیر از اعضای مجموعه همگرا باشد آنگاه همگرا نیست.)

تعریف۱-۱-۱۰: می گوییم $\lim_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = \mathrm{a}$ اگر

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{N} > 0 \quad s.t \ \ n \geq N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

تعریف ۱-۱-۱۱: می گوییم فضای بُرداری X یک فضای نرم دار است اگر به ازای هر $x \in \mathrm{X}$ به ازای هر $\propto \in F$ (F میدان است) عددی حقیقی، نامنفی مانند$\| x \|$ بنام نرم x چنان مربوط باشد که

1) به ازای هر $x, y \in X$ $\qquad \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

---

1. Hausdorff

2)   به ازای هر $\propto \in F, x \in X$ $\| \propto x \| \leq |\propto| \, \| x \|$

3)   اگر $x \neq 0$ آنگاه $\| x \| \geq 0$

تعریف ۱-۱-۱۲: فضای باناخ یک فضای خطی نرم دار است که نسبت به نرم تعریف شده کامل باشد.

1-مقدمات:

قضیه نقطه ثابت باناخ[1] یک ابزار مهم در نظریه فضاهای متریک است. نادلر[2] قضیه نقطه ثابت باناخ را برای نگاشت های تک مقداری به نگاشت های چند مقداری انقباضی گسترش داد. برای ارائه این قضیه مهم، به تعاریف و قضایای زیر نیاز داریم.

تعریف ۲-۱-۱: فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد. $\mathrm{C}B(X)$ بر مجموعه ناتهی بسته کراندار از زیر مجموعه های X دلالت می کند. برای $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{C}B(X)$ و $x \in X$، تعریف می کنیم

$$D(x, A) = \inf_{\mathrm{a} \in \mathrm{A}} d(x, a)$$

و

$$H(A, B) = max \left\{ \sup_{a \in A} D(a, B), \sup_{b \in B} D(b, A) \right\}.$$

مشاهده می شود که H یک متریک روی $\mathrm{C}B(X)$ است. H متریک هاسدورف ناشی از d نامیده می شود. اگر (X, d) یک فضای متریک کامل باشد، آنگاه $(\mathrm{C}B(X), H)$ یک فضای متریک کامل است.

تعریف ۲-۱-۲: فرض کنید $T: X \to \mathrm{C}B(X)$ یک نگاشت چند مقداری باشد. یک عضو $x \in X$ یک نقطه ثابت از T گفته می شود اگر $x \in Tx$ باشد.

1. Banach
2 . Nadler

تعریف ۲-۱-۳: عضو $x \in X$ یک نقطه تصادفی از $T: X \to CB(X)$ و $f: X \to X$ گفته می شود اگر $fx \in Tx$ باشد. واضح است $C(f,T) = \{x \in X | fx \in Tx\}$ مجموعه ای از نقاط تصادفی از f و T است.

تعریف ۲-۱-۴: نگاشت های $f: X \to X$ و $T: X \to CB(X)$ ضعیف سازگار[1] هستند. در صورتی که f و T جا به جا شوند یعنی اگر $fTx = Tfx$ موقعی که $fx \in Tx$ باشد.

تعریف ۲-۱-۵: فرض کنید $T: X \to \mathrm{CB}(X)$ یک نگاشت چند مقداری و $f: X \to X$ یک نگاشت تک مقداری باشد. می گوییم، T ـ ضعیف جابجایی[2] در $x \in X$ است اگر $ffx \in Tfx$ باشد.

تعریف ۲-۱-۶: یک عضو $x \in X$، یک نقطه ثابت مشترک از توابع $S: X \to \mathrm{CB}(X)$ و $f: X \to X$ است اگر

$$x = fx \in Tx \cap Sx.$$

مثال ۲-۱-۷: در نظر بگیرید $X = [0, +\infty)$ مجهز با متریک $d(x,y) = |x-y|$ به ازای هر $x, y \in X$. توابع $f: X \to X$ و $T: X \to \mathrm{CB}(X)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

1 - Weakly compatible
2 - Weakly commuting

$$Tx = \begin{cases} \{x\} & \text{اگر} \quad x \in [0,+1) \\ [1,1+2x] & \text{اگر} \quad x \in [1,+\infty) \end{cases} \quad \text{و} \quad fx = \begin{cases} 0 & \text{اگر} \quad x \in [0,1) \\ 2x & \text{اگر} \quad x \in [1,+\infty) \end{cases}$$

بنابراین داریم

$T1 = [1,3] \in 2 = f1$ یعنی $x = 1$ یک نقطه تصادفی از f و T است.

$Tf1 = [1,5] \neq [2,6] = fT1$ یعنی f و T نگاشت های ضعیف سازگار نیستند.

$Tf1 = [1,5] \in 4 = ff1$ یعنی f و T ضعیف جابجایی در ۱ است.

۲. نتایج اصلی

لم ۲-۲-۱: اگر $A, B \in CB(X)$ و $a \in A$ آنگاه برای یک ثابت $h > 1$، وجود دارد.

$b = b(a) \in B$ به طوری که

$$d(a,b) \leq hH(A,B).$$

قضیه ۲-۲-۲: فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل و $S: X \to CB(X)$ و T یک زوج از نگاشت های چند مقداری و $f, g: X \to X$ یک زوج از نگاشت های تک مقداری باشند.

فرض کنید که

$$H(Sx,Ty) \leq \propto d(fx,gy) + \beta[D(fx,Sx) + D(gy,Ty)] + \gamma[D(fx,Ty) + D(gy,Sx) \quad (۱)$$

برای هر $x, y \in X$ جایی که $\propto , \beta , \gamma \geq 0$ و $0 < \propto +2\beta + 2\gamma < 1.$

همچنین فرض کنید که

۱) $SX \subseteq gX$ و $TX \subseteq fX$

۲) $f(X)$ و $g(X)$ بسته باشند. در این صورت نقاط u و w در X وجود دارند به طوری که

$fu \in Su ,\ gw \in Tw ,\ fu = gw ,\ Su = Tw.$

اثبات: چون $0 < \propto +2\beta + 2\gamma < 1$ پس وجود دارد که $\mathfrak{r} > 0$ بطوری که

$$0 < \propto +2\beta + 2\gamma < \sqrt{\gamma} < 1. \quad (۲)$$

فرض کنید

$$\lambda = \frac{\propto +\beta + \gamma}{\sqrt{\mathfrak{r}} - (\beta + \gamma)}. \quad (۳)$$

با توجه به رابطه (۲) داریم

$$0 < \lambda < 1. \quad (۴)$$

فرض کنید $x_0 \in X$ دلخواه باشد در این صورت با توجه به رابطه (۱) $x_1 \in X$ وجود دارد، بطوریکه $\mathrm{g}x_1 \in Sx_0$ باشد. همچنین با توجه به رابطه (۱) و لم (2-۲-۱) و $\mathrm{h} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{r}}}$ و $\mathrm{g}x_1 \in Sx_0$ وجود دارد و $x_2 \in X$ به طوری که $fx_2 \in Tx_1$ و

$$d\left(\mathrm{g}x_1 \text{ و } fx_2\right) \le \frac{1}{\sqrt{\mathrm{r}}} \mathrm{H}(Sx_0, Tx_1). \qquad (۵)$$

از (۱) و (۵) به دست می آوریم.

$$d\left(gx_1 \text{ و } fx_2\right) \le \frac{\propto}{\sqrt{\mathrm{r}}} d(fx_0, gx_1) + \frac{\beta}{\sqrt{\mathrm{r}}} [D(fx_0, Sx_0) + D(gx_1, Tx_1)] +$$
$$\frac{\gamma}{\sqrt{\mathrm{r}}} [D(fx_0, Tx_1) + D(gx_1, Sx_0)]. \qquad (۶)$$

همچنین داریم

$$D(fx_0, Sx_0) \le d(fx_0, gx_1)\,,$$

$$D(gx_1, Tx_1) \le d(gx_1, fx_2)\,,$$

$$D(gx_1, Sx_0) = 0\,,$$

$$D(fx_0, Tx_1) \le d(fx_0, fx_2)$$
$$\le d(fx_0, gx_1) + d(gx_1, fx_2). \qquad (۷)$$

از روابط (۶) و (۷) به دست می آوریم.

$$d(\mathrm{g}x_1, fx_2) \le \frac{\propto}{\sqrt{\mathrm{r}}} \mathrm{d}(fx_0, gx_1) + \frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{r}}} [\mathrm{d}(fx_0, \mathrm{g}x) + \mathrm{d}(\mathrm{g}x_1, fx_2)]$$

$$+\frac{\gamma}{\sqrt{\mathrm{r}}}[\mathrm{d}(fx_0,\mathrm{g}x_1)+\mathrm{d}(\mathrm{g}x_1,fx_2)]$$

$$=\left(\frac{\propto}{\sqrt{\mathrm{r}}}+\frac{\beta}{\sqrt{\mathrm{r}}}+\frac{\gamma}{\sqrt{\mathrm{r}}}\right)\mathrm{d}(fx_0,\mathrm{g}x_1)+\left(\frac{\beta}{\sqrt{\mathrm{r}}}+\frac{\gamma}{\sqrt{\mathrm{r}}}\right)\mathrm{d}(\mathrm{g}x_1,fx_2).$$

بنابراین

$$\left[\sqrt{\mathrm{r}}-(\beta+\gamma)\right]\mathrm{d}(\mathrm{g}x_1,fx_2)\ \le(\propto+\beta+\gamma)\mathrm{d}(fx_0,\mathrm{g}x_1).$$

با توجه به رابطه (۳) داریم

$$d(gx_1,fx_2)\ \le\lambda\ d(fx_0,gx_1).$$

همچنین باتوجه به رابطه (۱) و لم (۲-۲-۱) و $fx_2\in Tx_1$، وجود دارد $x_3\in X$ بطوری که $gx_3\in Sx_2$ باشد و

$$d(fx_2,gx_3)\le\frac{1}{\sqrt{\mathrm{r}}}H(Sx_2,Tx_1). \tag{۸}$$

با توجه به روابط (۱) و (۸) داریم

$$d(fx_2,g\mathrm{x}_{x3})\le\frac{\propto}{\sqrt{\mathrm{r}}}d(fx_2,gx_1)+\frac{\beta}{\sqrt{\mathrm{r}}}\ [\mathrm{D}(fx_2,\mathrm{S}x_2)+\mathrm{D}(\mathrm{g}x_1,\mathrm{T}x_1)]$$

$$+\frac{\gamma}{\sqrt{\mathrm{r}}}[\mathrm{D}(fx_2,\mathrm{T}x_1)$$

$$+(\mathrm{g}x_1,\mathrm{S}x_2)]. \qquad (۹)$$

در نتیجه

$$\mathrm{D}(fx_2,\mathrm{S}x_2)\le d(fx_2,gx_3),$$

$$D(gx_1,Tx_1)\le d(gx_1,fx_2),$$

$$\mathrm{D}(fx_2,\mathrm{T}x_1)=0\,,$$

$$\mathrm{D}(\mathrm{g}x_1,\mathrm{S}x_2)\le d(fx_1,gx_3)$$

$$\le d(gx_1,fx_2)+d(fx_2,gx_3)\,. \qquad (۱۰)$$

بنابراین با توجه به روابط (۹) و (۱۰) به دست آوریم

$$d(fx_2,gx_3)\le\lambda\, d(gx_1,fx_2).$$

در ادامه این روند، ما یک دنباله $\{y_{\mathrm{n}}\}$ در X می سازیم به طوری که $y_0=\mathrm{g}\,x_1$ و به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم

$$y_{2\mathrm{n}}=\mathrm{g}\,x_{2\mathrm{n}+1}\in\mathrm{S}\,x_{2\mathrm{n}},y_{2\mathrm{n}+1}=f\,\mathrm{x}_{2\mathrm{n}+2}\in\mathrm{T}\,x_{2\mathrm{n}+1}\,, \qquad (11)$$

$$d(y_{2\mathrm{n}},y_{2\mathrm{n}+1})=d(gx_{2\mathrm{n}+1},fx_{2\mathrm{n}+2})\le\lambda\, d(gx_{2\mathrm{n}+1},fx_{2\mathrm{n}}),$$

$$d(y_{2\mathrm{n}-1},y_{2\mathrm{n}})=d(fx_{2\mathrm{n}},gx_{2\mathrm{n}+1})\le\lambda\, d(gx_{2\mathrm{n}-1},fx_{2\mathrm{n}}).$$

بنابراین داریم

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq \lambda\, d(y_{n-1}, y_n).$$

از رابطه (۱۲) با استقراء به دست می آوریم

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq \lambda^n\, d(y_0, y_1).$$

حال باید نشان دهیم که $\{y_n\}$ یک دنباله کوشی است. فرض کنید $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد. ما نیاز داریم که نشان دهیم که اینجا یک عدد صحیح مثبت $n_0 = n_0(\varepsilon)$ وجود دارد بطوری که

(۱۴) به ازای هر $n \geq n_0$ و P

$$d(y_n, y_{n+P}) < \varepsilon$$

با توجه به نا مساوی مثلثی داریم

$$d(y_n, y_{n+p}) \leq d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_{n+2}) + \cdots + d(y_{n+p-1}, y_{n+p}).$$

بنابراین با توجه به رابطه (۱۳) به دست می آوریم

$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+p}) &\leq \lambda^n\, d(y_0, y_1) + \lambda^{n+1}\, d(y_0, y_1) + \cdots + \lambda^{n+p-1}\, d(y_0, y_1) \\ &= \lambda^n\, (1 + \lambda + \cdots + \lambda^{p-1}) d(y_0, y_1) \\ &\leq \lambda^n\, (1 + \lambda + \cdots + \lambda^{p-1} + \cdots) d(y_0, y_1). \end{aligned}$$

در نتیجه

$$d(y_{\mathrm{n}}, y_{\mathrm{n+p}}) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(y_0, y_1)$$

همچنین اگر $1 > \lambda > 0$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} \lambda^n = 0$ پس وجود دارد یک $0 < n_0$ بطوری که

(۱۶) به ازای هر $n \geq \mathrm{n}_0$

$$\frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(y_0, y_1) < \varepsilon .$$

و از روابط (۱۵) و (۱۶) رابطه (۱۴) را به دست می آوریم. بنابراین ما ثابت کردیم که $\{y_{\mathrm{n}}\}$ یک دنباله کوشی است.

پس (X, d) کامل است و $\{y_{\mathrm{n}}\}$ همگرا به یک $y \in X$ است. بنابراین

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} g x_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} f x_{2n+2} = y. \qquad (۱۷)$$

همچنین

$$y_{2n} = g x_{2n+1} ; y_{2n+1} = f x_{2n+2} ;$$

و $f(X)$ و $g(X)$ بسته هستند. در این صورت $y \in f(X)$ و $y \in g(X)$ همچنین $u, w \in X$ وجود دارند بطوری که $fu = y$ و $gw = y$. بنابراین ما ثابت کردیم که

$$fu = gw \tag{۱۸}$$

از رابطه (۱) و (۱۱) به دست می آوریم

$$\begin{aligned}
D(fu, Su) &\le d(fu, fx_{2n+2}) + D(fx_{2n+2}, Su) \\
&\le d(fu, fx_{2n+2}) + H(Su, Tx_{2n+1}) \\
&\le d(fu, fx_{2n+2}) + \\
&\propto d(fu, gx_{2n+1}) + \beta[D(fu, Su) + D(gx_{2n+1}, Tx_{2n+1})] \\
&+\gamma[D(fu, Tx_{2n+1}) + D(gx_{2n+1}, Su)] \\
&\le d(fu, fx_{2n+2}) + \\
&\propto d(fu, gx_{2n+1}) + \beta[D(fu, Su) + d(gx_{2n+1}, fx_{2n+2})] \\
&+\gamma[d(fu, fx_{2n+2}) + D(gx_{2n+1}, Su)].
\end{aligned}$$

فرض کنیم در نامساوی بالا $n \to +\infty$ میل کند با استفاده از (۱۷) و (۱۸) به دست می آوریم.

$$D(fu, Su) \le (\beta, \gamma) D(fu, Su).$$

چون $\beta + \gamma < 1$ ، پس $D(fu, Su) = 0$ است، بنابراین چون Su بسته است پس

$$fu \in Su\,. \tag{۱۹}$$

بطور مشابه می توانیم ثابت کنیم که $D(gw, Tw) \le (\beta + \gamma) D(gw, Tw)$ بنابراین

$$gw \in Tw\,. \tag{۲۰}$$

حال ثابت می کنیم

$$Su = Tw. \tag{۲۱}$$

ما با استفاده از (۱) و (۱۸) و (۱۹) و (۲۰) بدست می آوریم.

$$\begin{aligned}H(Su,Tw) &\leq \propto d(fu,gw) + \beta[D(fu,Su) + D(gw,Tw)] + \gamma[D(fu,Tw) + D(gw,Su)]\\ &= \propto .0 + \beta[0 + 0] + \gamma[\mathrm{D(gw,Tw)} + D(fu,Su)]\\ &= 0.\end{aligned}$$

پس $\mathrm{Su} = \mathrm{Tw}$. بنابراین با (۱۸) و (۱۹) و (۲۰) و (۲۱) داریم

$$f\mathrm{u} \in \mathrm{Su}\,,\ \mathrm{gw} \in \mathrm{Tw}\,,\ f\mathrm{u} = \mathrm{gw}\ \text{و}\ \mathrm{Su} = \mathrm{Tw}. \ \square \tag{۲۲}$$

مثال ۲-۲-۳: فرض کنید $X = [0\,,\infty[$ فضای اقلیدسی با متریک معمولی باشد. S و T و f و g را در X به شرح زیر تعریف می کنیم.

$$Sx = x^2 + \frac{7}{64}\ \text{و}\ \mathrm{T}x = x^3 + \frac{7}{64}\ \text{و}\ fx = 8x^2\ \text{و}\ gx = 8x^3$$

در این صورت

$d(Sx,Ty) = |x^2 - y^3| \leq \frac{8|x^2-y^3|}{4} = \frac{d(fx,gy)}{4}$

بنا به رابطه (۱) برای هر $x,y \in X$. همچنین فرضیه های دیگر، (۱) و (۲). برقرار هستند یعنی می بینید که $\frac{1}{8} = f\left(\frac{1}{8}\right) = S(\frac{1}{8})$ و $\frac{1}{8} = g\left(\frac{1}{4}\right) = T(\frac{1}{4})$.

بنابراین S و f در نقطه $u = \frac{1}{8}$ ، T و g در نقطه $w = \frac{1}{4}$ و در نقطه $S\left(\frac{1}{8}\right) = T\left(\frac{1}{4}\right)$ حالت تصادفی دارند.

اگر در قضیه(۲-۲-۲)، $f = g$ باشد آنگاه ما نتیجه تصادفی زیر را به دست می آوریم.

قضیه ۲-۲-۴: فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل و $T,S: X \to CB(X)$ نگاشت های چند مقداری و $f: X \to X$ یک نگاشت تک مقداری برای هر $x,y \in X$ باشد که در شرط زیر صدق کند.

$$H(Sx,Ty) \leq \propto d(fx,fy) + \beta[D(fx,Sx) + D(fy,Ty)\,] + \gamma[D(f(x,Ty) + D(fy,Sx)\,)\,], \qquad (۲۳)$$

جایی که $\propto,\beta,\gamma \geq 0$ و $0 < \propto + 2\,\beta + 2\,\gamma < 1$ باشد.

و fX یک زیر مجموعه بسته از X ، $TX \cup SX \subseteq fX$ باشد، در این صورت S , T , f یک حالت تصادفی در X دارند. علاوه بر این اگر T , f هر دو ضعیف جابجایی باشند و S ضعیف جابجایی در هر $z \in C(f,T)$ و $ffz = fz$ باشد، آنگاه S , T , f یک نقطه ثابت مشترک در x دارند.

اثبات: اگر در قضیه (۲-۲-۲) $f = g$ باشد به دست می آوریم که در اینجا نقاط u و w در X وجود دارند بطوری که $f\mathrm{u} \in \mathrm{Su}$, $f\mathrm{w} \in \mathrm{Tw}$, $fu = fw$, $su = Tw$.

همچنین $u \in C(f,T)$ است و f،T ضعیف جابجایی در u و $ffu = fu$ است. مجموعه $v = fu$.
آنگاه داریم $fv = v$ و $v = ffu \in T(fv) = Tv$.

حال همچنین $u \in C(f,S)$ است آنگاه f هست S ـ ضعیف جابجایی در u و همچنین بدست می آوریم

$$v = fv = ffu \in S(fu) = Sv.$$

بنابراین ما ثابت کردیم $\mathrm{v} = \mathrm{fv} \in \mathrm{Tv} \cap \mathrm{Sv}$ یعنی v یک نقطه مشترک ثابت از f , T و S است. □

در قضیه (۲-۲-۲) اگر $f = g = I_x$ باشد آنگاه در زیر نتیجه نقطه ثابت مشترک را به دست

می آوریم.

(I_x نگاشت همانی در X است.)

نتیجه ۲-۲-۵: فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل و $S: X \to CB(X)$ و T نگاشت های چند مقداری برای هر $x,y \in X$ باشند که در شرط زیر صدق کند.

$$H(Sx,Ty) \leq \propto d(x,y) + \beta[D(x,Sx) + D(y,Ty)]$$

$$+\gamma[D(x,Ty)+\ D(y,Sx)],$$

جایی که $\propto,\beta,\gamma \geq 0$ و $0 <\propto +2\,\beta+2\,\gamma<1$ باشد. در این صورت یک نقطه z در X وجود دارد بطوری که $\mathrm{z} \in \mathrm{Sz}\cap\mathrm{Tz}$ و $\mathrm{Sz}=\mathrm{Tz}$ باشد.

نکته ۲-۲-۶: اگر در نتیجه (۲-۲-۵)، $\mathrm{S}=\mathrm{T}$ باشد. آنگاه قضیه (۲-۲-۲) از جردیجیا[1]را به دست می آوریم.

نکته ۲-۲-۷: اگر در قضیه (۲-۲-۲)،

(۱) $\beta=\gamma=0$ و $S=T$؛ $f=\mathrm{g}=\mathrm{I_x}$ باشد آنگاه قضیه نادلر را به دست می آوریم

(۲) اگر $\mathrm{S}=\mathrm{T}$ و $f=\mathrm{g}=\mathrm{I_x}$ آنگاه ما نتایجی از رایش[2]را به دست می آویم.

اگر T و S در نتیجه (2-۲-۵) نگاشت های تک مقداری باشند آنگاه ما نتایج زیر را به دست می آوریم.

نتیجه ۲-۲-۸: فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل و $T\,,S\colon X\to X$ نگاشت های تک مقداری به ازای هر $x,y\in X$ باشند که در شرایط زیر صدق کنند.

---

1 . Gordji

۱. Reich

$$d(Sx,Ty) \leq \propto d(x,y) + \beta[d(x,Sx) + d(y,Ty)] + \gamma[d(x,Ty) + d(y,Sx)],$$

جایی که در آن $0 \geq \propto, \beta, \gamma$ و $0 < \propto +2\,\beta + 2\,\gamma < 1$. در این صورت S و T یک نقطه ثابت مشترک در X دارند. یعنی وجود دارد $\mathrm{z} \in \mathrm{X}$ بطوری که $\mathrm{z} = \mathrm{Sz} = \mathrm{Tz}$ باشد. □