بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور

گروه ریاضی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی

کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان

یک روش چندجملهای برای تصحیح طیفی مسائل اشتورم- لیوویل

استاد راهنما:

دکتر حسین خیری

پژوهشگر:

رامله قاسمخانی

شهریور ماه ۱۳۸۶

دانشگاه پیام نور
گروه ریاضی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی
کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان

یک روش چندجمله‌ای برای تصحیح طیفی مسائل اشتورم- لیوویل

استاد راهنما:

دکتر حسین خیری

استاد مشاور:

دکتر مهدی صحت خواه

پژوهشگر:

رامله قاسم‌خانی

شهریور ماه ۱۳۸۶

بسم الله الرحمن الرحیم

ستایش خداوندی را سزاست، که به قدرت والا و برتر، و با عطا و بخشش نعمتها به پدیده‌ها نزدیک است. اوست بخشنده تمام نعمت ها. و دفع کننده تمام بلاها و گرفتاری ها. او را می‌ستایم در برابر مهربانی ها و نعمت های فراگیرش. به او ایمان می آورم چون مبدا هستی و آغاز کننده خلقت آشکار است. از او هدایت می‌طلبم چون راهنمای نزدیک است و از او یاری می‌طلبم که توانا و پیروز است. و به او توکل می‌کنم چون تنها یاور و کفایت کننده است. و گواهی میدهم که محمد(ص) بنده و فرستاده اوست. او را فرستاده تا فرمان هایش را اجرا کند و بر مردم حجّت را تمام کرده، آنها را در برابر اعمال ناروا بترساند.
خدایا! تویی سزاوار ستایش‌های نیکو، و بسیار و بی‌شمار تو را ستودن، اگر تو را آرزو کنند پس بهترین آرزویی، و اگر به تو امید بندند، بهترین امیدی.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

تقدیم به:

پدر فداکار و مادر مهربانم

و

برادران عزیزم

بنام خدا

«من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق»

سپاس بیکران و پاک تر از شبنم فرونشسته بر رخسار گلبرگ های بهاری و ستایشی برخاسته از عمق دل و جان به پیشگاه خداوندگار، خداوندگاری که ستایشش زیور زبان است و سپاسگزاریش آرام بخش جان.

در آغاز بر خود لازم می‌دانم از زحمات بیدریغ استاد ارجمندم جناب آقای دکتر حسین خیری که همواره و در همه حال در نهایت صبر و شکیبایی به یاریم شتافته‌اند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که بدون تردید تهیه و تدوین این پایاننامه جز با کمکها و راهنمایی های ایشان میسّر نمی‌شد.

از جناب آقای دکتر حجّتی که زحمت داوری این پایاننامه را قبول فرمودند، بسیار تشکر می‌کنم.

از جناب آقای دکتر صحت خواه در سمت استاد مشاور، بسیار تشکر می‌نمایم.

همچنین از زحمات اساتید مجرّب دانشگاه تبریز و کارکنان محترم دانشگاه پیام نور بویژه خانم سیّار و تمامی دوستان و عزیزانی که مرا در تهیه این پایاننامه یاری نموده‌اند، صمیمانه تشکر می‌کنم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در راه کسب علم و دانش همواره یاریگر و مشوق من بوده و با قبول تمام مشکلات بر خود راه تحصیل مرا هموار نموده‌اند، صمیمانه سپاسگزاری می‌نمایم.

رامله قاسم‌خانی

شهریور ماه ۱۳۸۶

نام خانوادگی دانشجو: قاسم‌خانی نام : رامله

عنوان: یک روش چندجمله‌ای برای تصحیح طیفی مسائل اشتورم- لیوویل

استاد راهنما: دکتر حسین خیری

استاد مشاور: دکتر مهدی صحت‌خواه

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه پیام نور مرکز تبریز تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ماه ۱۳۸۶ تعداد صفحه: ٦٤

کلید واژه‌ها: مسأله اشتورم- لیوویل، روش پرتابی برای محاسبه مقادیر ویژه، مسائل شامل مقادیر ویژه گویا، اصلاح مقادیر ویژه

چکیده:

در این پایاننامه به معرفی یک روش چندجمله‌ای برای اصلاح مقادیر ویژه و تخمین خطاهای طیفی در مسائل اشتورم- لیوویل می‌پردازیم. در روش اصلاحی فوق با محاسبه ریشه‌های یک چندجمله‌ای خاص و تخمین خطا، مقادیر ویژه تقریبی بدست آمده از روشهای عددی بویژه روش پرتابی، اصلاح شده و مقادیر ویژه جدید که از دقت نسبتاً بالایی برخوردارند، حاصل می‌شوند. روش پیشنهاد شده علاوه بر مسائل منظم و نامنظم، بر آن دسته از مسائل که شامل مقادیر ویژه گویا هستند، نیز موثر می‌باشد. همچنین در مواردی که وجود نقطه منفرد باعث کاهش پایداری انتگرالگیری عددی می‌شود، اجرای این روش اصلاحی می‌تواند بسیار مفید باشد. مثالهای عددی بطور آشکار نتایج فوق را تایید می‌کنند.

فهرست مطالب

مقدمه

اغلب مسائل طبیعی منجر به حل معادلات دیفرانسیل می‌شوند. رده وسیعی از این معادلات به صورت معادله مرتبه دوم و یا قابل تقریب بوسیله آن هستند. بطوریکه پیشرفت عظیم علم فیزیک را در دو قرن اخیر، باید مدیون نظریه معادلات دانست. هر گاه معادله دیفرانسیل دارای شرایط مناسب باشد، می‌توان آن را با تبدیلاتی بصورت معادله اشتورم — لیوویل نوشت که بعضی از مسائل مهم فیزیک و مکانیک و علوم دیگر قابل بیان با آن هستند. برای مثال معادله موج یک معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی از مرتبه دوم می‌باشد که با استفاده از روش جداسازی متغیرها، می‌توان آن را به صورت یک معادله از نوع اشتورم — لیوویل نوشت. همچنین معادله شرودینگر، معادله دیفرانسیل لاگرانژ و معادله دیفرانسیل بسل و بسیاری از معادلات دیگر که در کارهای عملی و فیزیکی بدست می‌آیند، قابل بیان با معادله اشتورم — لیوویل هستند. لذا با مطالعه معادله اشتورم — لیوویل می‌توان خواص طیف وسیعی از مسائل را بررسی نمود که این مطلب یکی از مزایای این معادله است. مساله اشتورم — لیوویل از دیر باز مورد توجه محققین بوده و تا بحال صدها مطلب و مقاله در این زمینه نوشته شده است، بطوریکه نظریه عمومی مقادیر ویژه و بسط بر حسب توابع ویژه، یکی از عمیقترین بخشهای ریاضیات نوین است.

فرض کنید معادله اشتورم — لیوویل

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

داده شده باشد. هدف از حل این معادله بدست آوردن λ بعنوان پارامتر طیفی یا مقدار ویژه می‌باشد به شرط آنکه تابع پتانسیل $q(x)$ مشخص و معلوم باشد. مثلاً در مساله فیزیکی ارتعاش نخ، λها نشان دهنده فرکانس می‌باشند. سرچشمه این مطالعات از آنجاست که دانیل برنولی و لئونارداویلر جواب معادله‌ای که ارتعاشات تاری را تعریف می‌کرد، مورد مطالعه قرار دادند. در سال ۱۸۷۷ لوردریلای مساله‌ای را مطرح کرد مبنی بر اینکه آیا امکان دارد تابع توزیع چگالی تار مرتعش را از فرکانسهای ویژه ارتعاش بدست آورد؟ که این اولین سرچشمه مساله عکس اشتورم — لیوویل است که در آن هدف پیدا کردن یک تابع پتانسیل یکتا $q(x)$، با معلوم بودن مقادیر ویژه است. البته اکثر کارهای عددی انجام شده روی مساله اشتورم — لیوویل مربوط به مساله مستقیم و بدست آوردن مقادیر و توابع ویژه می‌باشد.

مساله تقریب مقادیر ویژه برای دستگاههای دیفرانسیل و مسائل اشتورم — لیوویل و تخمین خطا در تقریب ها همواره بطور گسترده مورد بحث قرار گرفته است. برای محاسبه مقادیر ویژه معادلات اشتورم — لیوویل کلاسیک روشهای متعددی وجود دارد. از جمله این روشها می‌توان

روش تفاضل متناهی و روش نیومرو[1] را نام برد. اما این روش ها با توجه به ساختاری که دارند فقط برای اندیسهای پایین جواب قابل قبول ارائه می‌دهند. لذا جهت محاسبه دقیق تر مقادیر ویژه با اندیس بالا نیاز است که از روشهای بروز دیگری استفاده شود. در این پایان نامه سعی بر این است که روشی بیان شود که علاوه بر اصلاح طیفی و تخمین خطا در SLP های منظم و نامنظم، برای مقادیر ویژه با اندیس بالا و نیز برای مقادیر ویژه گویا[2] هم کاربرد داشته باشد.

این پایان نامه مشتمل بر سه فصل می‌باشد. در فصل اول اهم مطالبی که در فصل های آتی مورد نیاز خواهند بود، جمع آوری شده است. خواننده محترم می‌تواند با مروری سریع، مطالب این فصل را به ذهن بسپارد و در صورت لزوم به آنها مراجعه نماید. در فصل دوم پس از معرفی مساله اشتورم — لیوویل، چند روش برای حل این مساله، از جمله روش پروفر[3] که از رده روشهای پرتابی [4] می‌باشد، بیان شده‌اند. فصل سوم که در حقیقت زیربنای کار ماست، شامل چهار بخش است. در بخش اول به بیان چند تعریف و مفاهیم اساسی پرداخته شده و در بخش دوم روشی برای اصلاح مقادیر ویژه در مسائل اشتورم — لیوویل منظم، بصورت یک قضیه آورده شده است. در بخش سوم قضیه‌ای در مورد همگرایی روش مقدار مرزی بیان و ثابت شده است. در نهایت در بخش چهارم، روشی برای اصلاح طیفی و تخمین خطا برای مقادیر ویژه گویا بیان شده و نتایج بدست آمده در چند مثال عددی نشان داده شده‌اند.

---

[1] Numerov
[2] λ-rational
[3] Prufer
[4] shooting methods

فصل ۱

پیشینهٔ پژوهش و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعاریف، اصطلاحات و مفاهیمی که در فصل های بعد دانستن آنها ضروری است بیان می‌گردد.

تعریف ۱.۱.۱ ماتریس مربعی A از مرتبه n را قطری گویند هرگاه عناصر غیر قطری آن صفر باشند. اگر D یک ماتریس قطری با عناصر قطری $d_1, ..., d_n$ باشد بطور خلاصه D را بصورت $D = diag(d_1, ..., d_n)$ نیز نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ و λ یک اسکالر باشد. اگر معادله $Ax = \lambda x$ دارای یک جواب غیر بدیهی x باشد، در این صورت λ یک مقدار ویژه A است. بردار $x \neq 0$ را بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ نامند.

تعریف ۳.۱.۱ اگر A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $p \times q$ باشند حاصلضرب کرونکر[1] A و B را با نماد $A \otimes B$ نشان داده و بصورت:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

تعریف می‌کنند. ماتریس فوق یک ماتریس حاصلضرب کرونکر راست می‌باشد. بطور واضح تر می‌توان آن را بصورت زیر نوشت.

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \dots & a_{11}b_{1q} & \dots & \dots & a_{1n}b_{11} & \dots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \dots & a_{11}b_{2q} & \dots & \dots & a_{1n}b_{21} & \dots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \dots & a_{11}b_{pq} & \dots & \dots & a_{1n}b_{p1} & \dots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \dots & a_{m1}b_{1q} & \dots & \dots & a_{mn}b_{11} & \dots & a_{mn}b_{1q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \dots & a_{m1}b_{pq} & \dots & \dots & a_{mn}b_{p1} & \dots & a_{mn}b_{pq} \end{pmatrix}$$

[1] Kronecker product

تعریف ۴.۱.۱ گوییم $f(h) = O(h^p)$، اگر عددی مانند K مستقل از h وجود داشته باشد بطوریکه

$$|f| \leq K|h|^p.$$

تعریف ۵.۱.۱ $C^n[a,b]$ مجموعه تمام توابع f را نمایش می‌دهد که برای آنها مشتق n ام، $f^{(n)}$ وجود داشته و در بازه $[a,b]$ پیوسته می‌باشد.

قضیه ۱.۱.۱ (قضیه تیلر). فرض کنیم $f \in C^n[a,b]$ و $f^{(n+1)}$ بر $[a,b]$ موجود باشد. همچنین، $x_\circ \in [a,b]$. در اینصورت، به ازای هر $x \in [a,b]$، نقطه‌ای مانند $\xi(x) \in (a,b)$ وجود دارد بطوریکه

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

که در آن

$$P_n(x) = f(x_\circ) + f'(x_\circ)(x - x_\circ) + \frac{f''(x_\circ)}{۲!}(x - x_\circ)^۲ + ... + \frac{f^{(n)}(x_\circ)}{n!}(x - x_\circ)^n$$

$$= \sum_{k=\circ}^{n} \frac{f^{(k)}(x_\circ)}{k!}(x - x_\circ)^k,$$

و

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+۱)}(\xi(x))}{(n+۱)!}\,(x - x_\circ)^{n+۱}$$

در اینجا $P_n(x)$ چندجمله‌ای تیلر درجه n ام f حول نقطه $x_\circ$ و $R_n(x)$ جمله باقیمانده (یا خطای برشی) وابسته به $P_n(x)$ نامیده می‌شود.

اثبات. (ر. ک. [۲۱]). □

قضیه ۲.۱.۱ (قضیه شوارتز[۲]). اگر f تابعی پیوسته و مشتق پذیر بر حسب x و y باشد، آنگاه رابطه زیر برقرار است.

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$$

[۲] Schwarz theorem

۲.۱ روشهای چندگامی خطی و خطای برشی موضعی

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید

$$D = \{(x, y)|x \in R, y \in R^n\}$$

یک ناحیه باز و همبند باشد. تابع $f(x, y)$ در D نسبت به مولفه دوم در شرط لیپ شیتس صدق می‌کند هرگاه

$$\forall (x, y_۱), (x, y_۲) \in D : ||f(x, y_۱) - f(x, y_۲)|| \leq M||y_۱ - y_۲||$$

که در آن M یک عدد حقیقی مثبت می‌باشد.

فرض کنید $f(x, y) \in C(D)$ ، $(x_\circ, y_\circ) \in D$ و

$$S = \{(x, y) : |x - x_\circ| \leq a, ||y - y_\circ|| \leq b\} \subseteq D$$

که در آن $C(D)$ نمادی برای توابع پیوسته روی ناحیه D می‌باشد.

قضیه ۱.۲.۱ (قضیه وجود و منحصر بفردی). اگر $f(x, y) \in C(D)$ و در شرط لیپ شیتس نسبت به مولفه دوم روی ناحیه D صدق کند و $(x_\circ, y_\circ) \in D$ آنگاه مسألهٔ مقدار اولیه

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_\circ) = y_\circ \end{cases}$$

روی بازه $|x - x_\circ| \leq h$ دارای جواب منحصر بفرد است. که در آن h طبق

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\} \quad M = \max_{(x,y)\in S} ||f(x, y)||.$$

تعریف می‌شود.

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول، بصورت $y' = f(x, y)$ می‌باشد. حال اگر مقدار y را در یک نقطه داده باشند، معادله به مساله مقدار اولیه

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = \eta, \tag{۱.۱}$$

تبدیل می شود که هدف یافتن جواب مساله، به ازای $x \in [a,b]$، می‌باشد که در آن a و b متناهی هستند. فرض کنید تابع f در شرایط مطرح شده در قضیه ۱.۲.۱ صدق کند که این قضیه، وجود یک جواب منحصر بفرد و مشتق پذیر و پیوسته را برای مساله مقدار اولیه تضمین می‌کند که آن را با $y(x)$ نمایش می‌دهیم. هرگاه بازه $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم و قرار دهیم $h = \frac{b-a}{n}$، در اینصورت دنباله‌ای از نقاط بصورت $\{x_n\}$ بدست می آیند که $x_n = a + nh$، $n = ۰, ۱, \dots$ و پارامتر h طول گام را مشخص می‌کند. فرض کنیم y_n تقریبی از جواب دقیق $y(x_n)$ باشد و قرار می‌دهیم $f_n = f(x_n, y_n)$. روشی که برای محاسبه دنباله $\{y_n\}$ بکار برده می‌شود از یک رابطه خطی بین مقادیر y_{n+j} و f_{n+j} که $j = ۰, \dots, k$، استفاده می‌نماید که به این روش، روش k گامی خطی گویند. صورت کلی روشهای k گامی خطی بصورت زیر است.

$$\sum_{j=۰}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=۰}^{k} \beta_j f_{n+j} \qquad (۲.۱)$$

که در آن α_j و β_j، $j = ۰, \dots, k$ مقادیر ثابت هستند.

عملگر تفاضلی خطی مربوط به روش (۲.۱) را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\pounds[y(x), h] = \sum_{j=۰}^{k} \Big[\alpha_j \; y(x+jh) - h \; \beta_j \; y'(x+jh)\Big] \qquad (۳.۱)$$

که $y(x)$ یک تابع پیوسته و مشتق پذیر در $[a,b]$ می‌باشد. یک روش برای استخراج روشهای چند گامی خطی استفاده از سریهای تیلر می‌باشد. بسط تیلر جملات فرمول (۳.۱) را می‌نویسیم که پس از ساده کردن فرمول زیر بدست می آید.

$$\pounds[y(x), h] = C_۰ y(x) + C_۱ h y^{(۱)}(x) + \dots + C_q h^q y^{(q)}(x) + \dots$$

که در آن C_q ها ثابت می‌باشند و بر حسب جملاتی از α_j و β_j ها بصورت زیر بدست می آیند.

$$\begin{aligned}
C_۰ &= \alpha_۰ + \alpha_۱ + \dots + \alpha_k, \\
C_۱ &= \alpha_۱ + ۲\alpha_۲ + \dots + k\alpha_k - (\beta_۰ + \beta_۱ + \dots + \beta_k), \\
&\vdots \\
C_q &= \tfrac{۱}{q!}(\alpha_۱ + ۲^q \alpha_۲ + \dots + k^q \alpha_k) - \tfrac{۱}{(q-۱)!}(\beta_۱ + ۲^{q-۱}\beta_۲ + \dots + k^{q-۱}\beta_k), \; q = ۲, \dots
\end{aligned} \qquad (۴.۱)$$

تعریف ۲.۲.۱ عملگر تفاضلی (۳.۱) و روش چندگامی خطی مربوطه (۲.۱) را از مرتبه p گویند هر گاه در (۴.۱) داشته باشیم:

$$C_۰ = C_۱ = \dots = C_p = ۰, \qquad C_{p+۱} \neq ۰.$$

که در آن C_{p+1} ثابت خطا نامیده می‌شود و خطای روش از مرتبه $p+1$ می‌باشد.

تعریف ۳.۲.۱ خطای برشی موضعی روش (۲.۱) در نقطه x_{n+k} بصورت $\pounds[y(x_n),h]$ می‌باشد که در (۳.۱) داده شده است که در آن $y(x)$ جواب تئوری مساله مقدار اولیه (۱.۱) می‌باشد.

خطای برشی موضعی در نقطه x_{n+k} را با τ_{n+k} نشان می‌دهیم که همان $\pounds[y(x_n),h]$ می‌باشد. اگر $y(x_{n+k})$ جواب دقیق و y_{n+k} جواب تقریبی مساله (۱.۱) در نقطه x_{n+k} باشد که از روشهای چند گامی بدست آمده است، در اینصورت می‌توان خطای برشی موضعی در نقطه x_{n+k} را بصورت زیر بدست آورد.

$$\tau_{n+k}=y(x_{n+k})-y_{n+k}=C_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n)+O(h^{p+2})$$

که در آن p مرتبه روش و C_{p+1} ثابت خطا می‌باشند.

از جمله روشهای چندگامی می‌توان به روش اویلر اشاره نمود که یکی از ساده ترین روشهای حل عددی مسائل مقدار اولیه و یک روش تک گامی صریح می‌باشد. برای حل مساله مقدار اولیه (۱.۱) به روش اویلر مقادیر تقریبی y_n، $(n=0,1,\dots)$ از رابطه زیر بدست می آیند.

$$y_{n+1}-y_n=hf_n$$

که در آن مقدار خطای برشی $\frac{1}{2}h^2y^{(2)}(x_n)$ است. روش ذوزنقه‌ای نیز یک روش تک گامی ضمنی می‌باشد که در آن مقادیر تقریبی y_n، $(n=0,1,\dots)$ از رابطه زیر بدست می آیند.

$$y_{n+1}-y_n=\frac{h}{2}(f_{n+1}+f_n)$$

و مقدار خطای برشی $\frac{1}{12}h^3y^{(3)}(x_n)$ می‌باشد.

۳.۱ تفاضلات متناهی

مشتقات معمولی و مشتقات جزئی را می‌توان بوسیله تفاضلات متناهی بطرق مختلف تقریب کرد. کلیه این روشهای تقریبی دارای خطای برشی می‌باشند و مقدار این خطا بستگی به دقت تقریب

دارد. اگر تابع y و مشتقات آن، توابع پیوسته و متناهی از x باشند در اینصورت با استفاده از قضیه تیلر داریم:

$$y(x) = y(x_i) + (x - x_i)y^{(1)}(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2!}y^{(2)}(x_i) + \frac{(x - x_i)^3}{3!}y^{(3)}(x_i) + \ldots$$

مقدار $y^{(m)}(x_i)$ را با $y_i^{(m)}$ نشان می‌دهیم. در رابطه فوق به ازای $x = x_{i+1}, x_{i-1}$ و $h = x - x_i$ داریم:

$$y_{i+1} = y_i + hy_i^{(1)} + \frac{h^2}{2!}y_i^{(2)} + \frac{h^3}{3!}y_i^{(3)} + \ldots$$

$$y_{i-1} = y_i - hy_i^{(1)} + \frac{h^2}{2!}y_i^{(2)} - \frac{h^3}{3!}y_i^{(3)} + \ldots$$

با استفاده از بسط های فوق تقریبهای زیر برای مشتقات بدست می آیند.

$$y_i^{(1)} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2),$$

$$y_i^{(2)} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2).$$

۴.۱ مساله مقدار مرزی

اکثر مسائل فیزیکی که به جای وابسته زمانی بودن وابسته مکانی هستند، غالباً بر حسب معادلات دیفرانسیل با شرایط اعمال شده در بیش از یک نقطه بیان می‌شوند. مساله مقدار مرزی دو نقطه‌ای در حالت کلی، شامل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به شکل

$$u'' = f(x, u, u'), \qquad a \leq x \leq b, \tag{۵.۱}$$

همراه با شرایط مرزی

$$u(a) = \alpha, \qquad u(b) = \beta. \tag{۶.۱}$$

می‌باشد. اکثر مطالب مربوط به مسائل مقدار مرزی مرتبه دوم را می‌توان به مسائل با شرایط مرزی به شکل:

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \alpha, \qquad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \beta,$$

که در آن $|\alpha_1|+|\alpha_2| \neq 0$ و $|\beta_1|+|\beta_2| \neq 0$، توسعه داد.

قضیه زیر شرایطی که تحت آن مساله مقدار مرزی دارای جواب منحصر بفرد باشد، را بیان می‌کند.

قضیه ۱.۴.۱ فرض کنید تابع f در مساله مقدار مرزی:

$$u'' = f(x,u,u'), \quad a \leq x \leq b, \quad u(a)=\alpha, u(b)=\beta, \tag{۷.۱}$$

بر مجموعه

$$D = \left\{(x,u,u') : a \leq x \leq b, \quad -\infty < u < +\infty, \quad -\infty < u' < +\infty\right\}$$

پیوسته بوده و $\frac{\partial f}{\partial u}$ و $\frac{\partial f}{\partial u'}$ بر D پیوسته باشند. هر گاه:

۱) به‌ازای هر $(x,u,u') \in D$، $\frac{\partial f}{\partial u}(x,u,u') > 0$؛

۲) یک ثابت M وجود داشته باشد که به ازای هر $(x,u,u') \in D$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u'}(x,u,u')\right| \leq M$$

آنگاه مساله مقدار مرزی (۷.۱) جواب منحصر بفرد دارد.

تعریف ۱.۴.۱ هر گاه در (۵.۱)، $f(x,u,u')$ را بتوان به شکل

$$f(x,u,u') = p(x)u' + q(x)u + r(x)$$

بیان کرد، آنگاه معادله دیفرانسیل $u'' = f(x,u,u')$ خطی نامیده می‌شود.

نتیجه ۲.۴.۱ اگرمساله مقدار مرزی

$$u'' = p(x)u' + q(x)u + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad u(a)=\alpha, u(b)=\beta, \tag{۸.۱}$$

در شرایط زیر صدق کند:

(آ) $p(x)$، $q(x)$ و $r(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته باشند؛

(ب) $q(x) > 0$ بر $[a,b]$؛

آنگاه مساله فوق دارای جواب منحصر بفرد است.

۵.۱ روش پرتابی

برای اینکه جواب منحصر بفردی که توسط برقراری مفروضات نتیجه ۱.۴.۲ تضمین شده است را به روش پرتابی تقریب کنیم ابتدا مسائل مقدار اولیه

$$u'' = p(x)u' + q(x)u + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad u(a) = \alpha, u'(a) = 0 \qquad (۹.۱)$$

و

$$u'' = p(x)u' + q(x)u, \quad a \leq x \leq b, \quad u(a) = 0, u'(a) = 1 \qquad (۱۰.۱)$$

را در نظر می گیریم .

اگر $u_1(x)$ جواب (۹.۱) و $u_2(x)$ جواب (۱۰.۱) باشد واضح است که

$$u(x) = u_1(x) + \frac{\beta - u_1(x)}{u_2(b)} u_2(x) \qquad (۱۱.۱)$$

جواب منحصر بفرد مساله مقدار مرزی ماست، البته بشرطی که $u_2(b) \neq 0$. اینکه $u_2(b) = 0$ مغایر مفروضات نتیجه ۱.۴.۲ است.

روش پرتابی برای معادلات خطی بر جایگزینی مساله مقدار مرزی به وسیله دو مساله مقدار اولیه (۹.۱) و (۱۰.۱) استوار است.

روشهای زیادی برای تقریب جوابهای $u_1(x)$ و $u_2(x)$ موجودند، و زمانی که این تقریبها در دسترس باشند، جواب مساله مقدار مرزی را می‌توان با استفاده از (۱۱.۱) تقریب کرد.

ایده استفاده از تکنیک پرتابی برای مساله مقدار مرزی مرتبه دوم غیر خطی

$$u'' = f(x, u, u'), \quad a \leq x \leq b, \quad u(a) = \alpha, u(b) = \beta, \qquad (۱۲.۱)$$

مشابه حالت خطی است، جز آنکه جواب یک مساله غیر خطی را نمی توان به سادگی بصورت یک ترکیب خطی از جوابهای دو مساله مقدار اولیه بیان کرد. در عوض نیاز داریم که از جوابهای دنباله‌ای از مسائل مقدار اولیه

$$u'' = f(x, u, u'), \quad a \leq x \leq b, \quad u(a) = \alpha, u'(a) = t_k, \qquad (۱۳.۱)$$

که شامل پارامتر t_k است استفاده کرده و جواب مساله مقدار مرزی راتقریب زد. یعنی به جای شرط مرزی دوم $u(b) = \beta$ شرط جدید $u'(a) = t_k$ را قرار می‌دهیم و با انتخاب پارامترهای t_k