دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

یک قضیه باناخ – آلااغلو از دیدگاه نظریه قلمرو

استاد راهنما

دکتر اصغر رنجبری

استاد مشاور

دکتر محمدرضا جبارزاده

پژوهشگر

آناهیتا علی‌بالازاده

۱۳۸۹

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

که هر آنچه آموخته‌ام به یاری آنان است

سپاسگزاری...

وقتی جاده‌ای که در آن حرکت می‌کنی خیلی دشوار به نظر می‌رسد، فقط به یاد بیاور که خدا از تو محافظت می‌کند و مراقب توست. هر آنچه که می‌توانی انجام بده، با هر آنچه در اختیار داری. عشق او همواره با توست او دستهایش را برای کمک به تو دراز می‌کند زیرا او دوست توست. سپاس خداوند بزرگ را که اراده تلاش در راه علم و دانش را به من عطا فرمود.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ و راهنمایی‌های ارزشمند استاد راهنمای گرانقدرم، جناب آقای دکتر اصغر رنجبری، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر محمدرضا جبارزاده که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این پایاننامه را تقبل فرمودند و همچنین از داور محترم جناب آقای دکتر حمید واعظی به خاطر زحمات و دقتی که در بازخوانی و تکمیل این پایاننامه داشته‌اند کمال تشکر را دارم.

در پایان عمیق‌ترین سپاس‌ها و صمیمانه‌ترین تشکرات قلبی خود را تقدیم به پدر و مادر عزیزم که در تمام مراحل تحصیل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، می‌نمایم.

آناهیتا علی‌بالازاده
۱۳۸۹

نام خانوادگی دانشجو: علی‌بالازاده   نام: آناهیتا
عنوان: یک قضیه باناخ – آلااغلو از دیدگاه نظریه قلمرو
استاد راهنما : دکتر اصغر رنجبری استاد مشاور : دکتر محمدرضا جبارزاده
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی محض   گرایش: آنالیز ریاضی   دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی   تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۸۹   تعداد صفحات: ۱۰۰
کلید واژه‌ها: مخروط جهت‌دار، ترتیب تخصیص، قلمرو توانی احتمالی توسعه یافته، رابطه مسیر–پایین، تابع نیمه پیوسته پائینی، توپولوژی لاوسون–ضعیف*، توپولوژی پائینی–ضعیف*، توپولوژی بالایی–ضعیف*، مجموعه قطبی، تابعی مینکوفسکی .

چکیده

این پایاننامه بر اساس مقاله

G. Plotkin, A domain–theoretic Banach–Alaoglu theorem, Math. Struct. in Comp. Science (2006), vol. 16. pp. 299–311.

تنظیم شده است و در آن یک قضیه باناخ–آلااغلو از دیدگاه نظریه قلمرو، مشابه قضیه باناخ–آلااغلوی کلاسیک فضاهای برداری توپولوژیکی ارائه می‌دهیم. فضای دوگان مخروط جهت‌دار پیوسته C، یعنی C^* را در نظر گرفته و نشان می‌دهیم که توپولوژی بالایی–ضعیف* روی C^* فشرده پایدار است. قضیه‌های متعددی فشردگی پایدار فضاهای ارزیابی‌ها روی یک فضای توپولوژیکی را نشان می‌دهند. در این پایاننامه ما شرط فشردگی پایدار را به فشردگی پایدار موضعی تضعیف می‌کنیم. همچنین برای توپولوژی بالایی–ضعیف* و دوگان آن فرمول‌بندی‌های تازه‌ای بر حسب مجموعه‌های قطبی و تابعی‌های مینکوفسکی ارائه می‌دهیم و به ویژه نشان می‌دهیم که مجموعه ساندویچ تابعی‌های خطی، فشرده است.

فهرست مطالب

مقدمه

یکی از مباحث مورد علاقه کلاوس کایمل [۱] برقراری یک ارتباط متقابل بین نظریه ترتیب و آنالیز تابعی است که در سال‌های اخیر منجر به شروع آنالیز تابعی از دیدگاه نظریه قلمرو شده است. در اوایل دهه ۸۰، کایمل به کار بوبوک[۲]، باکور [۳] و کورنیا [۴] که در این زمینه مطالعه می‌کردند علاقه‌مند شد. یک از دانشجویان او، متسیاس راوخ[۵] کار آنها را از نقطه‌نظر نظریه قلمرو مورد بررسی قرار داد. بعدها در اواخر دهه ۸۰، کایمل همراه با والتر روث [۶]، روی مخروط‌های مرتب کار کرد و رساله‌ای در این زمینه در سال **۱۹۹۲** ارائه دادند [۸]. روث مقاله‌های متعددی در این زمینه نوشت که از آن جمله مقاله‌ای است که در سال ۲۰۰۰، در مورد قضایای شبه هان–باناخ برای مخروط‌های موضعاً محدب ارائه داد [۱۱]. یکی از دانشجویان کایمل، رجینا تیکس [۷]، حالتی از این قضایا را در چارچوب مخروط‌های جهت‌دار ارائه داد [۱۴].
پایاننامه حاضر یک قضیه باناخ–آلااغلو از دیدگاه نظریه قلمرو ارائه می‌دهد. قضیه باناخ–آلااغلو در حالت کلاسیک بیان می‌کند که در یک فضای برداری توپولوژیکی، قطبی پائینی یک همسایگی صفر، ضعیف*–فشرده است. هدف اصلی ما مقایسه‌ای روی مخروط‌های جهت‌دار پیوسته است، برای این هدف فضای دوگان مخروط جهت‌دار C، یعنی C^* را در نظر می‌گیریم که در آن برد تابعی‌ها، اعداد حقیقی نامنفی توسعه یافته است، تحت مفروضاتی مناسب نشان می‌دهیم توپولوژی بالایی–ضعیف* روی C^*، فشرده پایدار است.
این پایاننامه در سه فصل تنظیم شده است. در فصل اول مقدمات مورد نیاز شامل تعاریف، گزاره‌ها و قضیه‌ها آورده شده است، در فصل دوم ابتدا قضیه باناخ–آلااغلو را برای مخروط‌های مرتب بیان می‌کنیم و سپس با

[۱] Klaus Keimel
[۲] Boboc
[۳] Bucur
[۴] Cornea
[۵] Matthias Rauch
[۶] Walter Roth
[۷] Regina Tix

معرفی توپولوژی‌های جدید قضیه باناخ–آلاغلو را از دیدگاه نظریه قلمرو ثابت می‌کنیم و در فصل سوم برای توپولوژی بالایی–ضعیف* و توپولوژی باز–پائینی فرمول‌بندی‌های تازه‌ای برحسب مجموعه‌های قطبی و تابعی‌های مینکوفسکی بیان می‌کنیم و همچنین نشان می‌دهیم مجموعه ساندویچ تابعی‌های خطی تحت توپولوژی وصله‌ای فشرده است.

قضیه‌های متعددی در مورد فشردگی پایدار فضاهای ارزیابی‌های پیوسته روی یک فضای توپولوژیکی X وجود دارند که می‌توان در [۲، ۵، ۱۵] مطالعه کرد. ما در این پایاننامه شرط فشردگی پایدار را به فشردگی پایدار موضعی تضعیف می‌کنیم.

مهمترین مرجع ما [۳] است. مقاله‌های یونگ [۸] [۵] و آلوارز–مانیلا [۹] [۲] تازه‌ترین موضوعات در این زمینه هستند که علاقه‌مندان می‌توانند مطالعه نمایند.

[۸] Jung

[۹] Alvarez–Manilla

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ توپولوژی ضعیف و توپولوژی-ضعیف*

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه باشد. یک توپولوژی در X گردایه‌ای است مانند τ از زیرمجموعه‌های X، به نام مجموعه‌های باز، به‌طوریکه

۱. X و $\varnothing$ متعلق به τ هستند،

۲. اشتراک هر زیرگردایه متناهی τ، متعلق به τ است،

۳. اجتماع هر زیرگردایه τ، متعلق به τ است.

فرض کنیم τ و τ_1 دو توپولوژی در مجموعه مفروض X باشند. گوییم τ_1 ظریفتر از τ یا τ درشت‌تر از τ_1 است هرگاه $\tau \subset \tau_1$ (در برخی کتب به‌جای ظریفتر و درشت‌تر به‌ترتیب از قویتر و ضعیف‌تر نیز استفاده می‌شود).

تعریف ۲.۱.۱. فضای توپولوژیکی X را فضای هاسدورف می‌نامیم، در صورتیکه به ازای هر دو نقطه متمایز x_1 و x_2 از X، همسایگی‌هایی مانند U_1 و U_2 به ترتیب برای x_1 و x_2 موجود باشند به‌طوریکه از هم جدا باشند.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیکی باشد. یک پایه برای τ (گاهی آن را یک پایه برای X نیز می‌نامیم) گردایه‌ای است مانند $\mathcal{B} \subseteq \tau$ به‌طوریکه

$$\tau = \{\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}\}.$$

مثال ۴.۱.۱. گردایه $\mathcal{B}$ از تمام بازه‌های باز، یک پایه برای توپولوژی معمولی (اقلیدسی) روی $\mathbb{R}$ است.

قضیه ۵.۱.۱. *$\mathcal{B}$ یک پایه برای یک توپولوژی روی X است اگر و تنها اگر*

الف) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$،

ب) اگر $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ و $x \in B_1 \cap B_2$ آنگاه $B_3 \in \mathcal{B}$ موجود باشد که $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

برهان. [۱۶]، ۳.۵. □

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیکی باشد. یک زیرپایه برای τ (یا یک زیرپایه برای X) گردایه‌ای است مانند $\mathcal{S} \subseteq \tau$ به‌طوریکه گردایه همه اشتراک‌های متناهی اعضای $\mathcal{S}$ یک پایه برای τ باشد.

مثال ۷.۱.۱. گردایه مجموعه‌های به شکل $(-\infty, a)$ به همراه مجموعه‌های به شکل $(b, +\infty)$ یک زیرپایه برای توپولوژی معمولی روی $\mathbb{R}$ است که $a, b \in \mathbb{R}$.

تعریف ۸.۱.۱. یک پایه برای مجموعه‌های بسته در یک فضای توپولوژیکی X هر گردایه از مجموعه‌های بسته مانند $\mathcal{G}$ در X است به‌طوریکه هر مجموعه بسته اشتراکی از اعضای $\mathcal{G}$ باشد.

لم ۹.۱.۱. *گردایه $\mathcal{G}$ یک پایه برای مجموعه‌های بسته در X است اگر و تنها اگر گردایه متمم‌های اعضای $\mathcal{G}$ یک پایه برای مجموعه‌های باز باشد. این مطلب در مورد زیرپایه‌ها نیز برقرار است.*

برهان. [۱۶]، صفحه ۴۰. □

قضیه ۱۰.۱.۱. *$\mathcal{G}$ یک پایه برای مجموعه‌های بسته برای یک توپولوژی روی X است اگر و تنها اگر*

الف) $\bigcap_{G\in\mathcal{G}} G = \varnothing$،

ب) اگر $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ آنگاه $G_1 \cup G_2$ اشتراکی از اعضای $\mathcal{G}$ باشد.

برهان. [۱۶]، صفحه ۴۰. □

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیکی باشند. توپولوژی حاصل‌ضربی در $X \times Y$ (حاصل‌ضرب دکارتی X و Y) توپولوژیی است که پایه آن گردایه $\mathcal{B}$ متشکل از همه مجموعه‌هایی به صورت $U \times V$ است که در آن U زیرمجموعه بازی از X و V زیرمجموعه بازی از Y است.
اگر X یک فضای برداری و τ یک توپولوژی بر X باشد به‌طوریکه اعمال فضای برداری یعنی جمع و ضرب اسکالر نسبت به τ پیوسته باشند، در این صورت τ یک توپولوژی برداری بر X است و X یک فضای برداری توپولوژیکی است.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی باشد. تابع

$$f : X \to [-\infty, +\infty]$$

را در نظر می‌گیریم، اگر مجموعه $\{x : f(x) > \alpha\}$ به ازای هر αی حقیقی باز باشد، گوئیم f نیمه پیوسته پائینی است و اگر مجموعه $\{x : f(x) < \alpha\}$ به ازای هر α باز باشد f نیمه پیوسته بالایی است.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیکی با توپولوژی τ باشد. یک تابعی روی X یک تابع روی X با برد $\mathbb{R}$ است. فضای دوگان X عبارت است از فضای برداری $\mathcal{F}$ که عنصرهایش تابعی‌های خطی و پیوسته f روی X هستند. توپولوژی ضعیف X، ضعیف‌ترین توپولوژی روی X است که هر $f \in \mathcal{F}$ پیوسته است، یعنی هم نیمه پیوسته بالایی و هم نیمه پیوسته پائینی است. به عبارت دیگر به ازای هر $r \in \mathbb{R}$ مجموعه‌های

$$\{x : f(x) > r\} \quad \text{و} \quad \{x : f(x) < r\}$$

هر دو باز هستند.
توپولوژی–ضعیف* روی $\mathcal{F}$، ضعیف‌ترین توپولوژی روی $\mathcal{F}$ است که هر تابع

$$ev_x : f \to f(x) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

پیوسته می‌باشد، یعنی به ازای هر $r \in \mathbb{R}$، مجموعه‌های

$$\{f \in \mathcal{F} : f(x) < r\} \quad \text{و} \quad \{f \in \mathcal{F} : f(x) > r\}$$

هر دو باز هستند.

تعریف ۱۴.۱.۱. مجموعه $\mathcal{R}$ را همراه با دو عمل دوتایی + و $\cdot$ یک نیم‌حلقه می‌نامیم هرگاه

۱. $(\mathcal{R}, +)$ یک نیمگروه تعویض‌پذیر با عضو همانی صفر باشد،

۲. $(\mathcal{R}, \cdot)$ یک نیمگروه با عضو همانی یک باشد،

۳. ضرب نسبت به جمع توزیع پذیر باشد،

۴. برای هر $r \in R$ ، $0_{\mathcal{R}} \cdot r = r \cdot 0_{\mathcal{R}} = 0_{\mathcal{R}}$.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{R}$ یک نیم‌حلقه باشد. مجموعه ناتهی A را همراه با دو عمل $+ : A \times A \to A$ و $\cdot : \mathcal{R} \times A \to A$ یک $\mathcal{R}$– نیم مدول چپ می‌نامیم هرگاه به ازای هر $r, s \in \mathcal{R}$ و $a, b \in A$

۱. $(A, +)$ یک نیمگروه تعویض‌پذیر با عضو همانی صفر باشد،

۲. $(r + s) \cdot a = r \cdot a + s \cdot a$،

۳. $r \cdot (a + b) = r \cdot a + r \cdot b$،

۴. $(r \cdot s) \cdot a = r \cdot (s \cdot a)$،

۵. $1_{\mathcal{R}} \cdot a = a$،

۶. $0_{\mathcal{R}} \cdot a = r \cdot 0_A = 0_A$.

یک $\mathcal{R}$– نیم مدول راست نیز به طریق مشابه تعریف می‌شود.

مثال ۱.۱.۱۶. $\mathbb{R}_+$ و $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ را می‌توان به عنوان دو نیم‌حلقه نام برد. $\mathbb{R}_+$ مجموعه اعداد حقیقی نامنفی با جمع و ضرب معمولی است و $\overline{\mathbb{R}}_+$ توسیع یافته اعداد حقیقی نامنفی به ∞ است.

۲.۱ مجموعه‌های مرتب کامل جهت‌دار

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه P را همراه با یک رابطه دوتایی $\leq$ یک مجموعه مرتب جزئی یا به اختصار یک $poset$ می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x, y, z \in P$ روابط زیر برقرار باشند

۱. $x \leq x$ (بازتابی)،

۲. $x \leq y$ و $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$ (تعدی)،

۳. $x \leq y$ و $y \leq x \Longrightarrow x = y$ (پادتقارنی).

تعریف ۲.۲.۱. یک زیرمجموعه از یک مجموعه مرتب جزئی را مرتب کلی یا یک زنجیر می‌نامیم، هرگاه همه اعضای آن تحت $\leq$ قابل مقایسه باشند، یعنی برای هر x, y، $x \leq y$ یا $y \leq x$.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم $(P, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد و $A \subseteq P$.

۱. عضو $a \in P$ را یک کران بالا برای A می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in A$، $x \leq a$.

۲. عضو $b \in P$ را یک کران پائین برای A می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in A$، $b \leq x$.

۳. اگر مجموعه تمام کران‌های بالای زیرمجموعه A از مجموعه مرتب جزئی P کوچکترین عضو یکتایی مانند x داشته باشد آنگاه x، سوپریمم A نامیده می‌شود و آن را به صورت $\bigvee A$ نمایش می‌دهیم.

۴. اگر مجموعه تمام کران‌های پائین زیرمجموعه A از مجموعه مرتب جزئی P بزرگترین عضو یکتایی مانند y داشته باشد آنگاه y اینفیموم A نامیده می‌شود اینفیموم A را به صورت $\bigwedge A$ نمایش می‌دهیم.

۵. اگر همه اعضای مجموعه مرتب جزئی P، بالای عضوی مانند $x \in P$ باشند آنگاه x کوچکترین عضو نامیده می‌شود و با 0 یا $\perp$ نشان می‌دهیم.

۶. عضو $a \in A$ ماکزیمم است هرگاه هیچ عضوی از A بالای آن نباشد.

۷. عضو $b \in A$ مینیمم است هرگاه هیچ عضوی از A پائین آن نباشد.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم P یک مجموعه مرتب جزئی باشد.

۱. زیرمجموعه K از P را جهت‌دار می‌نامیم هرگاه K ناتهی بوده و هر زیرمجموعه متناهی آن یک کران بالا در K داشته باشد.

۲. زیرمجموعه F از P را فیلترشده می‌نامیم هرگاه F ناتهی بوده و هر زیرمجموعه متناهی F یک کران پائین در F داشته باشد.

مثال ۵.۲.۱. مجموعه اعداد طبیعی با ترتیب معمولی یک زنجیر است.
مجموعه زیرمجموعه‌های متناهی یک مجموعه دلخواه و ناتهی با ترتیب شمول یک مجموعه جهت‌دار است .

تذکر ۶.۲.۱. *نماد $\bigvee^{\uparrow} K = k$ به این معنی است که K یک مجموعه جهت‌دار و سوپریمم آن k است، سوپریمم و اینفیمم برای دو عضو x و y نیز به صورت زیر نشان داده می‌شوند*

$$x \wedge y = inf\{x, y\},$$

$$x \vee y = sup\{x, y\}.$$

تعریف ۷.۲.۱. یک تور در فضای توپولوژیکی (X, τ) تابعی مانند

$$f : J \to X$$

$$f(j) = x_j$$

است که در آن J، یک مجموعه جهت‌دار است. تور را معمولا با $(x_j)_{j\in J}$ نشان می‌دهیم، مجموعه J، مجموعه اندیس‌گذار تور نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم P یک مجموعه مرتب جزئی باشد. برای هر $A \subseteq P$ و هر $x \in P$، تعاریف و نمادگذاری‌های زیر را داریم

۱. $\uparrow A =_{defi} \{x \in P : x \geq a \ , \ a \in A$ برای بعضی$\}$.

۲. $\downarrow A =_{defi} \{x \in P : x \leq a \ , \ a \in A$ برای بعضی$\}$.

۳. $\uparrow \{a\} =_{defi} \{x \in P : x \geq a\} = \uparrow a$.

۴. $\downarrow a =_{defi} \{x \in p : x \leq a\} = \downarrow \{a\}$.

۵. A یک مجموعه پائینی است هرگاه $A = \downarrow A$.

۶. A یک مجموعه بالایی است هرگاه $A = \uparrow A$.

۷. Aیک ایده‌آل است هرگاه یک مجموعه جهت‌دار پائینی باشد.

۸. A یک فیلتر است هرگاه یک مجموعه فیلترشده بالایی باشد.

۹. A یک ایده‌آل اصلی است هرگاه یک عضو ماکزیمم داشته باشد.

۱۰. A یک فیلتر اصلی است هرگاه یک عضو مینیمم داشته باشد.

اگر A یک مجموعه بالایی باشد در این صورت متمم A که آن را با U نشان می‌دهیم یک مجموعه پائینی خواهد بود زیرا اگر فرض کنیم $x \in U$ و $y \leq x$، در این صورت $y \in U$، چون در غیر این صورت y متعلق به A خواهد بود و چون A مجموعه بالایی است و همچنین با توجه به اینکه $y \leq x$ پس $x \in A$، یعنی $x \notin U$ و این متناقض با فرض است. بنابراین مجموعه‌های بالایی و پائینی متمم یکدیگر هستند.

تذکر ۹.۲.۱. *$\uparrow A$ و $\downarrow A$ به ترتیب کوچکترین مجموعه بالایی شامل A و کوچکترین مجموعه پائینی شامل A نیز نامیده می‌شوند.*

تذکر ۱۰.۲.۱. *برای هر $x \in P$، ایده‌آل‌های اصلی مجموعه‌های به فرم $\downarrow x$ و فیلترهای اصلی مجموعه‌های به فرم $\uparrow x$ هستند.*

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنیم P یک مجموعه مرتب جزئی باشد.

۱. P یک نیم‌مشبکه بالایی ($\vee$-نیم‌مشبکه) است هرگاه هر جفت از اعضای آن سوپریمم داشته باشد.

۲. P یک نیم‌مشبکه پائینی ($\wedge$-نیم‌مشبکه) است هرگاه هر جفت از اعضای آن اینفیمم داشته باشد.

۳. P یک مشبکه است هرگاه نیم‌مشبکه بالایی و نیم‌مشبکه پائینی باشد.

۴. یک مشبکه کامل است هرگاه هر زیرمجموعه آن سوپریمم و اینفیمم داشته باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنیم P و Q مجموعه‌های مرتب جزئی باشند. تابع $f : P \to Q$ را نگاشت حافظ ترتیب یا یکنوا می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in P$، $x \leq y$ ایجاب کند

$$f(x) \leq f(y).$$

گوئیم تابع f سوپریمم مجموعه‌های متناهی، دلخواه، ناتهی و جهت‌دار را حفظ می‌کند هرگاه، اگر $K \subseteq P$ و سوپریمم K در P موجود باشد آنگاه سوپریمم $f(K)$ در Q موجود و به صورت $f(supK)$ باشد. حالت آخر که f سوپریمم مجموعه‌های جهت‌دار را حفظ می‌کند به صورت $f(\bigvee^{\uparrow} K) = \bigvee^{\uparrow} f(K)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۳.۲.۱. مجموعه مرتب جزئی D را که هر زیرمجموعه جهت‌دار آن یک سوپریمم در D داشته باشد، مجموعه مرتب جزئی کامل جهت‌دار و یا به اختصار یک $dcpo$ می‌نامیم.

مثال ۱۴.۲.۱. هر مشبکه کامل یک $dcpo$ است و همین‌طور مجموعه‌های توانی. مجموعه اعداد طبیعی با ترتیب معمولی $dcpo$ نیست.

گزاره ۱۵.۲.۱. *حاصل ضرب دو مجموعه مرتب جزئی کامل جهت‌دار $D_1 \times D_2$ یک مجموعه مرتب جزئی کامل جهت‌دار است.*

برهان. فرض کنیم $A \subseteq D_1 \times D_2$ یک مجموعه جهت‌دار باشد. قرار می‌دهیم:

$A_1 = \prod_1(A) = \{x \in D_1 \mid \exists y \in D_2; (x, y) \in A\}$ (تصویر A روی D_1)

$A_2 = \prod_2(A) = \{y \in D_2 \mid \exists x \in D_2; (x, y) \in A\}$ (تصویر A روی D_2)

A_1 در D_1 و A_2 در D_2 جهت‌دار است زیرا اگر

$$x_1, x_2 \in A_1 \Longrightarrow \exists y_1, y_2 \in D_2; \qquad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A.$$

و چون A جهت‌دار است پس $(x_3, y_3) \in A$ موجود است به‌طوریکه

$$(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3) \quad \text{و} \quad (x_2, y_2) \leq (x_3, y_3)$$

لذا $x_1 \leq x_3$ ، $x_2 \leq x_3$ ، $x_3 \in A_1$. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که A_2 نیز جهت‌دار است. حال چون D_1 مرتب جزئی کامل جهت‌دار است پس A_1 دارای سوپریمم در D_1 است. اگر $a_1 = \sup A_1$ و $a_2 = \sup A_2$ در این صورت $\sup A = (a_1, a_2)$ و $(a_1, a_2) \in D_1 \times D_2$. □

تعریف ۱۶.۲.۱. فرض کنیم S و P دو مجموعه مرتب جزئی باشند. زوج (g,d) از توابع $g:S\to P$ و $d:P\to S$ را یک الحاق بین S و P می‌نامیم هرگاه

۱. g و d هر دو یکنوا باشند،

۲. برای هر زوج $(s,p)\in S\times P$ روابط $g(s)\geq p$ و $s\geq d(p)$ معادل باشند.

در الحاق (g,d) تابع g، الحاق چپ و تابع d الحاق راست نامیده می‌شود.

گزاره ۱۷.۲.۱. *فرض کنیم $d:P\to S$ یک تابع بین مجموعه‌های مرتب جزئی P و S باشد که P یک مشبکه کامل است. آنگاه d سوپریمم‌ها را حفظ می‌کند اگر و تنها اگر d یکنوا و یک الحاق راست داشته باشد.*

برهان. [۳]، ۵.۳.۰. □

قضیه ۱۸.۲.۱. *برای هر جفت از توابع یکنوای $g:S\to P$ و $d:P\to S$ بین مجموعه‌های مرتب جزئی P و S شرایط زیر معادل‌اند*

۱. (g,d) *یک الحاق است،*

۲. $dg\leq 1_S$ و $gd\geq 1_P$.

همچنین با شرایط بالا gd و dg خودتوان هستند.

برهان. [۳]، ۶.۳.۰. □

گزاره ۱۹.۲.۱. *فرض کنیم $g:S\to P$ و $d:P\to S$ مفروض باشند. برای هر الحاق (g,d) بین مجموعه‌های مرتب جزئی P و S شرایط زیر معادل‌اند*

۱. g *برو است،*

۲. $gd=1_P$،

۳. d *یک‌به‌یک است.*

برهان. [۳]، ۷.۳.۰. □

۳.۱ فضاهای مرتب و فضاهای T_0

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم P یک مجموعه مرتب جزئی باشد. گراف ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود

$$G = \{(x,y) \in P \times P : x \leq y\}.$$

تعریف ۲.۳.۱. یک فضای توپولوژیکی مرتب جزئی (به طور خلاصه یک فضای مرتب) مجموعه‌ای مانند X است همراه با یک توپولوژی و یک رابطه ترتیب جزئی مانند $\leq$ به‌طوریکه گراف ترتیب در $X \times X$ بسته باشد یعنی برای هر دو نقطه $x, y \in X$ که $x \nleq y$، مجموعه‌های باز U شامل x و V شامل y موجود باشند به‌طوریکه $U \cap V = \varnothing$. اگر گراف ترتیب در $X \times X$ بسته باشد، گوئیم ترتیب روی X بسته است.

مثال ۳.۳.۱. فضاهای مرتب، هاسدورف‌اند زیرا $x \neq y$ معادل است با $x \nleq y$ یا $y \nleq x$.

تعریف ۴.۳.۱. یک فضای مرتب فشرده یک فضای فشرده با ترتیب بسته است.

تعریف ۵.۳.۱. فضای توپولوژیکی X، T_0 است هرگاه برای هر دو نقطه متمایز x و y از X یک مجموعه باز که دقیقا شامل یکی از آنها باشد موجود باشد.

اگر X یک فضای توپولوژیکی باشد آنگاه برای هر دو نقطه x و y در X روابط زیر معادل‌اند

۱. $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$.

۲. $x \in \overline{\{y\}}$.

۳. به ازای هر مجموعه باز U که $x \in U$، آنگاه $y \in U$.

(منظور از $\overline{\{x\}}$ بستار مجموعه $\{x\}$ است).
این رابطه (هرکدام از ۳ رابطه بالاکه با هم معادل‌اند) انعکاسی و متعدی است و اگر X فضای T_0 باشد پادتقارنی نیز است زیرا
۱) انعکاسی: $x \in \overline{\{x\}}$،
۲) تعدی: اگر $x \in \overline{\{y\}}$ و $y \in \overline{\{z\}}$ در این صورت

$$\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}} \quad (۱)$$

و همچنین

$$\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{z\}} \quad (۲)$$

از رابطه (۱) و (۲) داریم $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{z\}}$ و بنابراین $x \in \overline{\{z\}}$.

۳) پادتقارنی: اگر $x \in \overline{\{y\}}$ و $y \in \overline{\{x\}}$ در این صورت $x = y$، چون در غیر این صورت با توجه به T_0 بودن فضا مجموعه بازی مانند U شامل x موجود است که شامل y نیست و این با رابطه $x \in \overline{\{y\}}$ در تناقض است. بنابراین یک رابطه ترتیب جزئی به صورت زیر داریم:

تعریف ۶.۳.۱. روی یک فضای T_0 یک رابطه ترتیب جزئی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \in \overline{\{y\}}$$

و ترتیب تخصیص نامیده می‌شود.

تذکر ۷.۳.۱. *تحت ترتیب تخصیص، مجموعه‌های باز همیشه مجموعه‌های بالایی‌اند و مجموعه‌های بسته همیشه مجموعه‌های پائینی‌اند.*

لم ۸.۳.۱. *در یک فضای مرتب با ترتیب تخصیص مجموعه‌های به فرم $\downarrow\{x\} = \downarrow x$ یا $\uparrow\{x\} = \uparrow x$ همیشه بسته‌اند و در صورتی که A یک زیرمجموعه فشرده از یک فضای مرتب باشد آنگاه حکم بالا برای $\downarrow A$ و $\uparrow A$ نیز برقرار است.*

برهان. فرض کنیم که $a \in X$ و $a \notin \uparrow x$. در این صورت $a \ngeq x$، طبق تعریف یک فضای مرتب، همسایگی‌های U و V به ترتیب برای x و a موجوداند به‌طوریکه $U \cap V = \varnothing$، پس $x \in U$ و همچنین $\{x\} \subseteq \uparrow x$، از طرفی بنا به تذکر ۷.۳.۱، U یک مجموعه بالایی و $\uparrow x$ کوچکترین مجموعه بالایی شامل $\{x\}$ است بنابراین داریم

$$\uparrow x \subseteq U$$

و لذا $\uparrow x \cap V = \varnothing$، در نتیجه $a \notin \overline{\uparrow x}$ یعنی $\uparrow x$ بسته است.
حال فرض کنیم $a \in \overline{\downarrow x}$، چون ترتیب تخصیص است پس $a \leq y$ که $y \leq x$ لذا $a \leq x$ و در نتیجه $a \in \downarrow x$.
برای اثبات قسمت بعد فرض می‌کنیم $x \notin \uparrow A$، در این صورت به ازای هر $y \in A$ داریم $y \nleq x$ و بنا به مرتب بودن فضا همسایگی‌های U_y و V_y به ترتیب برای y و x موجوداند به‌طوریکه $U_y \cap V_y = \varnothing$.
گردایه $\{U_y\}_{y \in A}$، A را می‌پوشاند و بنا به فشردگی A داریم $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i} = U$. اشتراک V_{y_i} های متناظر

یک همسایگی برای x است که آن را V می‌نامیم، لذا داریم

$$U \cap V = \varnothing$$

از طرفی U یک مجموعه بالایی شامل A و $\uparrow A$ کوچکترین مجموعه بالایی شامل A است پس

$$\uparrow A \subseteq U$$

بنابراین $V \cap \uparrow A = \varnothing$ و در نتیجه $x \notin \overline{\uparrow A}$.
حال اگر $x \in \overline{\downarrow A}$ در این صورت $y \geq x$ که $y \leq a$ $(a \in A)$ بنابراین $x \leq a$ و در نتیجه $x \in \downarrow A$، پس $\downarrow A$ نیز بسته است. □

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنیم X یک فضای مرتب با ترتیب تخصیص باشد. زیرمجموعه A از X اشباع شده است هرگاه برای هر $x \in X$ اگر $\overline{\{x\}} \cap A \neq \varnothing$ آنگاه $x \in A$. کوچکترین مجموعه اشباع‌شده شامل A، اشباع A نامیده می‌شود.

مثال ۱۰.۳.۱. مجموعه‌های بالایی اشباع شده هستند، زیرا اگر A یک مجموعه بالایی و $x \in X$ و همچنین $\overline{\{x\}} \cap A \neq \varnothing$، پس عضوی مانند y موجود است که $y \in \overline{\{x\}}$ و نیز $y \in A$، بنابراین $y \leq x$ و برای عضوی از A مانند a، $a \leq y$ که نتیجه می‌شود $a \leq x$ و لذا $x \in A = \uparrow A$.

تذکر ۱۱.۳.۱. *با توجه به مثال بالا مجموعه $\uparrow A$ اشباع A نیز نامیده می‌شود و همچنین اگر مجموعه A فشرده باشد اشباع آن نیز فشرده است زیرا اگر $\bigcup_{i\in I} U_i$ یک پوشش باز برای مجموعه $\uparrow A$ باشد پس یک پوشش باز برای A نیز است زیرا $A \subseteq \uparrow A$. مجموعه A فشرده است بنابراین به وسیله تعداد متناهی از U_iها پوشیده می‌شود، طبق تذکر ۷.۳.۱، مجموعه $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ یک مجموعه بالایی شامل A است ولی $\uparrow A$ کوچکترین مجموعه بالایی شامل A است پس داریم*

$$\uparrow A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

یک ویژگی مهم فضای T_0 این است که همواره به ازای هر x، $\overline{\{x\}} = \downarrow x$. همچنین اگر X و Y فضاهای توپولوژیکی مرتب، مجهز به ترتیب تخصیص باشند و تابع $f : X \to Y$ پیوسته باشد و $a, b \in X$ به‌طوریکه $a \leq b$، در این صورت اگر V یک همسایگی $f(a)$ در Y باشد، با توجه به پیوستگی f یک همسایگی برای a مانند U وجود دارد که $f(U) \subseteq V$، این همسایگی a شامل b نیز است و بنابراین $f(b)$ متعلق به $f(U)$