بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضیات و کاربردها

عنوان پایان نامه:

مدول های ضربی و توسیع‌های توزیع پذیری مدول‌ها

استاد راهنما

دکتر جعفر اعظمی

استاد مشاور

دکتر ناصر زمانی

پژوهشگر

مهدیه سواعدی

دانشگاه محقق اردبیلی

مرداد ۱۳۹۱

تقدیم

آنچه آموخته ام هیچ است برای تقدیم به

دلسوزیهای بی نهایت پدرم که از دیده برفت ولی از دل بیرون نمی رود

فداکاریهای بی پایان مادرم

محبتهای بی مثال خواهران و برادرانم و

راهنمایی های کم نظیر استادم

تقدیر و تشکر

الهی، به سپاس و ستایش تو من شکسته‌زبان را چه امکان زبان گشودن و این آشفته‌رای را چه یارای سخن گفتن. ولی هم به زبان شکسته می‌گوییم که تمام سپاس و ستایش من به تو این است که در هجوم ظلمات خاک هنوز شعله‌های افلاکی اشتیاق و انتظار در من نمرده است و گاهگاه چون عطری ناگهان در سرسرای وجودم پرتو می‌افکند و نام تو را فریاد می‌کند.

سپاس و ستایش خود را به که تقدیم کنم که هستی‌ام همه وامدار لطف بیکران اوست.

او که سایه مادری مهربان را بر سرم گسترد که وجودش آسیای درد و رنج است و پینه‌های دستانش نشان از سالیان عمر من دارد. بر دستان پرمهرش بوسه می‌زنم که هر موفقیتی که در زندگی داشته‌ام، مدیون رنج این دستهای خسته و دعای خیر این قلب مهربان بوده است.

خدا را شاکرم به خاطر وجود پدری که عشق به خوبان را به عنوان میراث جاودانه‌اش در قلبهای ما به یادگار گذاشت و کدامین پدر میراثی برتر از این برای فرزندانش به جای می‌گذارد. به درگاه ایزد منان سپاسگزارم به خاطر وجود خواهران و برادرانی که شبنم صبحگاهی بر زلالی و پاکی قلبهای بی‌ریایشان حسد می‌برد.

مشتاقانه در انتظار لحظه‌ای بوده‌ام تا نهایت سپاس خود را از کسانی که در این مدت مرا شرمنده محبتهایشان ساخته‌اند، ابراز دارم. گر چه واژه‌ها ابزار حقیری هستند برای ترجمه احساسات.

از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر اعظمی به خاطر تمامی مساعدتهای بی دریغشان در پیشبرد امر پایان‌نامه سپاسگزارم.

مراتب سپاس خود را از استاد مشاور محترم جناب آقای دکتر زمانی، داور محترم این پایان‌نامه جناب آقای دکتر یوسفیان دارانی و تمامی اساتیدی که افتخار شاگردیشان را داشته‌ام ابراز می‌دارم.

در پایان سپاس ویژه دارم از خانم حسین پور که با بودنش لحظه‌های زندگی‌ام را طراوتی دیگر بخشید و صبر و فداکاری و همراهی بی‌دریغش در تمامی لحظه‌های تحصیل یاریگر من بود....

نام خانوادگی: سواعدی	**نام:** مهدیه

عنوان پایان نامه :

مدول‌های ضربی و توسیع‌های توزیع پذیری مدول‌ها

استاد راهنما: دکتر جعفر اعظمی

استاد مشاور: دکتر ناصر زمانی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:**جبر
دانشگاه: محقق اردبیلی **دانشکده:** علوم ریاضی
تاریخ فارغ التحصیلی: ۹۱/۵/۲ **تعداد صفحه :** ۷۳

کلید واژه‌ها :
مدول ضربی، مدول توزیع پذیر، مدول ضربی ضعیف، زیرمدول اول، زیرمدول تکیه گاهی، پوشش توزیع پذیر، حلقه حسابی، حلقه ارزیابی تقریباً ماکسیمال، حلقه ارزیابی گسسته

چکیده:
فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی یکدار و M یک $R-$ مدول باشد. $R-$ مدول M ضربی نامیده می شود، هر گاه هر زیرمدول آن به صورت IM باشد که در آن I ایده‌آلی از حلقه‌ی R است. همچنین اگر N یک $R-$ مدول دیگر شامل M باشد، آنگاه M را توزیع پذیر می نامیم هر گاه در شرایط معادل زیر صدق کند:

۱. برای هر دو زیرمدول X و Y از N،

$$(X+Y)\cap M=(X\cap M)+(Y\cap M)$$

۲. برای هر دو زیرمدول X و Y از N،

$$(X\cap Y)+M=(X+M)\cap(Y+M).$$

زیر مدول سره N از $R-$ مدول M روی حلقه R اول ($p-$ اول) نامیده می شود، هر گاه به ازای هر $r\in R$ و هر $m\in M$، از $rm\in N$ داشته باشیم $m\in N$ یا $rM\subseteq N$. مجموعه‌ی تمام زیرمدول های اول یک $R-$ مدول M را با $Spec_R M$ یا $SpecM$ نشان می دهیم.
$R-$ مدول M یک مدول ضربی ضعیف نامیده می شود اگر $SpecM=\emptyset$ یا برای هر زیرمدول اول N از M، $N=IM$ که I یک ایده‌آل از R است.

فهرست مندرجات

مقدمه

در این پایان نامه همه حلقه‌ها جابجایی و یکدار و همه مدول‌ها یکانی هستند.

این پایان نامه برداشتی از منابع [۴]،[۵] و [۶] می باشد و از سایر مقالات و کتب نیز جهت شرح هر چه بیشتر مطالب استفاده شده و شامل چهار فصل به شرح زیر است:

فصل اول شامل چند تعریف و قضیه است که به آنها در فصل‌های بعدی نیاز مبرم پیدا می‌کنیم. فرض بر این است که خواننده با مفاهیم اساسی جبر که اکثر آنها در کتابهای درسی و عمومی جبر آمده اند آشنایی کامل دارد. همچنین در این فصل اکثر قضیه‌ها را بدون اثبات بیان می کنیم.

فصل های دوم، سوم و چهارم قسمتهای اصلی این پایان نامه را تشکیل می دهند. در فصل دوم ابتدا مدول‌های ضربی را تعریف کرده و سپس ثابت می کنیم که اگر M یک $R-$ مدول نوتری باشد، آنگاه هر زیرمدول تکیه گاهی و توزیع‌پذیر آن به طور منحصر به فرد به شکل، $(m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_n^{k_n})M$، می باشد به طوری که m_1، m_2،$\cdots$،m_n ایده‌آل های ماکسیمال حلقه‌ی R و متعلق به تکیه گاه M بوده و k_1، k_2، $\cdots$،$k_n \in \mathbb{N}$.

برای روشن شدن یکی از اهدافی که در این پایان نامه به دنبال آن هستیم، لازم است کمی با تاریخچه‌ی مدول‌های ضربی و مقالاتی که در جهت رسیدن به این هدف گام برداشته‌اند، آشنا گردیم.

از همان ابتدا که حلقه با تعریف کنونی به عنوان یک ساختار جبری معرفی شد و زیرمجموعه‌های خاصی از آن را ایده‌آل نامیدند، معلوم بود که ایده‌آل را می توانیم بصورت ضرب خود آن ایده‌آل در حلقه بنویسیم (البته واضح است که این عمل زمانی انجام می‌گرفت که ضرب دو ایده‌آل را تعریف کرده بودند). یعنی به زبان ریاضی برای هر $I \trianglelefteq R$، $I = IR$.

در دهه‌ی ۶۰ میلادی مطالب متعددی در مورد ایده‌آل های ضربی بیان شد.

مثلاً جی.ال.موت[۱] در سال ۱۹۶۵ طی قضیه ای ثابت کرد که اگر در حلقه‌ی R تنها ایده‌آل‌های اول ضربی باشند، آنگاه تمام ایده‌آل های آن ضربی خواهند بود. همچنین یکی از مباحثی که در سال های اخیر ذهن و توان برخی از ریاضی دانان حاضر شاخه جبر را به خود مشغول نموده و هر ساله در مورد آن یافته های جدید خود را ارائه می دهند پیرامون مدول‌های ضربی است. به نظر می رسد، این موضوع در سال ۱۹۷۴ توسط فاضل مهدی[۲] در مقاله‌ای با عنوان "*On multiplication modules* " معرفی شد. او در سال ۱۹۷۶ طی مقاله‌ی دیگری با عنوان "*On multiplication and weak multiplication modules*" موضوع را از سمت و سویی دیگر نگریست و افراد دیگری مانند ر.ک.جین[۳] و آ. بارنارد[۴] در سال ۱۹۸۱ پیرامون این موضوع در ابعاد دیگری پرداختند. در سال ۱۹۲۶ کرول[۵] حلقه‌های ضربی را به عنوان تعمیمی از حلقه‌های ددکیند[۶] معرفی کرد. مدول های ضربی به عنوان تعمیمی از حلقه‌های ضربی اولین بار توسط بارنارد در سال ۱۹۸۱ معرفی شد.

فصل سوم شامل دو بخش است. در بخش اول زیرمدول های اول را بررسی می کنیم. در سال ۱۹۸۴، چین.پی.لیو[۷] مقاله‌ای تحت عنوان "*Prime submodules of modules* " نوشت و در این مقاله روی خواص این نوع زیرمدول ها بحث کرد. در سال ۱۹۸۶، مور[۸] ومک کاسلند[۹] مقاله‌ای در مورد اشتراک زیرمدول های اول روی مدول های متناهی مولد به چاپ رساندند و ساختارهایی را برای زیرمدول های اول عنوان نمودند. در سال ۱۹۹۲، مجدداً مقاله‌ای تحت عنوان زیرمدول های اول و مقاله‌ی دیگری با عنوان زیرمدول های اول روی مدول های نوتری به چاپ رساندند و به مطالعه و ارتباط بین فضاهای برداری و زیرمدول‌های اول پرداختند. از آنجا که لازمه‌ی تعریف مدول های ضربی ضعیف آشنا بودن با زیرمدول‌های اول است، لذا در این پایان نامه به طور مختصر مباحثی از زیرمدول های اول بیان شده است.

---

[۱] J.L.Mott
[۲] Fazal Mehdi
[۳] R.K.Jean
[۴] Barnard
[۵] Krull
[۶] Dedekind
[۷] Chin.Pi.Lu
[۸] Moore
[۹] McCasland

در بخش دوم ابتدا مدول های ضربی ضعیف را تعریف کرده و سپس ثابت می کنیم که هر مدول ضربی ضعیف با تولید متناهی یک مدول ضربی است. لازم به ذکر است که این نوع مدول ها اولین بار توسط عبدالمالک عزیزی در سال ۲۰۰۳ مطرح شد.
فصل چهارم شامل پنج بخش به شرح زیر می باشد. در بخش اول نشان می دهیم که هر زیرمدول توزیع پذیر از یک مدول با تولید متناهی M نسبت به همه‌ی خودریختی‌ها از M پایاست. در بخش دوم ثابت می کنیم که روی حلقه‌های حسابی نوتری، پوشش توزیع پذیر یک مدول یا خود مدول است یا پوشش انژکتیو مدول. در بخش سوم توسیع‌های توزیع پذیر از مدول‌ها را روی دامنه‌ی صحیح در نظر می گیریم و ثابت می کنیم که هر مدول از مرتبه‌ی بزرگتر از یک زیرمدول‌های توزیع پذیر واقعی ندارد و اگر $N \subseteq M$ یک توسیع توزیع پذیر از مدول های مرتبه‌ی یک باشد، در این صورت N و M زیرمدول های تابی یکسان دارند و موضعاً در ایده‌آل‌های اول متعلق به $Supp(T(M))$ برابر می شوند. در بخش چهارم پوشش توزیع پذیر $D(M)$ را در حالت‌های خاص توصیف می کنیم و برای مدول M روی دامنه‌ی ددکیند R شرح ذیل را داریم:
اگر M مرتبه‌ی صفر داشته باشد، آنگاه $D(M) = (\coprod_{p\in C} K/R_p) \coprod (\coprod_{p\notin C} M_p)$، که K میدان کسرهای R و C مجموعه‌ای از ایده‌آل های ماکسیمال p از R به طوری که M_p یک R_p- مدول دوری باشد. همچنین ثابت می کنیم که اگر M، $R-$ مدولی از مرتبه‌ی یک و گروه کلاس ایده‌آل R یک گروه تابی باشد، آنگاه $D(M) = S_M^{-1} M$، که در آن S_M مجموعه‌ای از عضوهای R است که مقسوم علیه های صفر روی M نیستند. در بخش پنج بعد از تعریف توسیع کافی، رابطه‌ی این نوع توسیع، با توسیع های توزیع پذیر و تکیه‌گاهی را بررسی می کنیم.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف اولیه

در سراسر این پایان نامه R حلقه‌ی جابجایی و یکدار بوده و تمام $R-$ مدول ها یکانی فرض می‌شوند. $R-$ مدول ها را با حروف M،N،K،... و ایده‌آل ها را با نمادهای m،p،q،... نشان خواهیم داد. اعداد صحیح نامنفی، صحیح و گویا بترتیب با $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ نشان داده می‌شوند.
مجموعه تمام ایده‌آلهای اول R را که مجموعه‌ای ناتهی است، با $Spec(R)$ نشان خواهیم داد.
در این بخش تعاریف و مفاهیمی را معرفی می کنیم که تقریباً در سراسر این پایان نامه از آنها استفاده شده است. برای تنظیم این بخش از منابع [۲, ۴, ۵, ۱۱, ۱۸, ۱۹] استفاده شده است.

۱. **پوچساز یک $R-$ مدول**: $ann_R(M)$ را پوچساز M روی R می نامیم و آن را بصورت مجموعه‌ی $ann_R(M) = \{r \in R \mid rM = 0\}$ **تعریف** می کنیم.

۲. **R – مدول تابدار و بی تاب**: فرض کنید R یک حوزه صحیح و M یک $R-$ مدول باشد. در این صورت زیرمجموعه

$$T(M) = \{m \in M \mid \exists 0 \neq r \in R; rm = 0\}$$

از M یک زیرمدول آن می باشد. $T(M)$ را زیرمدول تابدار می نامیم. همچنین اگر $T(M) = M$، M را تابدار و اگر $T(M) = 0$، آنگاه M را فارغ از تاب می نامیم.

۳. **$R-$ مدول دوری**: فرض کنید M یک R – مدول باشد. زیر مجموعه‌ی X از M را مجموعه‌ی مولد برای M می نامیم اگر $M = RX$. اگر M مجموعه‌ی مولد متناهی داشته باشد،

آن را متناهی مولد می نامیم(پس متناهی مولد بودن M معادل است با این که عضوهایی از M مثل $x_1, \cdots, x_n$ موجود باشند که $M = Rx_1 + \cdots + Rx_n$). اگر M مجموعه‌ی مولد تک عضوی داشته باشد، آن را دوری می نامیم(پس دوری بودن M معادل است با این که عضوی از M مثل x موجود باشد که $M = Rx$).

۴. ایده‌آل های متباین: فرض کنید $I, J, I_1, \cdots, I_n$ که $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ ایده‌آل هایی از حلقه‌ی تعویض پذیر R باشند. می گوییم که I و J متباین اند اگر $I + J = R$. همچنین خانواده‌ی ایده‌آل‌های $(I_i)_{i=1}^n$ را دو به دو متباین گویند اگر به ازای هر $1 \leq i, j \leq n$ و $i \neq j$، $I_i + I_j = R$.

۵. ایده‌آل کسری[1]: فرض کنید R یک حوزه‌ی صحیح و K میدان کسرهای آن باشد. $R-$زیرمدول I از K را یک ایده‌آل کسری R می نامند اگر $I \neq 0$ و عنصر غیر صفری مانند $a \in R$ موجود باشد به طوری که $aI \subset R$.

مثال: هر ایده‌آل ناصفر معمولی I در دامنه‌ی صحیح R یک $R-$ زیرمدول R و در نتیجه یک ایده‌آل کسری R می باشد. برعکس هر ایده‌آل کسری R که مشمول R باشد یک ایده‌آل معمولی R است.

مثال: هر $R-$ زیرمدول ناصفر با تولید متناهی I از K یک ایده‌آل کسری R است. زیرا اگر I به وسیله‌ی $b_1, \cdots, b_n \in K$ تولید شود، آنگاه $I = Rb_1 + \cdots + Rb_n$ و به ازای هر i، $b_i = \frac{c_i}{a_i}$ که در آن $a_i, c_i \in R$ و $0 \neq$. فرض کنیم $a = a_1a_2 \cdots a_n$. در این صورت $a \neq 0$ و $aI = Ra_2 \cdots a_nc_1 + \cdots + Ra_1 \cdots a_{n-1}c_n \subset R$.

٦. ایده‌آل معکوس پذیر: فرض کنید I یک ایده‌آل کسری حلقه‌ی R باشد. قرار می دهیم $I.I^{-1} = \{a \in K : aI \subset R\}$ را ایده‌آل معکوس پذیر حلقه‌ی R می نامند اگر $R = I^{-1}I$.

مثال: هر ایده‌آل اصلی ناصفر در دامنه‌ی صحیح R معکوس پذیر است. اگر K میدان خارج قسمتی R بوده و $I = (b)$ که در آن $b \neq 0$، فرض می کنیم $J = Rc \subset K$، که در آن $c = 1_R/b$. در این صورت J ایده‌آل کسری R است به طوری که $IJ = R$.

۷. ایده‌آل ضربی [2]: ایده‌آل I از حلقه ی R را ضربی می نامیم، هر گاه برای هر ایده‌آل J از R که $J \subseteq I$، ایده‌آلی مانند C از R موجود باشد به طوری که $J = IC$.

---

[1] Fractional ideal

[2] Multiplication ideal

مثال : در دامنه‌ی صحیح R، ایده‌آل‌های معکوس پذیر، ضربی هستند. فرض کنید K میدان کسرهای R و $I^{-1} = \{a \in K : aI \subset R\}$ باشد. در این صورت $II^{-1} = R$. فرض کنید $J \subseteq I$ یک ایده‌آل در R باشد. در این صورت

$$J = JR = JI^{-1}I = (JI^{-1})I.$$

بنابراین I یک ایده‌آل ضربی است.

۸. **رادیکال** I: فرض کنید R حلقه‌ی تعویض پذیر و I ایده‌آل R باشد. در این صورت

$$\sqrt{I} := \{r \in R : \exists n \in N; r^n \in I\}$$

ایده‌آلی از R است که I را شامل می شود و رادیکال I نام دارد. نماد $rad_R I$ نماد دیگری برای $\sqrt{I}$ است.

۹. **ایده‌آل ابتدایی:** فرض کنید q ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. می گوییم q ایده‌آل ابتدایی R است اگر

a) $q \subset R$، یعنی q ایده‌آل سره ی R باشد و

b) هر گاه $a, b \in R$ و $ab \in q$ ولی $a \notin q$، آن گاه $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $b^n \in q$.

۱۰. **ایده‌آل $p-$ ابتدایی:** فرض کنید q یک ایده‌آل ابتدایی حلقه‌ی R باشد. در این صورت $p := \sqrt{q}$ ایده‌آل اول R است و می گوییم q، یک ایده‌آل pـابتدایی است.

۱۱. **تجزیه‌ی ابتدایی** : فرض کنید I ایده‌آل R باشد. یک تجزیه‌ی ابتدایی از I عبارتست از اشتراک تعداد متناهی ایده‌آل ابتدایی. یعنی ایده‌آل I را بتوان بصورت اشتراک تعداد متناهی ایده‌آل ابتدایی نوشت $I = \cap_{i=1}^{n} q_i$ که $\sqrt{q}_i = p_i$. در این صورت می گوییم ایده‌آل I تجزیه پذیر است یا تجزیه‌ی ابتدایی دارد. این تجزیه را نرمال یا کاهشی می نامند هر گاه دو شرط زیر برقرار باشد.

(i) به ازای هر $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq n$ و $i \neq j$ داشته باشیم $p_i \neq p_j$؛

(ii) $\cap_{j=1}^{n} q_j \not\subseteq q_i$ به ازای هر $1 \leq i \leq n$ و $i \neq j$.

۱۲. **مجموعه‌ی ضربی بسته** : زیر مجموعه‌ی S از حلقه‌ی R ضربی بسته است اگر

(i) $1 \in S$ و

(ii) اگر $s_1 s_2 \in S$ آنگاه $s_1, s_2 \in S$.

۱۳. مدول کسرهای M نسبت به S: فرض کنید S زیر مجموعه ای ضربی بسته از حلقه‌ی تعویض پذیر R و M یک $R-$ مدول باشد. رابطه‌ی $\sim$ روی $M \times S$ با تعریف زیر :
به ازای $(m,s),(n,t) \in M \times S$

$$(m,s) \sim (n,t) \Longleftrightarrow \exists u \in S, u(tm - sn) = 0$$

رابطه‌ی هم ارزی روی $M \times S$ است. به ازای $(m,s) \in M \times S$، رده‌ی هم ارزی شامل (m,s) را با m/s نمایش می دهیم. مجموعه‌ی $S^{-1}M$ متشکل از رده های هم ارزی رابطه‌ی $\sim$ تحت اعمال

$$\frac{m}{s} + \frac{n}{t} = \frac{tm+sn}{st} \ , \ \frac{r}{s}\frac{n}{t} = \frac{rn}{st}$$

که در آن $m,n \in M$، $s,t \in S$ و $r \in R$، مدولی روی حلقه‌ی $S^{-1}R$، متشکل از کسرهای R نسبت به S، است. $S^{-1}R$ $-$ مدول $S^{-1}M$ مدول کسرهای M نسبت به S نامیده می شود.

۱۴. موضعی سازی: فرض کنید p ایده‌آل اولی از R و S یک زیر مجموعه‌ی ضربی بسته از R باشد. حلقه‌ی خارج قسمتهای $S^{-1}R$ موضعی سازی R در p نام دارد و با نماد R_p نشان داده می‌شود. R_p یک حلقه‌ی موضعی است و تنها ایده‌آل ماکسیمال آن pR_p می‌باشد.

۱۵. توسیع $R-$ مدول: R $-$مدول M را توسیع $R-$مدول N می‌نامیم هر گاه N زیرمدولی از M باشد. اگر N زیرمدول سره‌ی M باشد، آنگاه M توسیع سره از N نامیده می‌شود.

۱۶. توسیع اساسی: فرض کنید N یک R $-$ مدول و M توسیعی از آن باشد. M توسیع اساسی N است اگر به ازای هر زیر مدول غیر صفر مثل K از M، $N \cap K \neq 0$.

مثال: فرض کنید R یک دامنه‌ی تعویض پذیر با میدان کسرهای K باشد. در این صورت K وقتی به عنوان $R-$ مدول در نظر گرفته شود یک توسیع اساسی از R است.

مثال: $\mathbb{Q}$ توسیع اساسی از $\mathbb{Z}$ است؛ در واقع، این توسیع اساسی، سره هم هست.

۱۷. تکیه گاه یک $R-$ مدول: تکیه گاه M عبارتست از مجموعه $\{p \in Spec(R) : M_p \neq 0\}$. این مجموعه را با نماد $Supp(M)$ نشان می دهیم (در اینجا M_p نشان دهنده‌ی مدول حاصل از موضعی سازی M در p است).

۱۸. ایده‌آل اول مینیمال: اگر I یک ایده‌آل باشد، ایده‌آل اول p را یک ایده‌آل اول مینیمال روی I می نامیم، هر گاه $I \subseteq p$ و هیچ ایده‌آل اولی مانند q نتوان یافت به طوری که $I \subseteq q \subsetneq p$. در حالت خاص اگر $I = 0$، آنگاه هر ایده‌آل اول مینیمال روی صفر را یک ایده ال اول مینیمال روی حلقه‌ی R می نامند.

۱۹. ایده‌آل اول وابسته: $p \in Spec(R)$ ایده‌آل اول وابسته به M است اگر $m \in M$ وجود داشته باشد که $(0 : m) = Ann(m) = p$. توجه کنید که اگر $m \in M$ و مانند فوق $(0 : m) = p$، آنگاه $m \neq 0$. مجموعه‌ی ایده‌آل های اول وابسته به M را با $Ass(M)$ نشان می دهیم.

۲۰. سوکل[1] M: فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. در این صورت مجموع تمام زیرمدول‌های ساده‌ی M را سوکل M می نامیم و با $S(M)$ نشان می دهیم.

۲۱. زیرمدول تکیه گاهی : زیرمدول X از M را تکیه گاهی می نامیم اگر برای هر ایده‌آل ماکسیمال m از R به طوری که $M_m \neq 0$، آنگاه $X_m \neq 0$.

مثال: $2\mathbb{Z}$ یک زیرمدول تکیه گاهی از $\mathbb{Z}-$ مدول $\mathbb{Z}$ می باشد.

۲۲. زنجیر : عبارتی چون $p_0 \subset p_1 \subset p_2 \subset \cdots \subset p_n$ که در آن $n \in \mathbb{N}$ و $p_n, \cdots, p_1, p_0$ ایده‌آل‌های اول R هستند، زنجیری اکید از ایده‌آل های اول R نامیده می شود. عدد n را طول این زنجیر می گوییم. زنجیر فوق را اشباع شده نامیم هر گاه به ازای هر $i \in \mathbb{N}$ که $1 \leq i \leq n$، ایده‌آل اولی چون $q \in Spec(R)$ وجود نداشته باشد به طوری که $p_{i-1} \subset q \subset p_i$. زنجیر $p_0 \subset p_1 \subset p_2 \subset \cdots \subset p_n$ را ماکسیمال نامیم هر گاه اشباع شده باشد و p_n ایده‌آل ماکسیمال R و p_0 ایده‌آل اول مینیمال R باشد.

۲۳. بعد: بعد R را برابر با $Sup\{0 \leq n \in \mathbb{Z} \mid \exists p_0 \subseteq p_1 \subseteq p_2 \subseteq \cdots \subseteq p_n\}$ تعریف می‌کنیم، مشروط بر اینکه، سوپریمم موجود باشد. در غیر این صورت آنرا ∞ تعریف می‌کنیم. بعد R را با $dimR$ نشان می‌دهیم.

۲۴. بعد کرول [2]: بعد (کرول) M با $dim_R M$ یا $dimM$ نمایش داده می شود و برابر با سوپریمم طول زنجیرهایی از ایده‌آل های اول است که در $Supp_R M$ قرار دارند، به شرطی که این سوپریمم موجود باشد، در غیر این صورت برابر با ∞ فرض می شود. در حالتی که M متناهی مولد باشد، بعد M برابر با $dim\frac{R}{(0:_R M)}$ است.

---
[1] Socle
[2] Krull dimension

۲۵. ارتفاع : فرض کنید $p \in Spec(R)$. در این صورت ارتفاع p را برابر با کوچکترین کران بالای مجموعه‌ی طولهای زنجیرهای $p_0 \subset p_1 \subset p_2 \subset \cdots \subset p_n$، از ایده‌آل های اول R که در آنها $p_n = p$، تعریف می‌کنیم، مشروط بر اینکه این مجموعه کوچکترین کران بالا داشته باشد، در غیر این صورت آن را ∞ در نظر می‌گیریم. ارتفاع p را با $ht_R p$ (یا htp) نشان می‌دهیم.

۲۶. مدول موضعاً دوری[1]: مدول M روی حلقه R را موضعاً دوری گوییم اگر برای هر ایده‌آل ماکسیمال m از حلقه R، M_m یک R_m- مدول دوری باشد.

۲۷. مدول ضربی[2]: $R-$ مدول M را ضربی می‌نامیم هر گاه برای هر زیرمدول M مانند N، ایده‌آل I از حلقه‌ی R موجود باشد به طوری که $N = IM$.

۲۸. زیرمدول اول: زیرمدول N از M را اول می‌نامیم هر گاه $N \neq M$ و به ازای هر $r \in R$ و $m \in M$، اگر $rm \in N$، آنگاه داشته باشیم $m \in N$ یا $r \in (N :_R M)$. در این حالت $p = (N :_R M)$ ایده‌آل اول R است و N را $p-$ اول می‌نامیم. مجموعه‌ی تمام زیرمدول‌های اول M را با $SpecM$ نشان می‌دهیم.

۲۹. مدول ضربی ضعیف[3]: $R-$ مدول M یک مدول ضربی ضعیف نامیده می شود اگر $SpecM = \emptyset$، یا برای هر زیرمدول اول N از M، $N = IM$ که I یک ایده‌آل R است.

۳۰. زیرمدول توزیع پذیر: زیرمدول X از M زیرمدول توزیع پذیر نامیده می شود اگر شرایط معادل زیربرقرارباشند:

a) برای هر زیرمدول Y و Z از M،

$$(Y + Z) \cap X = (Y \cap X) + (Z \cap X),$$

b) برای هر زیرمدول Y و Z از M،

$$(Y \cap Z) + X = (Y + X) \cap (Z + X).$$

بنابراین مدول M توزیع پذیر است اگر هر زیرمدول آن توزیع پذیر باشد.

۳۱. حلقه ارزیابی: یک حلقه‌ی جابجایی مانند R است که در آن برای هر جفت از عضوهای $a, b \in R$، $a \in Rb$ یا $b \in Ra$.

---

[1] Locally cyclic

[2] Multiplication module

[3] Weak multiplication module

۳۲.**حلقه ارزیابی گسسته** [1]: یک دامنه ایده‌آل اصلی است که درست یک ایده‌آل اول ناصفر دارد.

۳۳. **دامنه ددکیند**: دامنه‌ی صحیح R را یک دامنه‌ی ددکیند می نامیم هر گاه هر ایده‌آل کسری غیرصفر آن معکوس‌پذیر باشد.

مثال: هر دامنه‌ی ایده‌آل اصلی یک دامنه‌ی ددکیند است.

۳۴. **دامنه پروفر**: یک دامنه‌ی صحیح است که در آن هر ایده‌آل با تولید متناهی معکوس‌پذیر باشد.

۳۵. **حلقه حسابی**: حلقه R را حسابی می گوییم اگر به عنوان $R-$ مدول، یک مدول توزیع‌پذیر باشد. بطور معادل حلقه‌ی R حسابی گفته می شود اگر برای همه‌ی ایده‌آل های I, J, K از R،

$$I + (J \cap K) = (I + J) \cap (I + K)$$

مثال: $\mathbb{Z}_۲$ یک حلقه حسابی است. همچنین دامنه‌های پروفر و ددکیند در رده‌ی حلقه‌های حسابی قرار دارند.

۳۶. **زیرمدول ابتدایی**: زیر مدول سره N از M روی حلقه R، ابتدایی یا($p-$ ابتدایی) نامیده می‌شود اگر $ra \in N$ که $r \in R$ و $a \in M$، نتیجه دهد که $a \in N$ یا $r \in \sqrt{(N :_R M)} = p$.

۳۷. **مدول تجزیه‌ناپذیر** : $R-$مدول M را تجزیه‌ناپذیر گوییم هر گاه $M \neq ۰$ و تنها جمعوند مستقیم آن صفر و خود M باشد.

۲.۱ لم‌ها و قضایا

در این بخش به بیان لم‌ها و قضایایی می پردازیم که از آنها در فصل‌های بعدی استفاده خواهیم کرد. برای تنظیم این بخش از منابع [۲, ۸, ۱۱, ۱۸, ۱۹] استفاده شده است.

گزاره ۱.۲.۱. فرض کنید $M \subseteq N$ یک توسیع از R − مدول‌ها باشد. در این صورت M زیرمدول توزیع پذیر N است اگر و تنها اگر برای هر $y \in N$ و $x \in M$، داشته باشیم:

$$(M :_R y) + (y :_R x) = R$$

[1] Discrete valuation ring

برهان : فرض کنید $x \in M$ و $y \in N$، برای هر $r \in R$ رابطه‌ی زیر را داریم:

$$r \in (M : y) \Rightarrow ry \in M$$

از طرفی چون $x \in M$، پس $rx \in M$. لذا $r(x-y) \in M$ و همچنین $r(x-y) \in R(x-y)$. بنابراین $r(x-y) \in M \cap R(x-y)$. چون $r(x-y) \in M \cap R(x-y)$ پس $r(x-y) \in M$ و $r(x-y) \in R(x-y)$ لذا داریم:

$$r(x-y) \in M \Rightarrow rx - ry \in M \Rightarrow rx + M = ry + M \Rightarrow ry + M = M \Rightarrow r \in M : y$$

بنابراین

$$r \in (M : y) \Longleftrightarrow r(x-y) \in M \cap R(x-y)$$

و همچنین برای برخی $r \in R$ داریم :

$$۱ - r \in (y : x) \Rightarrow (۱ - r)x \in < y >$$

در نتیجه $r_۱ \in R$ وجود دارد به طوری که $x(۱-r) = r_۱ y$ و از آن نتیجه می گیریم که:

$$x = rx + r_۱ y \Rightarrow x = rx + r_۱ y + ry - ry = r(x-y) + (r + r_۱)y$$

بنابراین $x = r(x-y) + sy$ که در آن $s = r + r_۱$. از طرفی از $x = r(x-y) + sy$ رابطه‌ی زیر را داریم:

$$(۱ - r)x = (s - r)y \Rightarrow (۱ - r)x \in < y > \Rightarrow (۱ - r) \in (y : x)$$

پس

$$(۱ - r) \in (y : x) \Longleftrightarrow x = r(x-y) + sy$$

چون $r + ۱ - r = ۱$ پس $(M : y) + (y : x) = R$ اگر و تنها اگر $r, s \in R$ به گونه‌ای موجود باشند که :

$$r(x-y) \in M \cap R(x-y) \qquad , \qquad x = r(x-y) + sy$$

طبق فرض $N \subseteq M$ توزیع‌پذیر و $x \in M$ و $y \in N$. لذا:

$$x = (x-y) + y \in M \cap (R(x-y) + Ry) = M \cap R(x-y) + M \cap Ry$$

که از آن نتیجه می‌گیریم : $x \in M \cap R(x-y) + M \cap Ry$. حال فرض می‌کنیم $x = x_1 + x_2$ که $x_1 \in M \cap R(x-y)$ و $x_2 \in M \cap Ry$. لذا $x_1 = r(x-y)$ و $x_2 = sy$ پس $x = r(x-y) + sy$ در نتیجه:

$$(M : y) + (y : x) = R$$

برعکس : فرض کنید برای $x \in M$ و $y \in N$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد

$$(M : y) + (y : x) = R$$

و فرض کنید $x \in (X+Y) \cap M$ که در آن X و Y دو زیرمدول از N هستند. ثابت می‌کنیم که $x \in X \cap M + Y \cap M$. چون $x \in (X+Y) \cap M$ پس $x \in M$ و $x \in X + Y$ لذا $x = z + y$ که در آن $z \in X$ و $y \in Y$. از طرفی طبق فرض

$$(M : y) + (y : x) = R$$

پس $r_1 + r_2 = 1$ و همین طور $r_1 x \in < y >$ و $r_2 y \in M$ لذا $r \in R$ به گونه‌ای موجود است که $r_1 x = ry$. حال دو طرف رابطه ی $r_1 + r_2 = 1$ را در x ضرب می کنیم

$$x = ry + r_2 x = ry + r_2(z+y) = ry + r_2 z + r_2 y = y(r + r_2) + r_2 z = r_1 y + r_2 z$$

چون $x \in M$ پس $r_1 y + r_2 z \in M$. همینطور $r_1 y \in M$ (زیرا $r_1 \in M : y$). لذا $x - r_1 y \in M$ در نتیجه $r_2 z \in M$. از طرفی $z \in X$ پس $Rz \subseteq X$ و همچنین از $y \in Y$ داریم $Ry \subseteq Y$ بنابراین:

$$x \in (Rz \cap M) + (Ry \cap M) \subseteq (X \cap M) + (Y \cap M)$$

پس M توزیع‌پذیر و رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$(X+Y) \cap M = (X \cap M) + (Y \cap M)$$

■

نتیجه . فرض کنید R یک حلقه موضعی باشد. در این صورت $M \subseteq N$ توزیع پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $y \in N - M$، $M \subseteq Ry$ (یا معادلاً: اگر و تنها اگر M تحت رابطه‌ی شمول با هر زیر مدول از N قابل مقایسه باشد).

برهان : فرض کنید $x, y \in N$. در این صورت اگر $x \in N - M$، آنگاه طبق فرض $M \subseteq Rx$. بنابراین:

$$(Rx + Ry) \cap M = M = (Rx \cap M) + (Ry \cap M).$$

پس $M \subseteq N$ توزیع پذیر است.

برعکس : فرض کنید $y \in N - M$ و $x \in M$ دلخواه باشد. چون $M \subseteq N$ توزیع‌پذیر است پس:

$$(Ry + R(x-y)) \cap M = (Ry \cap M) + (R(x-y) \cap M)$$

به ویژه از آن جایی که $x \in M$، لذا عناصر $a, b \in R$ به گونه‌ای موجودند که:

$$x = ay + b(x-y) \Rightarrow (۱ - b)x = (a-b)y$$

به عبارت دیگر $ay \in M$ و $b(x-y) \in M$. حال اگر b معکوس‌پذیر باشد، آنگاه

$$b(x-y) \in M \Rightarrow (x-y) \in b^{-۱}M \subseteq M \Rightarrow (x-y) \in M$$

و از آن نتیجه می‌شود $y \in M$ که با فرض در تناقض است. بنابراین b غیر یکه است. از طرفی می‌دانیم که هر غیر یکه در یک ایده‌آل ماکسیمال قرار دارد. لذا از $b \in m$ نتیجه می‌شود $(۱ - b) \notin m$ و بنابر این $(۱ - b)$ معکوس‌پذیر است (چون اگر $(۱ - b)$ معکوس‌پذیر نباشد آنگاه $< ۱ - b >$ یک ایده‌آل محض R است و لذا $< ۱ - b > \subseteq m$. در نتیجه $۱ - b \in m$ و از آنجا $۱ \in m$ که متناقض با ماکسیمال بودن m است). پس از معکوس‌پذیر بودن $(۱ - b)$ و رابطه‌ی $(۱ - b)x = (a - b)y$ نتیجه می‌گیریم که $x \in Ry$ و از آن داریم $M \subseteq Ry$.

به ویژه یک مدول روی یک میدان زیر مدول توزیع پذیر واقعی ندارد. چون اگر R میدان و برای هر $y \in N - M$ رابطه ی $M \subseteq Ry$ بر قرار باشد، آنگاه از $m \in M$ نتیجه می گیریم $m \in Ry$. بنابراین $r \in R$ وجود دارد به طوری که $m = ry$. از میدان بودن R نتیجه می‌گیریم $y = r^{-۱}m \in M$. که در تناقض با $y \in N - M$ است. ■