بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش آمار ریاضی

مطالعه‌ای بر آنتروپی رنی باقیمانده در توزیع‌های طول عمر

استاد راهنما:

دکتر مجید اسدی

پژوهشگر:

سمیه زارع‌زاده

اسفندماه ۱۳۸۷

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش آمار ریاضی

خانم سمیه زارع زاده

تحت عنوان

مطالعه ای بر آنتروپی رنی باقیمانده در توزیع های طول عمر

در تاریخ ۸۷/۱۲/۳ توسط هیأت داوران زیر بررسی با نمره ۱۹/۹۰ و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر مجید اسدی با مرتبه‌ی علمی دانشیار امضاء

۲- استادداور داخل گروه پایان‌نامه دکتر ایرج کاظمی با مرتبه‌ی علمی استاد یار امضاء

۳- استاد داورخارج از گروه دکتر غلام حسین یاری با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

امضای مدیر گروه

حمد و سپاس یگانه یاور علم را که لحظه لحظه های هستی، همراهیش، یاری اش و عظمتش را دیده ام.

شایسته می دانم مراتب تشکر خود را از استاد ارجمند، جناب آقای دکتر اسدی ابراز نمایم که فراتر از یک استاد راهنما به من درس تلاش و پشتکار آموخت و با اخلاق بی نظیر خود همواره الگویی در راه علم و دانش است.

تقدیم به پدر و مادر مهربانم،

مهربانانی که برای سخاوت بی دریغشان هرگز پاسخی نیافتم.

چکیده

یکی از معیارهای اندازه‌گیری اطلاع که در دهه‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته، آنتروپی رنی است. آنتروپی رنی به عنوان یک معیار انعطاف‌پذیر، آنتروپی شانون را در بر دارد. امروزه، آنتروپی رنی جایگاه ویژه‌ای در مباحث قابلیت اعتماد یافته است. از جمله، آنتروپی رنی متغیرهای تصادفی باقیمانده عمر را می‌توان نام برد که آنتروپی رنی باقیمانده نامیده می‌شود. در این رساله، پس از معرفی و مطالعه برخی از ویژگیهای آنتروپی رنی، خواص متنوع آنتروپی رنی باقیمانده از جمله یکتایی و یکنوایی آن را مورد بحث قرار می‌دهیم. ترتیب تصادفی بر اساس آنتروپی رنی باقیمانده و مشخصه‌سازی برخی توزیع‌ها با استفاده از آن، از دیگر مواردی است که در این تحقیق مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

داده‌های ترتیبی دارای کاربرد فراوانی در مدل‌سازی و استنباط آماری هستند. از مهمترین این نوع داده‌ها می‌توان آماره‌های مرتب و آماره‌های رکورد را نام برد. آماره‌های مرتب در بسیاری از شاخه‌های نظریه آمار از جمله نظریه قابلیت اعتماد و تحلیل نمونه‌های سانسور شده کاربرد دارند. همچنین آماره‌های رکورد در هواشناسی، ژئوفیزیک، زلزله‌نگاری و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرند. دامنه وسیع استفاده از آماره‌های مرتب و رکوردها، بررسی خواص اطلاع آنها را اجتناب‌ناپذیر می‌کند. در زمینه آنتروپی شانون و آنتروپی رنی آماره‌های مرتب و آماره‌های رکورد تحقیقاتی صورت گرفته است. پس از مروری مختصر به نتایج موجود در متون آماری در رابطه با میزان اطلاع آماره‌های مرتب و رکوردها، تعمیم نتایج به آنتروپی رنی باقیمانده از جمله مطالعات این پژوهش است.

واژه‌های کلیدی: آنتروپی رنی، متغیر تصادفی باقیمانده عمر، تابع نرخ شکست، آماره‌های مرتب، مقادیر رکورد.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

عنوان صفحه

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

پیشگفتار

نظریه اطلاع یکی از شاخه‌های نوین علمی است که در آن اطلاع از نقطه نظر ریاضی کمّی شده و مورد مطالعه قرار می‌گیرد. اصطلاح «نظریه اطلاع» یک مفهوم کلی است که بسیاری از مباحث نظریه ارتباطات مانند کدگذاری، پردازش اطلاعات و ... را در بر می‌گیرد. به طور کلی این باور وجود دارد که مبدع نظریه اطلاع کلود ای. شانون (۱۹۴۸) باشد. شانون با انتشار مقاله‌ای تحت عنوان نظریه ریاضی ارتباطات کوشید با استفاده از مفهوم بی‌نظمی (آنتروپی) در مبحث ترمودینامیک و مکانیک آماری، اطلاع را به صورت کمّی تعریف کند. همچنین وی از طریق تعریف آنتروپی به صورت ریاضی موفق شد به بسیاری از سؤالات مطرح در نظریه ارتباطات پاسخ دهد. در متون نظریه اطلاع، آنتروپی به عنوان یک معیار عدم حتمیت تلقی می‌شود. به دنبال مقاله شانون معیارهای دیگری برای اندازه‌گیری عدم حتمیت معرفی شدند. از جمله می‌توان آنتروپی رنی را نام برد که تعمیم آنتروپی شانون می‌باشد.

یکی از مباحثی که اخیراً در متون علمی مورد توجه قرار گرفته است مبحث نظریه اطلاع پویا است. در این مبحث مفاهیمی چون آنتروپی باقیمانده، آنتروپی رنی باقیمانده و... نقش کلیدی ایفا می‌کنند. در این رساله قصد داریم به مطالعه برخی ویژگی‌های آنتروپی رنی باقیمانده عمر بپردازیم. بدین منظور در فصل اول، ابتدا برخی از مفاهیم پایه در نظریه اطلاع را معرفی کرده و بعضی از خواص آن‌ها را ارائه می‌دهیم. در این فصل همچنین برخی مفاهیم قابلیت اعتماد، ترتیب‌های جزئی و برخی از توابع خاص که در فصل‌های آتی مورد نیاز هستند معرفی می‌شوند. در فصل دوم، ابتدا بعضی از ویژگی‌های آنتروپی رنی باقیمانده مانند خاصیت یکتایی و یکنوایی آن بررسی شده و سپس مقادیر این معیار، برای بعضی از توزیع‌های معروف در نظریه قابلیت اعتماد ارائه می‌گردد. در انتهای این فصل نیز کران‌هایی برای آنتروپی رنی باقیمانده ارائه می‌شود. در فصل سوم، ابتدا یک ترتیب جزئی بر اساس آنتروپی رنی باقیمانده متغیرهای تصادفی معرفی شده و سپس به مطالعه نتایج به دست آمده در این زمینه می‌پردازیم. همچنین در این فصل، مطالعاتی که تاکنون در زمینه مشخصه‌سازی برخی توزیع‌ها با استفاده از آنتروپی رنی باقیمانده آن‌ها صورت گرفته، مطرح می‌شود. استفاده از آنتروپی رنی باقیمانده برای اندازه‌گیری کشیدگی توزیع‌های عمر باقیمانده، از دیگر مواردی است که در این فصل مورد بحث قرار می‌گیرد.

در آمار و احتمال به خصوص در مدل‌سازی و استنباط آماری، داده‌های ترتیبی کاربرد فراوانی دارند. داده‌های ترتیبی از منظرهای مختلف مطرح می‌شوند که هریک تعابیر و کاربردهای خاص خود را دارند. دو مدل مشهور از این متغیرها، آماره‌های مرتب و مقادیر رکورد هستند. در فصل چهارم به بررسی خواص آنتروپی رنی باقیمانده و اطلاع رنی باقیمانده آماره‌های مرتب می‌پردازیم. بدین منظور ابتدا کران‌هایی برای آنتروپی رنی باقیمانده می‌یابیم و یکنوایی آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در ادامه نیز نتایجی در رابطه با اطلاع رنی باقیمانده آماره‌های مرتب بدست می‌آوریم. به همین ترتیب در این فصل، خواص آنتروپی رنی باقیمانده و اطلاع رنی باقیمانده آماره‌های رکورد بالا نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در پایان لازم به ذکر است که نتایج و قضایایی که در این تحقیق برای نخستین بار ارائه و اثبات می‌شوند، در متن با علامت (*) مشخص شده‌اند.

فصل اول

تعاریف و مفاهیم پایه

مقدمه

در این فصل مفاهیم و تعاریف پایه در نظریه اطلاع و مفاهیم مرتبط با آن که در فصل‌های آینده استفاده می‌شوند مورد بررسی قرار می‌گیرند. این فصل شامل ۷ بخش است. در بخش اول مروری بر مبدأ نظریه اطلاع خواهیم داشت. تعدادی از اندازه‌های اطلاع در حالت ایستا و پویا به ترتیب در بخش‌های دوم و سوم معرفی می‌شوند و بعضی ازخواص آنها نیز مورد بررسی قرار می‌گیرند. در بخش چهارم برخی از مفاهیم قابلیت اعتماد و در بخش پنجم ترتیب‌های تصادفی مرتبط با آنها که در فصل‌های آینده مورد نیاز هست بیان می‌شود. برخی از توابع ریاضی مانند تابع گامای ناقص و تابع بتای ناقص در بخش ششم معرفی می‌شوند و در نهایت در بخش هفتم مروری بر برخی از آماره‌های مرتب که در این رساله مورد بررسی قرار می‌گیرند، خواهیم داشت.

۱-۱ مبدأ نظریه اطلاع

برای درک بهتر مفهوم اطلاع از نقطه نظر رابطه با علم احتمال، ابتدا مثال زیر را مطرح می‌کنیم.

مثال ۱-۱ دو جمله زیر را در نظر بگیرید.

الف) من فردا مقداری غذا می‌خورم.

ب) قرار است فردا تمام ثروتمندان شهر تهران، همه اموال خود را به فقیران اهدا کنند.

حال این سؤال مطرح می‌شود که به نظر شما کدام یک از این دو جمله حاوی اطلاعات بیشتری است؟ طبیعی است که اکثر افراد جمله (ب) را جواب این سؤال می‌دانند. دلیل آن نیز این است که جمله (الف) عملاً عبارتی واضح است. در حالی که جمله (ب) خیلی غیر محتمل است. پس به طور خلاصه جمله (الف) دارای احتمال خیلی زیاد و اطلاع خیلی کم است و جمله (ب) دارای احتمال خیلی کم و اطلاع خیلی زیاد است. جمله (ب) به نوعی فرد را غافلگیر می‌کند، در حالیکه جمله (الف) چنین نیست. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مقدار اطلاع به میزان غافلگیری[1] فرد بستگی دارد.

حال عبارت زیر را در نظر بگیرید.

ج) $XQWQYKVZXPUVVBGXWQ$.

عکس العمل فوری به عبارت (ج) این است که گفته می‌شود این عبارت بی‌معنی است و از این‌رو اطلاعی را در بر نمی‌گیرد. اما از نقطه نظر زبان انگلیسی باید بدانیم که عبارت (ج) با احتمال کمی رخ می‌دهد (به طور مثال، Q حرفی است که به ندرت اتفاق می‌افتد و معمولاً با U دنبال می‌شود. در ضمن در عبارت (ج) هیچ حرف صداداری وجود ندارد). ازاین‌رو عبارت (ج) دارای ساختاری غافلگیرانه است.

از بحث بالا می‌توان نتیجه گرفت که «اطلاع» در زندگی روزمره دارای دو جنبه «غافلگیری» و «معناداری[2]» است. از سه مثال فوق، جمله (الف) معنا دارد اما غافلگیرانه نیست. عبارت (ج) غافلگیرانه است اما معنا ندارد و بالاخره جمله (ب) هر دو جنبه را دارد.

نظریه ریاضی «اطلاع» که قصد داریم در این رساله مورد توجه قرار دهیم، منحصراً مربوط به جنبه غافلگیری اطلاع است. دو دلیل برای این کار وجود دارد. اول این که نظریه اطلاع در اصل در متون مهندسی مخابرات توسعه داده شده است که فقط با عامل غافلگیری در ارتباط است. از طرف دیگر، توسعه جنبه معناداری از دیدگاه ریاضی بسیار مشکل می‌باشد. در نتیجه در این رساله، «اطلاع» محدود به معنای تکنیکی «اندازه غافلگیری» خواهد بود. بنابراین عباراتی مثل

---

1 *Surprise*

2 *Meaning*

عبارت (ج) با این‌که معنادار نیستند ممکن است به لحاظ داشتن غافلگیری زیاد دارای مقدار اطلاع بالا باشند. برای اطلاعات بیشتر در این مورد به اپلباوم[1] (۱۹۹۶) مراجعه کنید.

کلود ای. شانون[2] که مقاله‌اش را تحت عنوان «نظریه ریاضی ارتباطات» در سال ۱۹۴۸ منتشر کرد عموماً به عنوان مبدع نظریه اطلاع شناخته می‌شود. با این وجود، تعدادی پیشرو نسبت به شانون وجود دارند که کوشیده‌اند کارایی استفاده از سیستم ارتباطات را فرمول‌بندی کنند. اچ. نیکویست[3] در سال ۱۹۲۴، مقاله‌ای چاپ کرد که در آن چگونگی ارسال پیام‌ها (یا نوشته‌ها با استفاده از خود کلمات) را توسط یک کانال تلگراف، با ماکسیمم سرعت ممکن ولی بدون دگرشکلی فراهم نمود. با این وجود، هنوز توسط او «اطلاع» به این صورت استفاده نشده بود. آر. وی. ال. هارتلی[4] (۱۹۲۸) اولین فردی است که کوشید اندازه‌ای برای اطلاع تعریف کند. او در این باره به شکل زیر اقدام کرد.

فرض کنید که هر نماد یک پیام را بتوان به s طریق انتخاب کرد. اکنون با در نظر گرفتن پیامهای l نمادی می‌توان s^l پیام متمایز تشخیص داد. هارتلی مقدار اطلاع را به صورت لگاریتم تعداد پیام‌های قابل تشخیص تعریف می‌کند. اگر $H_H(s^l)$ نشان‌دهنده میزان اطلاع هارتلی باشد در حالتی که پیام‌ها دارای طول l هستند داریم

$$H_H(s^l) = \log(s^l) = l.\log(s).$$

بنابراین برای پیام‌های با طول یک داریم

$$H_H(s^1) = \log(s).$$

در نتیجه می‌توان نوشت

$$H_H(s^l) = lH_H(s^1).$$

این نتیجه با این درک ذهنی که اطلاع هر پیام به طول l، l برابر اطلاع پیامی به طول یک است سازگار می‌باشد. این مطلب دلیل موجه لگاریتم را در تعریف هارتلی نیز بیان می‌کند.

دستاورد بزرگ شانون این است که او نظریه‌های نیکویست و هارتلی را توسعه داد و با بهره‌وری از مفهوم شانس یا احتمال و با مرتبط ساختن اطلاع و عدم حتمیت، نظریه اطلاع امروزی را پایه‌گذاری کرد. به طور کلی، شانون اندازه اطلاع را بر مبنای مفهومی از اطلاع معرفی کرد که اندازه هارتلی را به عنوان حالت خاصی شامل می‌شود. شانون نشان

---

[1] *Applebaum*
[2] *Claude E. Shannon*
[3] *H. Nyquist*
[4] *R.V.L. Hartley*

داد کـه اگـر همـه نمادهـا بـا احتمـال برابـر رخ دهنـد آن‌گـاه انـدازه هـارتلی را مـی‌تـوان بـه عنـوان انـدازه اطـلاع تفسیر کرد.

۱-۲ اندازه‌های اطلاع ایستا

در ادامه، چند اندازه اطلاع مطرح را معرفی می‌کنیم.

۱-۲-۱ آنتروپی شانون

فرض کنید $(S, \mathcal{B}(S), P)$ یک فضای احتمال باشد (برای تعریف فضای احتمال به اتریا[1] و لاهیری[2] (۲۰۰۶) مراجعه کنید). می‌خواهیم مقدار اطلاع موجود در پیشامد $E \in \mathcal{B}(S)$ را اندازه‌گیری کنیم. از بخش ۱-۱ در مورد مفهوم اطلاع (البته از جنبه غافلگیری) دیدیم که میزان اطلاع موجود در پیشامد E، تابعی نزولی از $p = P(E)$ است. یعنی اگر میزان اطلاع موجود در پیشامد E را با $I(p)$ نمایش داده و قرار دهیم $q = P(F)$ که $F \in \mathcal{B}(S)$، آن‌گاه خواهیم داشت

الف) اگر $p \leq q$ آنگاه $I(p) \geq I(q)$.

حال می‌خواهیم بدانیم که هرگاه E و F مستقل باشند چه میزان اطلاعات در پیشامد $E \cap F$ وجود دارد؟ برای جواب دادن به این سؤال، ابتدا توجه می‌کنیم که میزان اطلاعات در پیشامد E برابر با $I(p)$ است. همچنین از آن جا که E و F مستقلند، دانستن این واقعیت که E رخ داده است تأثیری بر اطلاع از رخداد F ندارد. بنابراین منطقی به نظر می‌رسد که تصور کنیم میزان اطلاعات اضافی در پیشامد F برابر با $I(q)$ می‌باشد. از این‌رو میزان اطلاعاتی که در پیشامد $E \cap F$ است برابر با $I(p) + I(q)$ خواهد بود. از طرف دیگر

$$P(E \cap F) = P(E)P(F) = pq.$$

بنابراین تابع I باید در شرط زیر صدق کند

ب) اگر E و F دو پیشامد مستقل با احتمالات p و q باشند، آنگاه

$$I(pq) = I(p) + I(q).$$

با در نظر گرفتن شرایط (الف) و (ب)، منطقی به نظر می‌رسد که باید شرط زیر را نیز برای تابع اطلاع I قرار دهیم

ج) $I(p) \geq 0 \;;\; 0 \leq p \leq 1$.

---

[1] *Athreya*
[2] *Lahiri*

قضیه ۱-۱ تابع $I(p)$ در شرایط (الف) تا (ج) صدق می‌کند اگر و تنها اگر

$$I(p) = -K \log_a p \qquad (۱-۱)$$

که در آن K یک مقدار ثابت مثبت و $a \geq 1$ می‌باشد.

اثبات: به راحتی می‌توان نشان داد که اگر $I(p) = -K\, log_a\, p$ ، آنگاه $I(p)$ در شرایط (الف) تا (ج) صدق می‌کند و قسمت «اگر» قضیه ثابت می‌شود.

برای اثبات قسمت «تنها اگر» قضیه فرض کنید $I(p)$ تابعی باشد که در شرایط (الف) تا (ج) صدق می‌کند. اگر تابع G را به صورت زیر تعریف کنیم

$$G(p) = I(a^{-p})$$

که در آن $a \geq 1$ می‌باشد آنگاه با توجه به شرایط (الف) تا (ج) می‌بینیم که

$$\begin{aligned} G(p+q) &= I\left(a^{-(p+q)}\right) \\ &= I(a^{-p}a^{-q}) \\ &= I(a^{-p}) + I(a^{-q}) \\ &= G(p) + G(q). \end{aligned}$$

اما می‌توان نشان داد توابع یکنوای G که در رابطه تابعی فوق صدق می‌کنند توابعی به شکل

$$G(p) = Kp$$

هستند که در آن K یک مقدار ثابت است (ساهو[1] و ریدل[2] (۱۹۹۸)). بنابراین باید داشته باشیم

$$I(a^{-p}) = Kp.$$

با این فرض که $q = a^{-p}$ و به ازای ثابت مثبت K (برای اینکه شرط (ج) برقرار باشد) بدست می‌آوریم

$$I(q) = -K \log_a(q).$$

تبصره ۱-۱ معمولاً در رابطه (۱-۱)، $K = 1$ در نظر گرفته می‌شود. در این رابطه، پایه لگاریتم مشخص نشده است ولی باید بزرگتر از یک باشد تا همواره $I(p) \geq 0$. در بسیاری از موارد اینکه کدام پایه انتخاب شود اهمیتی ندارد. زیرا تعویض پایه فقط مقیاس واحدها را تغییر می‌دهد. رایج‌ترین حالت این است که $a = 2$ انتخاب شود. در این حالت I را برحسب بیت[3] می‌سنجند.

---

[1] *Sahoo*
[2] *Riedel*
[3] *Bit*

اکنون فرض کنید X یک متغیر تصادفی است که می‌تواند یکی از مقادیر $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ را به ترتیب با احتمالات $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ اختیار کند. میزان اطلاع موجود در متغیر تصادفی X به صورت زیر ارائه می‌شود

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2(p_i). \qquad (۲-۱)$$

رابطه (۱-۲) را به این صورت نیز می‌توان تعبیر کرد که میزان اطلاع در متغیر تصادفی X، متوسطی از میزان اطلاع هر یک از پیشامدهای ساده $\{x_1\}, \dots, \{x_n\}$ تعریف می‌شود. به عبارت دیگر تعریف زیر را داریم.

تعریف ۱-۱ اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $p_X(x)$ باشد، آنگاه آنتروپی شانون این متغیر تصادفی را که با $H(X)$ نمایش می‌دهیم عبارت است از

$$H(X) = -\sum_{x} p_X(x) \log p_X(x).$$

اولین بار شانون (۱۹۴۸) این معیار را معرفی کرد و آن را آنتروپی شانون نامید. لازم به ذکر است که در سراسر این رساله، منظور از log، لگاریتم طبیعی (لگاریتم در پایه عدد نپر) است.

آنتروپی شانون برای متغیر تصادفی پیوسته (به طور مشابه) به شکل زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱-۲ آنتروپی شانون متغیر تصادفی پیوسته X با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ به صورت زیر است

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \log f_X(x)\, dx.$$

آنتروپی شانون برای متغیر تصادفی پیوسته را آنتروپی تفاضلی[1] نیز می‌نامند.

برخی از ویژگی‌های آنتروپی شانون عبارتند از

الف) در مورد متغیرهای تصادفی گسسته با تکیه‌گاه متناهی، $H(X) \geq 0$ و آنتروپی صفر می‌شود اگر و تنها اگر حتمیت کامل وجود داشته باشد یعنی همه احتمال سیستم به یک پیشامد اختصاص یافته باشد. اما آنتروپی شانون متغیرهای تصادفی پیوسته بر روی $[-\infty, +\infty]$ مقدار می‌گیرد.

ب) برای متغیرهای تصادفی گسسته، همواره $H(X) \leq \log n$ و برابری فقط وقتی رخ می‌دهد که

$$p_X(x) = \frac{1}{n} \quad ; \; x = 1,2,\dots,n.$$

[1] *Differential entropy*

یعنی وقتی همه پیشامدها هم احتمال‌اند بیشترین عدم حتمیت، از این نظر که کدام پیشامد رخ خواهد داد پیش می‌آید. در حالت پیوسته نیز ماکزیمم مقدار آنتروپی مربوط به توزیع یکنواخت بر بازه‌ای برابر با تکیه‌گاه متغیر مورد نظر است.

ج) $H(X)$ نسبت به f مقعر است (تعریف تابع مقعر در پیوست (۱) آمده است).

د) آنتروپی شانون تحت تبدیلات یک به یک پایا نمی‌باشد. به راحتی می‌توان نشان داد که اگر Y یک متغیر تصادفی و $Y = T(X)$ یک تبدیل یک به یک باشد آنگاه

$$H(Y) = H(X) - E\left(\log\left|\frac{dT^{-1}(Y)}{dY}\right|\right).$$

آنتروپی، در شاخه‌های مختلفی از علم آمار و رشته‌های مشابه استفاده می‌شود. برای جزئیات بیشتر در مورد آنتروپی شانون و معیارهای مرتبط با آن به کاور[1] و توماس[2] (۲۰۰۶) مراجعه کنید.

۱-۲-۲ آنتروپی رنی

در متون علمی، مجموعه اصول و فرضیات مختلفی توسط پژوهشگران ارائه شده است که آنتروپی شانون را مشخص می‌کنند. اصولی که توسط فادیو[3] (۱۹۵۶) در این مورد ارائه شد به صورت زیر است.

اگر $H(\boldsymbol{P})$ نشان‌دهنده میزان اطلاع در بردار احتمال $\boldsymbol{P} = (p_1, \dots, p_k)$ باشد آن‌گاه باید در شرایط زیر صدق کند.

الف) $H[p_1, p_2, \dots, p_k]$ به ازای $k = 2, \dots, n$ تابعی متقارن باشد. یعنی ترتیب احتمال‌های $p_1, p_2, \dots, p_k$ بر مقدار آن تأثیر نداشته باشد.

ب) برای $0 \le p \le 1$، $H(p, 1-p)$ تابعی پیوسته از p باشد.

ج) $H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$.

د) به ازای هر $0 \le t \le 1$،

$$H[tp_1, (1-t)p_1, p_2, \dots, p_k] = H[p_1, p_2, \dots, p_k] + p_1 H(t, 1-t).$$

[1] Cover
[2] Thomas
[3] Fadeev

ثابت می‌شود که شرط‌های (الف)، (ب)، (ج)، (د) کمیت $H(\boldsymbol{P})$ را به طور یکتا مشخص می کنند. حال شرط دیگری را به جای (د) به صورت زیر در نظر می گیریم.

فرض کنید $\boldsymbol{P} = (p_1, \dots, p_k)$ و $\boldsymbol{Q} = (q_1, \dots, q_m)$ دو بردار احتمال باشند. حاصلضرب $\boldsymbol{P}$ و $\boldsymbol{Q}$ را با $\boldsymbol{P} * \boldsymbol{Q}$ نشان می‌دهیم که شامل احتمالات $p_i q_j$ به ازای $j = 1, \dots, m$ و $i = 1, \dots, k$ است. در این صورت با استفاده از رابطه (۱-۲) می‌توان نوشت

$$H(\boldsymbol{P} * \boldsymbol{Q}) = H(\boldsymbol{P}) + H(\boldsymbol{Q}).$$

در واقع شرط فوق همان ویژگی جمع‌پذیری است و بیانگر این مطلب است که آنتروپی دستگاهی متشکل از دو دستگاه مستقل، برابر با مجموع آنتروپی آن دو دستگاه می‌باشد. از آن جا که تساوی فوق ضعیفتر از شرط (د) است نمی‌توان آن را جایگزین شرط (د) نمود. از جمله کمیت‌هایی که در شرایط (الف)، (ب)، (ج) و تساوی بالا صدق می کنند آنتروپی مرتبه α (آنتروپی رنی) است که توسط رنی[1] (۱۹۶۱) به شکل زیر ارائه شد

$$H_\alpha(\boldsymbol{P}) = \frac{1}{1-\alpha} \log \sum_{i=1}^{k} p_i^\alpha \qquad , \alpha > 0 \, , \alpha \neq 1.$$

به عبارت دیگر تعریف زیر را داریم.

تعریف ۱-۳ اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $p_X(x)$ باشد، آنگاه آنتروپی رنی، که با $H_\alpha(X)$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از

$$H_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \log \sum_x p_X^\alpha(x) \quad , \alpha > 0 \, , \alpha \neq 1.$$

رنی (۱۹۶۱) برای متغیرهای تصادفی پیوسته آنتروپی رنی را مشابه با حالت گسسته به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۱-۴ برای متغیر تصادفی پیوسته X با تابع چگالی f، آنتروپی رنی به صورت

$$H_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \log \int_{-\infty}^{+\infty} f_X^\alpha(x) dx$$

تعریف می‌شود.

به راحتی می‌توان نشان داد که برای هر دو متغیر تصادفی گسسته و پیوسته داریم

$$\lim_{\alpha \to 1} H_\alpha(X) = H(X).$$

---

[1] $R'enyi$