دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

یک روش تکراری سریع برای حالت گسسته معادله انتگرال ولترا– فردهلم

استاد راهنما

دکتر صداقت شهمراد

استاد مشاور

دکتر قدرت عبادی

پژوهشگر

سمیه فاضلی

۱۳۸۷

تقدیم به:

پدر بزرگوار

و

مادر مهربانم

به پاس زحمات بیدریغشان

و

برادر و خواهر عزیزم

تقدیر و تشکر

درود و سپاس یگانهٔ جاوید را که آرام گیرد دلها با یاد او و آرامش پذیرد پریشان عالمی با نام او. سپاس و صدها سپاس به پاس بهترین نعمتی که به ما عطا فرمودی: نعمت خداوندیت. پروردگارا تو را بدانسان که تو باشی و بدانسان که سزاوار تو باشد ستایش باید و به نعمت‌های بی‌پایان تو که قطره‌های باران و ریگ های بیابان شمارش نکند، سپاس بی‌پایان می‌گویم. می‌دانم که نخواهم توانست سپاس خود را در قالب کلمات درآورده و شکرگزار تو باشم. شکر و سپاس پروردگار یکتا را که لطف و عنایت او در تمام مراحل زندگی باعث موفقیت و پیروزی می‌گردد.

از استاد راهنمای بزرگوارم آقای دکتر صداقت شهمراد که در به ثمر رسیدن این پژوهش از راهنمائیهای مستمر و بیدریغشان بهره‌مند بوده‌ام، کمال تشکر را دارم و برایشان توفیق روز افزون از درگاه خداوند متعال خواستارم.

از استاد ارجمند آقای دکتر قدرت عبادی مشاور این پایاننامه، که با راهنمائیهای ارزشمندشان مرا یاری نمودند سپاسگزارم و از آقای دکتر مهرداد لکستانی که زحمت داوری این پایاننامه را تقبل نموده‌اند تشکر و قدردانی مینمایم و از کلیه اساتید گروه ریاضی کاربردی تقدیر و تشکر می‌نمایم.

از خانواده عزیزم که در تمام طول تحصیل مایه دلگرمی و پشتوانه من بوده‌اند سپاسگزارم و از دوستان و همکلاسیهای عزیزم که همواره مشوق من بوده‌اند و نهایت دوستی را در حق این حقیر به جا آورده‌اند سپاسگزارم و برایشان آرزوی بهروزی و موفقیت دارم.

نام خانوادگی دانشجو: فاضلی		نام: سمیه

عنوان: یک روش تکراری سریع برای حالت گسسته معادله انتگرال ولترا– فردهلم

استاد راهنما : دکتر صداقت شهمراد

استاد مشاور: دکتر قدرت عبادی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: معادلات دیفرانسیل دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی		تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۸۷		تعداد صفحه: ۸۲

کلید واژه‌ها: معادلهٔ انتگرال ولترا– فردهلم، روش نیستروم، روش انتگرالگیری عددی مستقیم، هستهٔ تباهیده، روش‌های تکراری

چکیده

این پایاننامه بر اساس [۷] تنظیم شده است. حالت کلی معادلهٔ انتگرال ولترا– فردهلم به صورت

$$u(t,x) = f(t,x) + \int_{\circ}^{t}\int_{\Omega} G(t,s,x,\xi,u(s,\xi))d\xi\, ds$$

می‌باشد که در آن $u(t,x)$ تابع مجهول و توابع G و f توابع معلوم بر حسب متغیرهایشان هستند. در این پایاننامه از روش‌های انتگرالگیری عددی مستقیم (DQ) و نیستروم برای گسسته‌سازی در زمان و فضا استفاده شده است. برای کاهش هزینهٔ محاسباتی از روش‌های تکراری استفاده می‌کنیم و برای کاهش هزینهٔ محاسبات تابعی از تقریب هسته با هستهٔ تباهیده (با استفاده از

درونیابی لاگرانژ) استفاده می‌کنیم.

فهرست مطالب

مقدمه

در این پایان نامه به حل عددی معادلهٔ انتگرال ولترا– فردهلم غیر خطی به شکل کلی

$$u(t,x) = f(t,x) + \int_0^t \int_\Omega G(t,s,x,\xi,u(s,\xi))d\xi ds \qquad (۱.۰)$$

می‌پردازیم که در آن $t \in [0,T]$ و Ω ناحیهٔ بسته‌ای از R^n می‌باشد. مدل بندی ریاضی برخی مسایل گسترش در فضا و زمان مانند شیوع بیماری واگیردار در میان جمعیت ساکن در منطقهٔ Ω منجر به معادلهٔ انتگرال ولترا– فردهلم غیر خطی می‌شود [۸، ۱۳]. هم‌چنین در نظریهٔ مسایل مقدار مرزی غیر خطی سهموی[۸] و در بسیاری از مدلهای زیستی و فیزیکی این معادله کاربرد دارد. بنابراین حل این معادله از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.از آنجا که اغلب اینگونه معادلات به صورت تحلیلی قابل حل نیستند به حل عددی آن می‌پردازیم.

در [۱۱] حالت خطی معادلهٔ (۱.۰) و در [۴] حالت کلی این معادله با روشهای هم‌محلی زمان پیوسته و زمان گسسته بررسی شده است. در [۹] روش نیستروم ذوذنقه‌ای برای هر دو متغیر فضا و زمان به‌کار برده شده است و از برونیابی ریچاردسون برای افزایش دقت جواب عددی استفاده شده است. در [۶] روشهای گسسته سازی زمانی برای معادلهٔ (۱.۰) در حالت $d = 1,2$ ابتدا گسسته‌سازی برای متغیر فضا صورت می‌گیرد و سپس هر زیر بازهٔ افراز شده از بازهٔ فضا به p زیر بازهٔ دیگر با نقاط گرهی x_{ij}، $i = 0,1,\cdots,M, \quad j = 0,1,\cdots,p$ افراز شده و در نقاط گرهی متحد قرار داده شده است و با گسسته‌سازی زمانی دستگاه معادلات غیرخطی ولترای حاصل دستگاه جبری غیرخطی با بعد $Mp \times Mp$ حاصل شده است.

در فصل اول این پایان‌نامه به تعریف معادلهٔ انتگرال و انواع آن پرداخته و وجود ومنحصربفردی جواب (۱.۰) را تحت فرض‌های خاصی بررسی و ثابت کرده و یک مدل‌بندی از مسالهٔ زیستی را توضیح داده‌ایم. در فصل دوم به توضیح روش تصویری هم محلی و روش

نیستروم پرداخته‌ایم. در فصل سوم یک روش تکراری سریع برای حل عددی (۱.۰) ارائه کرده‌ایم. برای گسسته سازی در فضا و زمان به ترتیب از روشهای نیستروم و DQ استفاده کرده‌ایم و با حل دستگاه با روش موازی هزینهٔ محاسبات تا اندازهٔ چشمگیری کاهش می‌یابد. در انتها به ارائه مثالهای عددی می‌پردازیم. برنامه‌های مربوط به این روش را در دو حالت هستهٔ تباهیده و تقریب هسته با هستهٔ تباهیده به زبان $MATLAB$ در بخش ضمیمه آورده شده است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

مقدمه

بخش عمدهٔ مطالب این فصل از[۱] و [۸، ۱۲] گردآوری شده است. در این فصل معادلهٔ انتگرال را معرفی نموده و به بررسی و مطالعهٔ انواع آن می‌پردازیم. سپس معادلهٔ انتگرال ولترا— فردهلم را تعریف نموده و یک مثال کاربردی در مورد رشد بیماری همه‌گیر که منجر به معادلهٔ ولترا— فردهلم می‌شود را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس به بررسی وجود و یگانگی جواب معادلهٔ انتگرال ولترا— فردهلم می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱ یک معادله انتگرال معادله‌ای است که درآن تابع مجهول در زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود و به شکل کلی

$$F(x,y(t),\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x,t,y(t))dt)=0 \qquad (۱.۱)$$

که در آن $y(x)$ تابع مجهول است. تابع $G(x,t,y(t))$ هستهٔ معادله انتگرال نامیده می‌شود و$\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال هستند.

۱.۱ انواع معادلات انتگرال

۱.۱.۱ معادلات انتگرال خطی فردهلم

آن دسته از معادلات انتگرال که در آنها هر دو حد انتگرالگیری اعداد ثابت هستند معادلات انتگرال فردهلم هستند وشکل خطی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi(x)y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)y(t)dt, \quad a\le x,t\le b \qquad (۲.۱)$$

که در آن هستهٔ $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ و پارامتر λ معلوم هستند و $y(x)$ تابع مجهول است.

با توجه به مقدار $\phi(x)$ معادلات انتگرال خطی فردهلم به دو نوع زیر تقسیم می‌شود:

۱. اگر $\phi(x) = 0$ آنگاه معادله(۲.۱) به شکل زیر در می آید:

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt = 0, \quad a \leq x, t \leq b$$

این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع اول می نامند.

۲. اگر $\phi(x) \equiv 1$ آنگاه معادله (۲.۱) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt, \quad a \leq x, t \leq b \tag{۳.۱}$$

که آن را معادلهٔ انتگرال فردهلم نوع دوم می‌گویند.

۲.۱.۱ معادلات انتگرال خطی ولترا

معادلاتی هستند که در آنها حداقل یکی از حدود بالا یا پایین انتگرال به صورت تابعی از x ظاهر می‌شوند و به شکل استاندارد زیر می‌باشند:

$$\phi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)y(t)dt, \quad a \leq x, t \leq b \tag{۴.۱}$$

تابع مجهول $y(x)$ در زیر علامت انتگرال به صورت خطی می‌باشد.

اگر هستهٔ $k_1(x,t)$ به صورت

$$k_1(x,t) = \begin{cases} 0 & x < t \leq b \\ k(x,t) & a < t \leq x \end{cases}$$

نوشته‌شود آنگاه معادله انتگرال (۴.۱) تبدیل به معادله انتگرال (۲.۱) با هستهٔ $k_1(x,t)$ می‌شود.

مشابه معادله انتگرال فردهلم با توجه به مقدار$\phi(x)$ معادلات انتگرال ولترا به دو نوع زیر تقسیم می‌شوند:

۱. اگر $\phi(x) \equiv 0$ آنگاه معادله (۴.۱) به معادله

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)y(t)dt = 0 \tag{۵.۱}$$

تبدیل خواهد شد که آن را معادله انتگرال ولترا نوع اول گویند.

۲. اگر $\phi(x) \equiv 1$ آنگاه معادلهٔ(۴.۱) به معادلهٔ

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)y(t)dt \tag{۶.۱}$$

تبدیل می‌شود که این معادله را معادله انتگرال ولترا نوع دوم می‌نامند.

۳.۱.۱ معادلات انتگرال غیر خطی

در معادلات انتگرال خطی تابع مجهول $y(x)$ در زیر علامت انتگرال به صورت خطی یعنی باتوان ۱ ظاهر می‌شود. اگر در زیر علامت انتگرال عبارتی نظیر $g(x,t,y(t))$ که g تابع غیر خطی بر حسب $y(t)$ می‌باشد، داشته باشیم آنگاه معادله انتگرال مورد نظر معادله انتگرال غیر خطی خواهد بود که به دو نوع زیر تقسیم می‌شود:

۱. معادله انتگرال غیر خطی Urysohn: آن دسته از معادلات غیر خطی که به شکل کلی

$$y(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t,y(t))dt$$

می‌باشند معادلات انتگرال Urysohn می‌باشند.

مثال :

$$y(x) = f(x) + \lambda \int \exp(xt + y(t))dt.$$

۲. معادله انتگرال غیر خطی Hammerstein: معادلات به شکل کلی

$$y(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t)F(y(t))dt$$

می‌باشد که در آن هسته به صورت $g(x,t,y(t)) = k(x,t)F(y(t))$ است که F تابع غیر خطی بر حسب تابع مجهول است.

مثال:

$$y(x) = \exp(x) + \int \exp(x+t)y^2(t)dt.$$

۴.۱.۱ معادله انتگرال منفرد

معادله انتگرال که در آن حداقل یکی از حدود پایین یا بالا یا هر دو نامتناهی باشند یا هسته معادله انتگرال در یک نقطه یا نقاط بیشتری از دامنه انتگرالگیری نامتناهی باشد را معادله انتگرال منفرد می‌نامند.

مثال :

$$y(x) = 2x + 6\int_0^\infty sin(x-t)y(t)dt$$
$$y(x) = 1 - 2\sqrt{x} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}y(t)dt.$$

۵.۱.۱ دستگاه معادلات انتگرال

دستگاه معادلات انتگرال به صورت کلی

$$y_i(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g_i(x,t,y_1(t),\ldots,y_m(t))dt = f_i(x), \quad \forall x \in [a,b], \quad i = 1,2,\ldots,m$$

می‌باشد که در آن توابع $f_i(x)$ و $g_i(x,t,y_1(t),\cdots,y_m(t))$ توابع هموار معلوم بر حسب متغیرهایشان هستند و $y_i(t)$ ها به ازای $i = 1,2,\cdots,m$ توابع مجهول هستند که باید تعیین شوند.

دستگاه معادلات انتگرال را می‌توان به صورت یک معادله برداری بیان کرد. برای این منظور توابع برداری به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$Y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x)\\ \vdots \\ y_m(x)\end{pmatrix},\quad F(x)=\begin{pmatrix} f_1(x)\\ \vdots \\ f_m(x)\end{pmatrix},\quad G(x,t,Y(t))=\begin{pmatrix} g_1(x,t,y_1(t),\dots,y_m(t))\\ \vdots \\ g_m(x,t,y_1(t),\dots,y_m(t))\end{pmatrix}$$

بنابراین می‌توان دستگاه معادلات انتگرال را به صورت برداری

$$Y(x)=F(x)+\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x,t,Y(t))dt$$

نوشت.

دستگاه فوق را خطی گویند هرگاه داشته باشیم:

$$g_i(x,t,y_1(t),\dots y_m(t))=\sum_{j=1}^{m} K_{i,j}(x,t)y_j(t),\quad \forall i=1,\dots,m$$

و اگر قرار دهیم:

$$(K(x,t))_{i,j}=K_{i,j}(x,t)$$

آنگاه معادلهٔ ماتریسی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Y(x)=F(x)+\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)Y(t)dt,\qquad x\in[a,b]$$

که در آن $K(x,t)$ را هستهٔ دستگاه معادلات انتگرال می‌نامیم.

۶.۱.۱ معادله انتگرال ولترا– فردهلم

معادله انتگرال ولترا– فردهلم غیر خطی به صورت

$$u(t,x)=f(t,x)+\int_0^t\int_\Omega G(t,s,x,\xi,u(s,\xi))\,d\xi ds \qquad (۷.۱)$$

می‌باشد که در آن $t \in [0,T]$ و$x \in \Omega$ و Ω زیر مجموعهٔ بسته‌ای ازR^d می‌باشد. معادله انتگرال فوق نسبت به متغیر x از نوع فردهلم و نسبت به متغیر t از نوع ولترا می‌باشد.
چنانچه هسته معادله (۷.۱) به صورت $G(t,s,x,\xi)g(u(s,\xi))$ باشد، آن را معادله انتگرال ولترا— فردهلم غیرخطی از نوع هامرشتاین می‌نامیم.

۲.۱ منشا ظهور معادلات انتگرال ولترا— فردهلم

این دسته از معادلات در بسیاری از مسائل گسترش در فضا و زمان مانند شیوع یک بیماری واگیردار در میان جمعیت ساکن در منطقهٔ Ω، (ر.ک.[۸، ۱۳])، همچنین در نظریهٔ مسائل مقدار مرزی سهموی غیر خطی [۸] و در بسیاری از مسائل زیستی و فیزیکی کاربرد دارد. در اینجا مدل‌بندی مسالهٔ شیوع بیماری را بیان می‌کنیم[۸].

۱.۲.۱ مدل بندی مساله شیوع بیماری

جمعیت ساکن در ناحیهٔ Ω (Ω زیر مجموعهٔ بسته‌ای از R^n می‌باشد) را در نظر می‌گیریم که در معرض یک بیماری واگیردار قرار دارند. هدف در اینجا به دست آوردن معادله‌ای برای برآورد میزان رشد بیماری همه‌گیر در میان جمعیت ساکن در ناحیه بر اساس فرضهای سادهٔ داده شده می‌باشد. تنها پدیدهٔ پویایی که در نظر می‌گیریم آلودگی می‌باشد. طبق معمول در مطالعات، تاثیر تغییراتی مانند تولد، مهاجرت و ... را نادیده می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم وابستگی فضایی هر نقطه به نقطهٔ دیگر وجود دارد، یعنی یک آلودگی در نقطهٔ x_1 از فضا می‌تواند در تعداد افراد مستعد در مکان x_2 تاثیر گذارد. برای توضیح بیشتر این ارتباط می‌توان آتش‌سوزی در جنگل یا وزش بادهای حامل قارچ یا هاگ که باعث بیماری گیاهی می‌شوند را در نظر گرفت.

فرض کنیم $S(t,x)$ و$I(t,x)$ به ترتیب بیانگر افراد مستعد بیماری و افراد آلوده شده در زمان t و در مکان x باشند. فرض کنید $i(t,\tau,x)d\tau$ چگالی افراد آلوده شده باشند که در فاصلهٔ زمانی $t-\tau$ و $t-\tau-d\tau$ به بیماری مبتلا شده‌اند بنابراین:

$$I(t,x)=\int_0^\infty i(t,\tau,x)d\tau \tag{۸.۱}$$

فرض می‌کنیم اندازهٔ جمعیت بزرگ است و توابع S و I و i توابع حقیقی مقدار پیوسته و یا حتی مشتقپذیر پیوسته از متغیر هایشان هستند.

$B=B(t,x)$ را نسبت افراد در معرض خطر که آلوده شده‌اند، تعریف می‌کنیم. فرضهای اساسی به صورت زیر هستند:

(i) بیماری امنیت و مصونیت دائمی ایجاد می‌کند بنابراین انتقال از I به S اتفاق نمی‌افتد.

(ii) تابع نامنفی $A=A(\tau,x,\xi)$ داده شده، بطوریکه

$$B(t,x)=\int_0^\infty\int_\Omega i(t,\tau,\xi)A(\tau,x,\xi)\,d\xi d\tau. \tag{۹.۱}$$

تعاریف و فرضهای بالا منجر به دستگاه معادلات دینامیکی به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t,x)=-S(t,x)\,B(t,x) \tag{۱۰.۱}$$

$$i(t,0,x)=\frac{\partial S}{\partial t}(t,x) \tag{۱۱.۱}$$

$$i(t,\tau,x)=i(t-\tau,0,x) \tag{۱۲.۱}$$

تابع i را از (۹.۱) بوسیلهٔ (۱۱.۱) و (۱۲.۱) حذف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} i(t,\tau,x) &= i(t-\tau,0,x)=i(u,0,x)=\frac{\partial S}{\partial u}(u,x)\\ &= \frac{\partial S}{\partial t}(t-\tau,x)\,\frac{\partial t}{\partial u}=\frac{\partial S}{\partial t}(t-\tau,x) \end{aligned} \tag{۱۳.۱}$$

که در آن $u = t - \tau$. بنابراین از رابطهٔ (۹.۱) خواهیم داشت:

$$B(t,x) = \int_0^\infty \int_\Omega \frac{\partial S}{\partial t}(t-\tau,x)\, A(\tau,x,\xi)\, d\xi\, d\tau$$

با جایگذاری رابطهٔ فوق در (۱۰.۱) معادله‌ای بر حسب S به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t,x) = -S(t,x) \int_0^\infty \int_\Omega \frac{\partial S}{\partial t}(t-\tau,\xi)\, A(\tau,x,\xi)\, d\xi d\tau \qquad (۱۴.۱)$$

جواب S از معادلهٔ (۱۴.۱) برای $-\infty < t \leq T$ تعریف شده‌است که T مقداری متناهی است. یک مسألهٔ مقدار اولیهٔ مناسب با استفاده از تعیین نقاط اولیهٔ

$$i(0,\tau,x) = i_0(\tau,x), \quad S(0,x) = S_0(x)$$

و با محدود کردن معادلهٔ دینامیکی برای $t > 0$ حاصل می‌شود. بنابراین به جای (۱۴.۱) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t,x) = -S(t,x)\{\int_0^t \int_\Omega \frac{\partial S}{\partial t}(t-\tau,\xi)\, A(\tau,x,\xi)\, d\xi d\tau + h(t,x)\} \qquad (۱۵.۱)$$

که در آن:

$$h(t,x) = \int_t^\infty \int_\Omega \frac{\partial S}{\partial t}(t-\tau,\xi) A(\tau,x,\xi)\, d\xi\, d\tau$$

از روابط (۱۳.۱) و (۱۲.۱) و با تغییر متغیر $w = \tau - t$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t-\tau,\xi) = i(t-\tau,0,\xi) = i(-w,0,\xi) = i(0,w,\xi) = i_0(w,\xi)$$

بنابراین

$$h(t,x) = \int_0^\infty \int_\Omega i_0(\tau,\xi)\, A(t+\tau,x,\xi)\, d\xi d\tau. \qquad (۱۶.۱)$$

نهایتاً با فرض اینکه $S_0(x) > 0$ به ازای هر $x \in \Omega$، از رابطهٔ (۱۵.۱) نسبت به t انتگرال می‌گیریم. با تغییر ترتیب انتگرالگیری معادلهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$u(t,x) = \int_0^t \int_\Omega g(u(t-\tau,\xi))\, S_0(x)\, A(\tau,x,\xi)\, d\xi d\tau + f(t,x) \tag{۱۷.۱}$$

که در آن:

$$u(t,x) = -Log \frac{S(t,x)}{S_0(x)} \tag{۱۸.۱}$$

$$g(y) = 1 - exp(-y) \tag{۱۹.۱}$$

$$f(t,x) = \int_0^t h(\tau,x)\, d\tau. \tag{۲۰.۱}$$

۳.۱ وجود و یگانگی جواب معادله انتگرال ولترا– فردهلم

حالت کلی معادله (۷.۱) را در نظر می‌گیریم که $u(t,x)$ تابع مجهول می‌باشد و فرض می‌کنیم $u, f \in C[D, R^n]$ و $G \in C[D^2 \times R^n, R^n]$ که $D = [0,T] \times \Omega$ و $T > 0$ متناهی است و می‌تواند تا اندازهٔ دلخواه بزرگ باشد. در اینجا مسالهٔ اساسی وجود و یگانگی جواب معادله را بررسی می‌کنیم. قضیه معروف نگاشت انقباض برای اثبات نتایج به کار برده می‌شود.

تعریف ۲.۱ گوی بسته به شعاع r و مرکز z را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B(z,r) = \{x \mid \|x - z\| \leq r\}.$$

تعریف ۳.۱ نگاشت $T : X \to X$ در $B(z,r)$ را نگاشت انقباض گویند هرگاه ثابتی چون $0 \leq \theta < 1$ موجود باشد بطوریکه:

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \leq \theta \|x_1 - x_2\|, \ \ \forall x_1, x_2 \in B(z,r).$$