دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

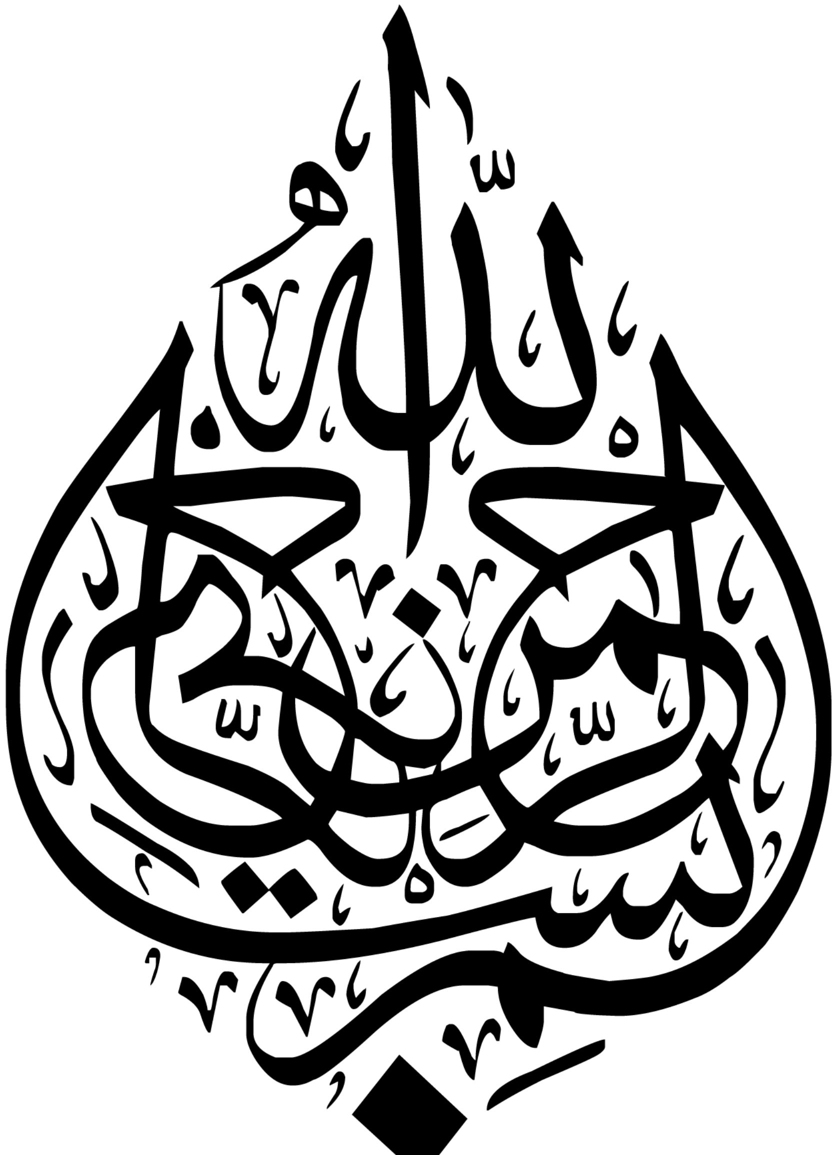
پایان‌نامه
جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی

# یک الگوریتم جدید نقطه‌درونی تعقیب مسیر اولیه-دوگان با گام کامل نسترو-تاد برای بهینه‌سازی متقارن

استاد راهنما
دکتر بهروز خیرفام

پژوهشگر
سپیده قزوینه

شهریور ماه ۱۳۹۲
تبریز- ایران


بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

به دامان سبز مادرم و دست های خسته پدرم شمع های فروزانی که شعله آنها چراغ راهم بود،

برادرزاده ام رضا و خواهرزاده ام پارسا و عشق پاک زندگی ام.

خدایا!

جز نقش تو در نظر نیامد ما را

جز کوی تو رهگذر نیامد ما را.

خداوندا!

من از دنیا و آنچه در آن است دل برکنده و با همه وجودم به تو روی آورده ام و از کسی که به احسان تو نیازمند است، دل برکنده ام و دانستم که درخواست حاجتمند از حاجتمند دیگر از سبکی اندیشه و گمراهی خود اوست.

پس از این جهت ای مولای من، تنها مرجع درخواست های من تویی نه کسان دیگر و تنها تو رواکننده حاجات و خواهش های من هستی نه مطلوبی دیگر، لذا پیش از آنکه کسی را بخوانم تو را می خوانم و بس.

مولای من در چشم انداز امید من احدی با تو شریک نیست و در دعای من با تو هیچ کس همراه من نیست.

مولای من! به سوی تو می آیم و به تو امید دارم و تو را می خوانم و بر تو و وجود و کرم تو توکل دارم، کار مرا آن گونه به سامان برسان که تو سزاوار آنی نه آن طور که من در خور آنم، بر من شفقت و رحمت آور ای مهربان ترین مهربانان.

## سپاس گزاری...

سپاس خداوندی را که به من آموخت در لحظه‌های شادی شکرگزار باشم و فراموش نکنم، تمام داشته‌ها و دانسته‌هایم از لطف بی‌منت اوست و آموخت که در لحظه‌های اندوهم صبور باشم که همه‌ی غم‌ها رفتنی است و سربلند کسی است که مطیع تقدیر و حکمت الهی باشد.

اینک به پاس لطف الهی که پایان‌نامه‌ی حاضر، آماده شده است برخود واجب می‌دانم از حمایت‌های بی‌دریغ، بذل توجه و مساعدت‌های استاد راهنمایم جناب آقای دکتر **بهروز خیرفام** سپاس‌گزاری نمایم.

و از آقای دکتر **علیرضا غفاری حدیقه** و همچنین آقای دکتر **علی خانی** نیز سپاسگزارم که قبول زحمت فرموده و داوری این تحقیق را برعهده گرفتند.

و بوسه می‌زنم بر دستان مادر و پدر عزیزم که توانستم زیر سایه مهربانی و صبوری‌هایشان در راه کسب علم و دانش قدم بردارم. هم‌چنین تشکر می‌کنم از برادران و خواهران عزیزم، به پاس کمک‌های بی‌دریغ و دلگرمی‌های بی‌پایان‌شان، که بهترین پشتیبان من بودند. بر خود واجب می‌دانم از زحمات دوست عزیزم خانم دکتر کلثوم احمدی تشکر کنم. همچنین از همه دوستانم به پاس محبت‌شان که مایه دلگرمی من بود سپاسگزارم. از هم‌اتاقی‌های عزیزم خانم زینب اسلامی و خانم مریم صیدی که با محبت و عشق پاک خود تحمل غربت را بر من سهل نمودند سپاسگزارم. در پایان از دو دوست عزیز و مهربانم خانم سوسن قادری و خانم طاهره خدامرادی تشکر می‌کنم اما سوسن جان و طاهره مهربانم نمی‌دانم کدامین جمله را برای توصیف محبت‌هایتان بنویسم، نمی‌دانم چگونه شما را توصیف کنم، دوستانی از جنس بلور، آسمانی و مهربان، چقدر زیبا واژه‌ها را آسمانی می‌کنید.

سپیده قزوینه

شهریورماه ۱۳۹۲

# چکیده

در این پایان‌نامه با استفاده از جبر جردن اقلیدسی به مطالعه الگوریتم نقطه درونی تعقیب مسیر اولیه-دوگان برای مسائل بهینه‌سازی متقارن و مسائل مکمل خطی روی مخروط‌های متقارن می‌پردازیم. الگوریتم‌های پیشنهاد شده هر کدام بر پایه‌ی شیوه‌ای جدید برای یافتن جهت‌های جستجو استوار هستند. این الگوریتم‌ها در هر تکرار فقط از گام‌های کامل نسترو-تاد استفاده می‌کنند. در پایان بهترین کران تکرار رایج برای روش‌های بهنگام سازی کوچک نتیجه خواهد شد. این کران تکرار $O(\sqrt{r}\log\frac{r}{\varepsilon})$ است که در آن $r$ رتبه جبر جردن اقلیدسی وابسته و $\varepsilon$ دقت مطلوب است.

**کلمات کلیدی**: بهینه‌سازی متقارن، مسئله مکمل خطی مخروط متقارن، روش‌های نقطه درونی، جبرهای جردن اقلیدسی، روش‌های بهنگام‌سازی کوچک.

# پیشگفتار

بهینه‌سازی شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که به طور وسیعی در زمینه‌های علوم، مهندسی، اقتصاد، مدیریت، صنعت و دیگر زمینه‌ها کاربرد دارد. بهینه‌سازی خطی $(LO)$ [۱] یک تابع خطی را روی قیدهای خطی بیشینه یا کمینه می‌کند، که این قیدهای خطی می‌توانند به صورت مساوی یا نامساوی باشند. ناحیه شدنی برای یک مسئله $LO$ در شکل استاندارد یک چندوجهی است. در صورتی که مسئله $LO$ دارای جواب باشد، حداقل یکی از راس‌های چندوجهی راس بهینه خواهد بود. متاسفانه تعداد راس‌های وابسته به یک مسئله $LO$ می‌تواند آنقدر زیاد باشد، که به جز برای مسائل با بعد کم نمی‌توان همه راس‌های ممکن را برای یافتن راس بهینه آزمود.

در سال ۱۹۴۷ دانتزیک [۲][۳] روشی به نام روش سادک برای یافتن راس بهینه ابداع کرد. این روش روی ضلع‌های چندوجهی حرکت می‌کند تا زمانی که به راس بهینه برسد. در سال ۱۹۷۲ کلی و مینتی [۳][۱۴] مثالی از یک مسئله $LO$ ارائه دادند، که چندوجهی مربوط به آن یک مکعب $n$-بعدی بود، که در آن $n$ تعداد متغیرهای مسئله است. آنها نشان دادند که روش سادک در این مسئله $۲^n$ راس را برای رسیدن به جواب بهینه می‌پیماید، یعنی پیچیدگی روش سادک در بدترین حالت نمایی است. این سوال هنوز هم مطرح است که آیا یک قانون محورگیری در روش سادک وجود دارد که مسائل را در زمان چندجمله‌ای حل کند.

خاچیان [۴][۱۲] اولین کسی بود که نشان داد یک مسئله $LO$ در زمان چندجمله‌ای قابل حل است، وی روش بیضوی را به کار گرفت. در سال ۱۹۸۴ کارمارکار [۵][۱۱] توانست نتایج به دست آمده توسط خاچیان را بهبود بخشد، به این ترتیب فعالیت در زمینه روش‌های نقطه درونی $(IPMs)$ [۶] آغاز شد.

امروزه $IPMs$ یکی از موثرترین روش‌ها برای حل بسیاری از مسائل بهینه‌سازی هستند. در میان روش‌های نقطه درونی، روش‌های تعقیب مسیر اولیه-دوگان از دیدگاه محاسباتی

[۱] Linear Optimization
[۲] Dantzig
[۳] Klee and Minty
[۴] Khachiyan
[۵] Karmarkar
[۶] Interior Point Methods

بسیار موثر هستند. این روش‌ها برای حل مسائل بهینه‌سازی مخروطی به کار می‌روند. در بهینه‌سازی مخروطی یک تابع خطی روی اشتراک یک فضای آفین و یک مخروط محدب بسته کمینه می‌شود. با انتخاب فضای آفین و مخروط محدب بسته مناسب می‌توان مسائل $LO$، بهینه‌سازی نیمه‌معین و بهینه‌سازی مخروط مرتبه دو را به عنوان زیر مجموعه‌ای از مسائل بهینه‌سازی مخروطی به حساب آورد.

نسترو و نمیروسکی[۷] [۱۸] اولین کسانی بودند که فرمول مقطع مخروطی مسائل بهینه‌سازی محدب را مطالعه کردند. نسترو و تاد[۸] [۲۰، ۱۹] روش‌های نقطه درونی اولیه-دوگان برای مسائل بهینه‌سازی محدب را در چارچوب مخروط خودمقیاس بیان کردند. به این ترتیب اگر در یک مسئله $LO$ یا یک مسئله ($LCP$)[۹] قیدهای نامنفی بودن، با یک مخروط محدب همگن و خوددوگان تعویض شوند، الگوریتم‌های اولیه-دوگان باز هم کارایی خود را حفظ می‌کنند.

در تحقیقاتی که در زمینه جبرهای لی صورت گرفت، ارتباط بین یک مخروط متقارن با جبرهای جردن اقلیدسی مشخص شد. گویلر[۱۰] [۹] برای اولین بار به ارتباط بین جبرهای جردن و بهینگی پی برد. او به این نتیجه رسید که خانواده مخروط‌های خودمقیاس با مجموعه‌ی مخروط‌های متقارن یکی است. به این ترتیب محققان به فعالیت در زمینه بهینه‌سازی متقارن ($SO$)[۱۱] و همچنین حل مسئله مکمل خطی مخروط متقارن ($SCLCP$)[۱۲] روی آوردند. ناحیه شدنی برای یک مسئله $SO$ اشتراک یک فضای آفین و یک مخروط متقارن است.

فیبوسویچ[۱۳] [۸] اولین کسی بود که روش‌های نقطه درونی اولیه-دوگان به کار رفته برای بهینه‌سازی نیمه معین را با استفاده از جبرهای جردن اقلیدسی به $SO$ تعمیم داد. او به این نتیجه رسید که برای حل مسائل $SO$ و $SCLCP$ جبرجردن اقلیدسی کاربرد دارد. ماراماتسو[۱۴] [۱۷] برای مسائل بهینه‌سازی خطی روی مخروط‌های متقارن، دسته‌ای از جهت‌های جستجوی جابجایی‌پذیر را ارائه داد و پیچیدگی روش‌های نقطه درونی اولیه-دوگان برای $SO$ را بررسی کرد.

رانگاراجان[۱۵] [۲۲] ثابت کرد که روش‌های نقطه درونی نشدنی که به حل مسائل برنامه‌ریزی مخروطی روی مخروط‌های متقارن پرداخته‌اند، دارای همگرایی زمان چندجمله‌ای

[۷] Nesterov and Nemirovskii
[۸] Nesterov and Todd
[۹] Linear Complementarity Problem
[۱۰] Guler
[۱۱] Symmetric Optimization
[۱۲] Symmetric Cone Linear Complementarity Problem
[۱۳] Faybusovich
[۱۴] Maramatsu
[۱۵] Rangarajan

هستند. وی همچنین برای اولین بار حالت نشدنی را برای $SCLCP$ بررسی کرد. اسچمیتا و علیزاده [۱۶] [۲۴] به مطالعه روش‌های نقطه درونی اولیه-دوگان برای $SO$، تحت چارچوب جبر جردن اقلیدسی پرداختند.

ویرا [۱۷] [۲۶] بر اساس توابع کرنل واجد شرایط به حل مسائل $SO$ پرداخت و بهترین کران‌های تکرار رایج را برای روش‌های بهنگام‌سازی کوچک و بهنگام‌سازی بزرگ به دست آورد. لساجا و روس [۱۸][۱۵] نیز بر اساس همین توابع به حل مسائل $SCLCP$ پرداختند.

اخیراً داروی [۱۹][۴] یک الگوریتم نقطه درونی تعقیب مسیر اولیه-دوگان با گام کامل نیوتن برای $LO$ پیشنهاد کرد. آچاچه [۲۰][۱] و ونگ [۲۱][۲۹، ۲۸] الگوریتم داروی برای $LO$ را به مسئله بهینه‌سازی درجه دوم محدب، بهینه‌سازی مخروط مرتبه دوم و مسئله بهینه‌سازی نیمه‌معین تعمیم دادند.

در سال ۲۰۰۶ روس [۲۲][۲۳] یک الگوریتم نقطه درونی نشدنی با گام کامل نیوتن برای بهینه‌سازی خطی ارائه داد. گو [۲۳][۱۰] با استفاده از جبرهای جردن اقلیدسی الگوریتم روس برای $LO$ را به $SO$ بسط داد. کران تکرار به‌دست آمده برای این الگوریتم، با کران تکرار نتیجه شده برای $LO$ منطبق است و در واقع بهترین کران تکرار رایج برای $SO$ است.

این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم شده است. در فصل اول برخی مفاهیم و تعاریف پایه‌ای که ممکن است در ابتدا برای خواننده ناآشنا به نظر برسد آمده است. همچنین به مفهوم جبرهای جردن اقلیدسی و مخروط‌های متقارن وابسته به آنها خواهیم پرداخت. در فصل دوم به معرفی مساله $SO$ پرداخته و پس از معرفی مسیر مرکزی و به دست آوردن جهت‌های جستجو برای آن، الگوریتم جدید را بیان کرده و به تحلیل آن می‌پردازیم. در فصل سوم به بررسی مساله مکمل خطی مخروط متقارن $SCLCP$ می‌پردازیم. الگوریتمی برای حل این مساله ارائه می‌شود و به تحلیل الگوریتم می‌پردازیم.

مطالب این پایان‌نامه بر اساس مقاله ونگ و بای[۲۴][۲۷] که در سال ۲۰۱۰ به چاپ رسید و همچنین مقاله خیرفام و مهدوی [۱۳] که در سال ۲۰۱۳ به چاپ رسید، تهیه و تنظیم گردیده است.

[۱۶] Schmieta and Alizadeh
[۱۷] Vieira
[۱۸] Lesaja and Roos
[۱۹] Darvay
[۲۰] Achache
[۲۱] Wang
[۲۲] Roos
[۲۳] Gu
[۲۴] Wang and Bai

# فهرست مطالب

# فصل ۱

# مفاهیم مقدماتی، تعریف‌ها و اصطلاحات

در این فصل برخی مفاهیم مقدماتی و تعاریف پایه‌ای استفاده شده در این پایان‌نامه که ممکن است در ابتدا برای خواننده ناآشنا به نظر برسد، آورده می‌شود. این فصل شامل چهار بخش است. در بخش اول به معرفی جبرجردن پرداخته می‌شود، در بخش دوم تعریف جبرجردن اقلیدسی بیان می‌گردد، در بخش سوم به معرفی مخروط متقارن و ارتباط آن با جبرجردن اقلیدسی پرداخته می‌شود و در بخش چهارم تعدادی از قضایا، لم‌ها و نتایج مقدماتی ارائه می‌شود که برای تحلیل الگوریتم ارائه شده در فصل دوم مورد نیاز هستند.

## ۱.۱ جبرهای جردن

در این بخش، ابتدا برخی تعاریف مهم و چند مثال بیان می‌گردد، سپس چندجمله‌ای مشخصه برای یک جبرجردن معرفی می‌گردد.

### تعاریف و مثال ها

**تعریف ۱.۱** *فرض کنید $V$ یک فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbb{R}$ باشد. نگاشت $h : V \times V \longrightarrow V$ دوخطی نامیده می‌شود اگر*

*الف)* $$h(\alpha x + \beta y, z) = \alpha h(x, z) + \beta h(y, z), \quad \forall\, x, y, z \in V \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

*ب)* $$h(z, \alpha x + \beta y) = \alpha h(z, x) + \beta h(z, y), \quad \forall\, x, y, z \in V \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

**تعریف ۱.۲** *فرض کنید $h$ فرمی دوخطی روی فضای برداری $V$ باشد گوییم $h$ متقارن است هرگاه برای هر $x, y \in V$*

$$h(x, y) = h(y, x).$$

*و معین مثبت است هرگاه برای هر $x \neq ۰$*

$$h(x, x) > ۰.$$

اگر نگاشت دوخطی $(x,y) \to x \circ y$ از $V \times V$ به توی $V$ وجود داشته باشد، آنگاه $(V,\circ)$ یک جبر روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{R}$-جبر نامیده می‌شود که در آن $\circ$ را ضرب $(V,\circ)$ می‌نامیم.
$\mathbb{R}$- جبر $(V,\circ)$شرکت‌پذیر است، هرگاه ضرب $\circ$ شرکت‌پذیر باشد، یعنی

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z, \quad \forall\, x,y,z \in V.$$

و جابجایی است، هرگاه ضرب $\circ$ جابجایی باشد، یعنی

$$x \circ y = y \circ x, \quad \forall\, x,y \in V.$$

اگر عنصر $e \in V$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in V$،

$$x \circ e = e \circ x = x,$$

آنگاه $e$ عنصر همانی $V$ نامیده می‌شود.

**مثال ۱.۱** *فرض کنید برای* $x,y \in \mathbb{R}^n$،

$$x \circ y = (x_۱\, y_۱\ ;\ x_۲\, y_۲\ ;\ \ldots\ ; x_n\, y_n).$$

$(\mathbb{R}^n,\circ)$ *یک جبر روی* $\mathbb{R}$ *است.*

توجه کنید که عنصر همانی $e$ منحصر به فرد است زیرا اگر $e_۱$ و $e_۲$ عنصرهای همانی $V$ باشند آنگاه داریم

$$e_۱ = e_۱ \circ e_۲ = e_۲ \circ e_۱ = e_۲.$$

در $\mathbb{R}$-جبر $(V,\circ)$ با عنصر همانی $e$، توان‌های بازگشتی هر عضو به صورت

$$x^۰ = e, \quad x^n = x \circ x^{n-۱}, \quad n \geq ۱,$$

تعریف می‌شود.

**تعریف ۱.۳** جبر $(V,\circ)$ *را توان شرکت‌پذیر می‌گوییم هرگاه برای هر* $x \in V$ *و اعداد صحیح مثبت* $p,q$ *داشته باشیم*

$$x^p \circ x^q = x^{p+q}.$$

**تعریف ۱.۴** جبر *با بعد متناهی* $(V,\circ)$ *را یک جبر جردن می‌گوییم هرگاه برای هر* $x,y \in V$

*الف)*
$$x \circ y = y \circ x,$$

ب) $$x \circ (x^{۲} \circ y) = x^{۲} \circ (x \circ y).$$

*که در آن* $x^{۲} = x \circ x$.

ویژگی دوم جبر جردن را اصل جردن می‌گویند. مثال زیر نشان می‌دهد که هر جبرجردن لزوماً شرکت‌پذیر نیست ولی شرکت‌پذیری تحت ضرب داخلی برقرار است.

**مثال ۱.۲** *برای هر* $x, y \in \mathbb{R}^n$*، تعریف کنید*

$$x \circ y = (x^T y\ ,\ x_{۱}y_{۲} + x_{۲}y_{۱}\ ,\ \ \dots\ , x_{۱}y_n + x_n y_{۱}).$$

*اگر قرار دهیم* $n = ۳$، $x = (۱, -۱, ۱)$ *و* $y = z = (۱, ۰, ۱)$ *آنگاه*

$$(x \circ y) \circ z = (۴, -۱, ۴) \neq x \circ (y \circ z) = (۴, -۲, ۴).$$

## چندجمله ای مشخصه یک جبرجردن

در این قسمت برخی مفاهیم مانند رتبه، چندجمله‌ای‌های مشخصه و مینیمال، مقادیرویژه، اثر و دترمینان یک جبر جردن تعریف می‌شوند.
فرض کنید $\mathbb{R}[X]$ یک $\mathbb{R}$-جبر از چندجمله‌ای‌های یک‌متغیره با ضرایب در $\mathbb{R}$ باشد. برای هر $x \in V$، $\mathbb{R}[x]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbb{R}[x] = \{p(x) \quad : \quad p \in \mathbb{R}[X]\}.$$

فرض کنید $V$ یک فضای برداری با بعد متناهی است، برای هر $x \in V$ عدد صحیح مثبت $k$ (که از بالا به بعد $V$ کراندار است) وجود دارد به طوری که مجموعه $\{e, x, x^{۲}, \dots, x^k\}$ وابسته خطی بوده، و این وجود یک چندجمله‌ای غیرصفر مانند $p \in \mathbb{R}[X]$ را نتیجه می‌دهد به طوری که $p(x) = ۰$ ، حال اگر این چندجمله‌ای تکین بوده (یعنی ضریب پیشروی آن یک باشد) و دارای کمترین درجه باشد، آن را چندجمله‌ای مینیمال $x$ گوییم [۵].
درجه عنصر $x \in V$ با $deg(x)$ مشخص می‌شود، که همان درجه چندجمله‌ای مینیمال $x$ است.
رتبه $V$، بزرگترین درجه $x$ برای همه $x \in V$ هاست یعنی

$$\mathbf{rank}(V) = \max\{\mathbf{deg}(x)\ :\ x \in V\}.$$

**تعریف ۱.۵** *عنصر* $x \in V$ *منظم نامیده می‌شود، اگر درجه‌اش با رتبه جبرجردن برابر باشد.*

با استفاده از لم زیر می‌توان چندجمله‌ای مشخصه را برای هر $x \in V$ تعیین کرد.

**لم ۱.۱** (*گزاره ۱.۲ .II در [۵]*) *مجموعه‌ی عنصرهای منظم در $V$، باز و چگال است. چندجمله‌ای‌های $a_1, a_2, \dots, a_r$ وجود دارند به طوری که چندجمله‌ای مینیمال برای هر عنصر منظم $x$ به صورت زیر داده می شود:*

$$f(\lambda; x) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + \cdots + (-1)^r a_r(x),$$

*در ضمن چندجمله‌ای‌های $a_1, a_2, \dots, a_r$ یکتا بوده و $a_j$ها همگن از درجه $j$ هستند.*

$f(\lambda; x)$ در لم فوق چندجمله‌ای مشخصه برای عنصر منظم $x$ نامیده می‌شود. چون مجموعه‌ی عنصرهای منظم در $V$ چگال‌اند، می‌توان چندجمله‌ای‌های $a_i(x)$ و همین طور چندجمله‌ای مشخصه را به همه عنصرهای $V$ بسط داد. توجه کنید که چندجمله‌ای مشخصه یک چندجمله‌ای از درجه $r$ برحسب $\lambda$ است، که $r$ رتبه $V$ است. اگر $x$ یک عنصر منظم باشد، چندجمله‌ای مشخصه‌اش برابر با چندجمله‌ای مینیمال آن است، اما برای عنصرهای غیر منظم چندجمله‌ای مینیمال، چندجمله‌ای مشخصه را عاد می‌کند. برای $x \in V$ ریشه‌های $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ از چندجمله‌ای مشخصه آن، مقادیرویژه $x$ هستند[۵].

**تعریف ۱.۶** *فرض کنید $x \in V$ و $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه*

$$f(\lambda; x) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + \cdots + (-1)^r a_r(x),$$

*هستند. دترمینان و اثر برای $x$ به صورت*

$$\mathbf{tr}(x) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r = a_1(x), \qquad \det(x) = \lambda_1 \ \dots \ \lambda_r = a_r(x).$$

*تعریف می‌شوند.*

در گزاره زیر ویژگی مهمی از اثر بیان می‌شود.

**گزاره ۱.۱** (*گزاره ۴.۳ .II در [۵]*) *فرم دوخطی متقارن $tr(x \circ y)$ شرکت‌پذیر است، یعنی*

$$tr\big((x \circ y), z\big) = tr\big(x, (y \circ z)\big).$$

عنصر $x \in V$ معکوس‌پذیر است اگر $y \in R[x]$ وجود داشته باشد به طوری که $x \circ y = y \circ x = e$. معکوس $x$ را با نماد $x^{-1}$ نشان می‌دهیم.

## ۲.۱ جبرجردن اقلیدسی

در این بخش برخی خواص پایه‌ای جبر جردن اقلیدسی که زیرکلاسی از جبر جردن است، یادآوری می‌شوند. سپس نمایش مرتبه دوم [۱] آن و تعدادی از ویژگی‌های آن بیان می‌شوند.

[۱] Quadratic

**تعریف ۱.۷** *جبرجردن $(V,\circ)$ روی $\mathbb{R}$ با عنصر همانی $e$ اقلیدسی نامیده می‌شود اگر فرم دوخطی معین‌مثبت و متقارنی مانند $Q$ روی $V$ وجود داشته باشد به طوری که شرکت‌پذیر است، یعنی برای هر $x,y,z\in V$*

$$Q(x\circ y,z)=Q(x,y\circ z).$$

در بقیه این پایان‌نامه فرض می‌کنیم که $(V,\circ,\mathbf{tr}(x\circ y))$ یک جبر جردن اقلیدسی باشد و $\mathbf{rank}(V)=r$ که برای سادگی آن را با $V$ نشان می‌دهیم.

**مثال ۱.۳** *فرض کنید $S^n$ فضای ماتریس‌های متقارن حقیقی $n\times n$ است. $(S^n,\circ)$ که عملگر دوتایی $\circ$ به وسیله رابطه زیر تعریف شده، یک جبرجردن است.*

$$X\circ Y=\frac{XY+YX}{۲},$$

*که در آن $X,Y\in S^n$ و $XY$ حاصل ضرب معمولی ماتریسی را نشان می دهد. $(S^n,\circ)$ اقلیدسی است اگر $Q$ را به صورت زیر تعریف کنیم*

$$Q(X,Y)=Tr(X\circ Y)=Tr(XY).$$

**تعریف ۱.۸** *الف) عنصر $c\in V$ خودتوان گفته می‌شود اگر و تنها اگر $c\neq ۰$ و $c^۲=c$.*

*ب) دو خودتوان $c_۱$ و $c_۲$ متعامدند اگر $c_۱\circ c_۲=۰$.*

*پ) خودتوان اولیه، خودتوان غیرصفری است که نتوانیم آن را به صورت مجموع دو خودتوان غیرصفر بنویسیم.*

*ت) مجموعه $\{c_۱,\dots,c_r\}$ دستگاه کاملی از خودتوان‌های اولیه متعامد یا یک پایه جردن است اگر هر $c_i$ یک خودتوان اولیه بوده و*

$$c_i\circ c_j=۰\quad i\neq j\in\{۱,۲,\dots,r\},\qquad \sum_{i=۱}^{r}c_i=e.$$

توجه شود که هر پایه جردن همیشه شامل $r$ خودتوان اولیه است که $r$ رتبه $V$ است.

**قضیه ۱.۱** (قضیه III. ۱. ۲ در [۵]) *برای $x\in V$، پایه جردن $\{c_۱,\dots,c_r\}$ و اعداد حقیقی $\lambda_۱(x),\dots,\lambda_r(x)$ وجود دارند به طوری که*

$$x=\sum_{i=۱}^{r}\lambda_i(x)c_i. \qquad (۱.۱)$$

*اعداد $\lambda_i(x)$ (همراه با مرتبه تکرار آن ها) مقادیر ویژه $x$ هستند. علاوه براین*

$$\mathbf{tr}(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(x) \quad , \quad \det(x) = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i(x). \tag{۲.۱}$$

در حقیقت $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه $f(\lambda; x)$ هستند. قضیه بالا قضیه تجزیه طیفی نامیده می‌شود. به این ترتیب می‌توان بزرگترین مقدار ویژه $x$ $\big(\lambda_{\max}(x)\big)$ و کوچکترین مقدار ویژه $x$ $\big(\lambda_{\min}(x)\big)$ را تعیین کرد. توجه کنید که چون $e = c_1 + c_2 + \cdots + c_r$ دارای مقدار ویژه ۱ با تعداد تکرار $r$ می‌باشد، داریم:

$$\mathbf{tr}(e) = r, \qquad \det(e) = 1.$$

اهمیت رابطه (۱.۱) در این است که می‌توانیم تعریف هر تابع پیوسته یک‌متغیره مانند $\psi(t)$ را با استفاده از مقادیر ویژه، به عنصرهای یک جبرجردن اقلیدسی بسط دهیم. در این پایان‌نامه فرض می‌کنیم که $\psi(t)$ یک تابع یک‌متغیره حقیقی روی $]0, +\infty[$ است که روی $(0, +\infty)$ مشتق‌پذیر بوده و برای هر $t > 0$، $\psi'(t) > 0$.

**تعریف ۱.۹** *$x \in V$ را با تجزیه طیفی تعریف شده به وسیله رابطه (۱.۱) در نظر بگیرید. تابع برداری $\psi(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.*

$$\psi(x) = \psi\big(\lambda_1(x)\big)\ c_1 + \ldots + \psi\big(\lambda_r(x)\big)\ c_r. \tag{۳.۱}$$

اگر $\lambda_i \neq 0$ برای $i = 1, \dots, r$ داریم $x^{-1} = \lambda_1^{-1}\ c_1 + \cdots + \lambda_r^{-1}\ c_r$ و در غیر این صورت معکوس $x$ تعریف نشده است. همچنین اگر $\lambda_i \geq 0$ برای $i = 1, \dots, r$ داریم $x^{\frac{1}{2}} = \lambda_1^{\frac{1}{2}}\ c_1 + \cdots + \lambda_r^{\frac{1}{2}}\ c_r$ و در غیر این صورت $x^{\frac{1}{2}}$ تعریف نشده است.

با عوض کردن $\psi\big(\lambda_i(x)\big)$ با $\psi'\big(\lambda_i(x)\big)$ برای $i = 1, \dots, r$ در(۳.۱) به دست می‌آوریم

$$\psi'(x) = \psi'\big(\lambda_1(x)\big)c_1 + \ldots + \psi'\big(\lambda_r(x)\big)c_r.$$

برای هر $x, s \in V$ ضرب داخلی را به صورت

$$\langle x, s\rangle = \mathbf{tr}(x \circ s), \tag{۴.۱}$$

تعریف می‌کنیم و گوییم $x$ و $s$ نسبت به ضرب داخلی اثر متعامدند اگر $\mathbf{tr}(x \circ s) = 0$ (یا به طور هم‌ارز $\langle x, s\rangle = 0$).

نرم فروبنیوس $\|\cdot\|_F$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|x\|_F = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\mathbf{tr}(x^2)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2(x)}. \tag{۵.۱}$$

با توجه به (۵.۱) نامساوی‌های زیر بدیهی هستند:

$$|\lambda_{\max}(x)| \leq \|x\|_F, \qquad |\lambda_{\min}(x)| \leq \|x\|_F. \tag{۶.۱}$$

در ادامه، برخی ویژگی‌های نمایش مرتبه دوم $P(\cdot)$ را بیان می‌کنیم که در اثبات قضایای مورد نیاز برای تحلیل الگوریتم به کار می‌روند.

## نمایش مرتبه دوم

با توجه به دوخطی بودن نگاشت $\circ$، نگاشت خطی $L(x) : V \longrightarrow V$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x \circ y = L(x)y \quad \forall y \in V.$$

در حالت خاص $L(x)e = x$، $L(x)x = x^2$ و $L(e)$ عملگر همانی است که با $I$ مشخص می‌شود.

**تعریف ۱.۱۰** *دو عنصر $x, y \in V$ به صورت عملگری جابجایی هستند اگر و تنها اگر*

$$L(x)L(y) = L(y)L(x),$$

*به عبارت دیگر $x, y \in V$ به صورت عملگری جابجایی‌اند اگر و تنها اگر برای هر $z \in V$،*

$$x \circ (y \circ z) = y \circ (x \circ z).$$

طبق اصل جردن، می‌توان نتیجه گرفت که $L(x)$ و $L(x^2)$ به صورت عملگری جابجایی هستند، یعنی

$$L(x^2)L(x)y = x^2 \circ (x \circ y) = x \circ (x^2 \circ y) = L(x)L(x^2)y.$$

**گزاره ۱.۲** (*گزاره III. ۱.۳ در [۵]*) *فرض کنید $c$ یک خودتوان در جبر جردن $V$ است در این صورت مقادیر ویژه $L(c)$ عبارتند از ۰، $\frac{1}{2}$ و ۱.*

**تعریف ۱.۱۱** *برای هر $x \in V$، نمایش مرتبه دوم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.*

$$P(x) = 2L(x)^2 - L(x^2),$$

*که $L(x)^2 = L(x)L(x)$. نگاشت $P(\cdot)$ نمایش مرتبه دوم $V$ نامیده می‌شود.*

**تعریف ۱.۱۲** *اگر $g$ یک نگاشت خطی از $V$ به $V$ باشد. نگاشت خطی $g^*$ را الحاقی $g$ نسبت به ضرب داخلی $\langle , \rangle$ می‌نامیم اگر*

$$\langle gx, y\rangle = \langle x, g^*y\rangle \quad \forall x, y \in V.$$

*اگر $g = g^*$ گوییم $g$ خودالحاق است.*

می‌توان ثابت کرد که $L(x)$ و $P(x)$ هر دو خودالحاق‌اند زیرا $\forall x, y, z \in V$ داریم:

$$\langle L(x)y, z\rangle = \langle x \circ y, z\rangle = \langle y \circ x, z\rangle = \langle y, x \circ z\rangle = \langle y, L(x)z\rangle.$$

که تساوی سوم از گزاره ۱.۱ نتیجه می‌شود.
به همین صورت با توجه به تعریف $P(x)$ و اینکه $L(x)$ خودالحاق است داریم:

$$\begin{aligned}\langle P(x)y, z\rangle &= \langle ۲L^۲(x)y - L(x^۲)y, z\rangle \\ &= \langle ۲L^۲(x)y, z\rangle - \langle L(x^۲)y, z\rangle \\ &= \langle y, ۲L^۲(x)z\rangle - \langle y, L(x^۲)z\rangle \\ &= \langle y, P(x)z\rangle.\end{aligned}$$

**لم ۱.۲** *(گزاره $II.۲.۳$ در [۵]) فرض کنید $L(x)$ معکوس‌پذیر باشد در این صورت $x$ معکوس‌پذیر است و داریم:*

$$x^{-۱} = L(x)^{-۱}e.$$

**لم ۱.۳** *( گزاره $II.۳.۱$ در [۵]) هر $x \in V$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $P(x)$ معکوس‌پذیر باشد، همچنین داریم*

*الف)* $$P(x)x^{-۱} = x,$$

*ب)* $$P(x)^{-۱} = P(x^{-۱}).$$

**لم ۱.۴** *(گزاره $II.۳.۳$ در [۵]) برای هر $x, y \in V$*

*الف) اگر $x$ و $y$ معکوس‌پذیر باشند، آنگاه $P(x)y$ نیز معکوس‌پذیر است و* $\big(P(x)y\big)^{-۱} = P(x^{-۱})y^{-۱}$

*ب)* $$P\big(P(y)x\big) = P(y)P(x)P(y).$$

رابطه (ب) به عنوان فرمول بنیادی در جبر جردن شناخته شده است. فرمول بنیادی چندین نتیجه مفید دربردارد. یکی از نتایج آن در ادامه آورده می‌شود.

**نتیجه ۱.۱** (نتیجه ۲.۳.۹ در[۲۶]) *فرض کنید $x \in V$ و $k$ یک عدد صحیح مثبت باشد. در این صورت*

$$P(x^k) = P(x)^k.$$

**برهان :** اثبات را به استقرا روی $k$ انجام می‌دهیم. برای $k = ۱$ تساوی بدیهی است. فرض کنید رابطه برای $k$ درست باشد، یعنی $P(x^k) = P(x)^k$.
حال با استفاده از فرمول بنیادی داریم:

$$P\big(P(x^k)x\big) = P(x^k)P(x)P(x^k).$$

با استفاده از فرض استقرا می‌توان نوشت

$$P(x^k)P(x)P(x^k) = P(x)^kP(x)P(x)^k = P(x)^{۲k+۱}.$$

با توجه به اینکه $P(x^k)x = x^{۲k+۱}$ نتیجه می‌شود که

$$P(x^{۲k+۱}) = P(x)^{۲k+۱}.$$

از طرف دیگر با تکرار همین روند داریم:

$$P\big(P(x^k)e\big) = P(x^k)P(e)P(x^k),$$

بنابراین با استفاده از $P(x^k)e = x^{۲k}$، $P(e) = I$ و فرض استقرا نتیجه می‌شود که

$$P(x^{۲k}) = \big(P(x)\big)^{۲k}.$$

و این اثبات را کامل می‌کند. □

## ۳.۱ مخروط متقارن

در این بخش، پس از تعریف مخروط متقارن، برخی ویژگی‌های آن را بیان می‌کنیم.

**تعریف ۱.۱۳** *الف)* مجموعه $K$ *محدب است اگر برای هر* $x, y \in K$ *و هر* $\alpha$ *که* $۰ \leq \alpha \leq ۱$ *داشته باشیم* $\alpha x + (۱ - \alpha)y \in K$.
*ب)* مجموعه $K$ *مخروط نامیده می‌شود اگر برای هر* $x \in K$ *و* $\alpha \geq ۰$ *داشته باشیم* $\alpha x \in K$.