

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده فنی و مهندسی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد مهندسی عمران-زلزله

**ارائه حل تحلیلی برای ارتعاشات آزاد و اجباری تیر ترک خورده**

**تیموشنکو تحت یک بار متمرکز متحرک**

**مسعود شفیعی سرشنیزی**

**استاد راهنما:**

**دکتر ناصر خاجی**

تابستان ۱۳۸۸

## تأییدیه هیات داوران



بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان نامه .

آقای مسعود شفیعی سرشنیزی پایان نامه ۶ واحدی خود را با عنوان ارائه حل تحلیلی برای ارتعاشات آزاد و اجباری تیر ترك خورده تیموشنکو تحت يك بار متمرکز

متحرك در تاریخ ۱۳۸۷/۶/۱۷ ارائه کردند.

اعضای هیات داوران نسخه نهایی این پایان نامه را از نظر فرم و محتوا تایید کرده و پذیرش آنرا برای تکمیل درجه کارشناسی ارشد مهندسی عمران - مهندسی زلزله پیشنهاد می کنند.

امضاء	رتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیات داوران
	استادیار	دکتر ناصر خاجی	استاد راهنما
	استاد	دکتر علی اکبر آقا کوچک	استاد ناظر
	دانشیار	دکتر حمید محرمی	استاد ناظر
	استاد	دکتر فیاض رحیم زاده	استاد ناظر
	استاد	دکتر علی اکبر آقا کوچک	مدیر گروه (با نماینده گروه تخصصی)

## تشکر و قدردانی

این تحقیق به راهنمایی جناب آقای دکتر ناصر خاجی و در قالب پایان نامه کارشناسی ارشد اینجانب انجام شده است. برخورد لازم می‌دانم از ایشان بخاطر راهنمایی‌های ارزشمندشان در انجام این تحقیق قدردانی کنم. همچنین جا دارد از پدر بزرگوار و مادر صبورم بخاطر همراهی و حمایت بی‌دریغشان در تمامی عرصه‌های زندگی‌ام تشکر کنم. در نهایت از تمامی دوستان بهتر از جانم بخصوص جناب آقای مهندس امین عمادی دانشجوی کارشناسی ارشد گرایش زلزله بخاطر همراهی مؤثرشان در به ثمر رسیدن این اثر کمال تشکر و قدردانی را دارم.

مسعود شفیعی سرتشنیزی

## چکیده

در این تحقیق، رفتار دینامیکی یک تیر دارای ترک عرضی باز با فرمول‌بندی تیر تیموشنکو، تحت عبور یک بار متمرکز متحرک به صورت تحلیلی (Analytic) مورد بررسی قرار می‌گیرد. ترک بصورت یک فنر پیچشی بین دو بخش تیر (Sub-beams) فرض می‌شود که سختی آن وابسته به عمق نسبی ترک خواهد بود. برای حل مساله لازم است ارتعاشات آزاد و اجباری تیر مزبور ارائه گردد. برای حل مساله ارتعاش آزاد از روش نگاشت ماتریسی برای بدست آوردن معادلات نهایی بهره گرفته شده است. با توجه به معادلات نهایی حاصل (که در آن سه پارامتر فرکانسهای طبیعی، محل ترک و عمق ترک وجود دارند) می‌توان با داشتن دو فرکانس از فرکانسهای طبیعی تیر آسیب دیده، و با پیگیری حل معکوس مسئله، پارامترهای ترک (محل و عمق ترک) را بدست آورد. برای صحت‌سنجی روش پیشنهادی، از مدل‌های عددی المان محدود استفاده شده است. نتایج حاصل از روش پیشنهادی، تطابق بسیار خوبی با نتایج عددی دارند. برای حل مساله ارتعاش اجباری، با استفاده از گشایش مودی و توابع ویژه بدست آمده از ارتعاش آزاد، به محاسبه پاسخ دینامیکی تیر ترک خورده تیموشنکو تحت یک بار متمرکز متحرک می‌پردازیم. در نهایت با مقایسه نتایج بدست آمده در تحلیل‌های مختلف، اثر پارامترهای ترک و سایر پارامترها را روی پاسخ بررسی می‌کنیم.

**کلید واژه‌ها:** ارتعاش آزاد و اجباری، بار متحرک، شناسایی ترک، تیر تیموشنکو، حل معکوس.

# فهرست مطالب

عنوان	صفحه
تأییدیه هیات داوران.....	ج
تشکر و قدردانی.....	د
چکیده.....	ه
فهرست مطالب.....	أ
فهرست جدول‌ها.....	ج
فهرست شکل‌ها.....	ه
<b>فصل ۱- کلیات</b> .....	۱
۱-۱- پیشگفتار.....	۱
۲-۱- تاریخچه مطالعات.....	۲
<b>فصل ۲- ارتعاش آزاد</b> .....	۷
۱-۲- معادلات ارتعاش.....	۷
۱-۲-۱- تیر ساده.....	۱۲
۲-۱-۲- تیر ساده- گیردار.....	۱۵
۳-۱-۲- تیر دو سر- گیردار.....	۱۶
۱-۲- تیر ساده- مفصل برشی.....	۱۷
۴-۱-۲- تیر گیردار- مفصل برشی.....	۱۷
۵-۱-۲- تیر کنسولی.....	۱۸
۲-۲- بررسی درستی روابط ارائه شده.....	۱۹
۱-۲-۲- آزمون همگرایی در مدل‌های عددی.....	۲۰
۲-۲-۲- تیر با نسبت‌های متفاوت طول به ارتفاع.....	۲۰
۳-۲-۲- اثرات تغییر در عمق ترک.....	۲۸
۴-۲-۲- اثرات تغییر در محل ترک.....	۳۲
۵-۲-۲- مقایسه نتایج روش پیشنهادی با یک مدل آزمایشگاهی.....	۳۵
۳-۲- حل معکوس.....	۳۷
<b>فصل ۳- ارتعاش اجباری</b> .....	۵۰
۱-۳- معادلات ارتعاش.....	۵۰
۲-۳- بازنویسی معادلات در مختصات نرمال.....	۵۸

۵۹.....	۳-۳ - بررسی درستی حل انجام شده .....
۶۲.....	۴-۳ - آزمون همگرایی.....
۶۲.....	۳-۴-۱ - نقش بارگذاری در همگرایی.....
۶۵.....	۳-۵ - اثر پارامترهای ترک روی پاسخ.....
۶۵.....	۳-۵-۱ - اثر عمق ترک در پاسخ.....
۶۷.....	۳-۵-۲ - اثر محل ترک در پاسخ.....
۷۱.....	فصل ۴ - نتیجه گیری و پیشنهادات.....
۷۱.....	۴-۱ - نتیجه گیری .....
۷۲.....	۴-۲ - پیشنهادات: .....
۷۴.....	فهرست مراجع.....
۸۰.....	پیوست آ .....
۸۰.....	آ-۱) تیر ساده .....
۸۰.....	آ-۲) تیر ساده- گیردار .....
۸۱.....	آ-۳) تیر دو سر گیردار .....
۸۱.....	آ-۴) تیر ساده- مفصل برشی.....
۸۲.....	آ-۵) تیر گیردار- مفصل برشی.....
۸۲.....	آ-۶) تیر کنسولی .....

## فهرست جدول‌ها

عنوان	صفحه
جدول ۱-۲ الف مقایسه فرکانس‌های طبیعی مدل‌های تحلیلی تیر تیموشنکو و تیر اولر- برنولی با مدل‌های اجرا محدود برای نسبت‌های مختلف طول به ارتفاع (تیر ساده) .....	۲۲
جدول ۱-۲ ب مقایسه فرکانس‌های طبیعی مدل‌های تحلیلی تیر تیموشنکو و تیر اولر- برنولی با مدل‌های اجرا محدود برای نسبت‌های مختلف طول به ارتفاع (تیر ساده- گیردار).....	۲۳
جدول ۱-۲ ج مقایسه فرکانس‌های طبیعی مدل‌های تحلیلی تیر تیموشنکو و تیر اولر- برنولی با مدل‌های اجرا محدود برای نسبت‌های مختلف طول به ارتفاع (تیر دو سر گیردار).....	۲۴
جدول ۱-۲ د مقایسه فرکانس‌های طبیعی مدل‌های تحلیلی تیر تیموشنکو و تیر اولر- برنولی با مدل‌های اجرا محدود برای نسبت‌های مختلف طول به ارتفاع (تیر ساده- مفصل برشی).....	۲۵
جدول ۱-۲ ه مقایسه فرکانس‌های طبیعی مدل‌های تحلیلی تیر تیموشنکو و تیر اولر- برنولی با مدل‌های اجرا محدود برای نسبت‌های مختلف طول به ارتفاع (تیر گیردار- مفصل برشی).....	۲۶
جدول ۱-۲ و مقایسه فرکانس‌های طبیعی مدل‌های تحلیلی تیر تیموشنکو و تیر اولر- برنولی با مدل‌های اجرا محدود برای نسبت‌های مختلف طول به ارتفاع (تیر کنسولی).....	۲۷
جدول ۲-۲ الف مقایسه فرکانس‌های طبیعی حاصل از مدل تیر تیموشنکو ارائه شده و تحلیل اجزا محدود (تغییر عمق ترک در تیر ساده) .....	۲۹
جدول ۲-۲ ب مقایسه فرکانس‌های طبیعی حاصل از مدل تیر تیموشنکو ارائه شده و تحلیل اجزا محدود (تغییر عمق ترک در تیر ساده-گیردار) .....	۲۹
جدول ۲-۲ ج مقایسه فرکانس‌های طبیعی حاصل از مدل تیر تیموشنکو ارائه شده و تحلیل اجزا محدود (تغییر عمق ترک در تیر دو سر گیردار) .....	۳۰
جدول ۲-۲ د مقایسه فرکانس‌های طبیعی حاصل از مدل تیر تیموشنکو ارائه شده و تحلیل اجزا محدود (تغییر عمق ترک در تیر ساده- مفصل برشی) .....	۳۰
جدول ۲-۲ ه مقایسه فرکانس‌های طبیعی حاصل از مدل تیر تیموشنکو ارائه شده و تحلیل اجزا محدود (تغییر عمق ترک در تیر گیردار- مفصل برشی) .....	۳۱
جدول ۲-۲ و مقایسه فرکانس‌های طبیعی حاصل از مدل تیر تیموشنکو ارائه شده و تحلیل اجزا محدود (تغییر عمق ترک در تیر کنسولی) .....	۳۱
جدول ۳-۲ الف مقایسه فرکانس‌های طبیعی حاصل از مدل تیر تیموشنکو ارائه شده و تحلیل اجزا محدود (تغییر محل ترک در تیر ساده) .....	۳۲
جدول ۳-۲ ب مقایسه فرکانس‌های طبیعی حاصل از مدل تیر تیموشنکو ارائه شده و تحلیل اجزا محدود (تغییر محل ترک در تیر ساده- گیردار) .....	۳۳
جدول ۳-۲ ج مقایسه فرکانس‌های طبیعی حاصل از مدل تیر تیموشنکو ارائه شده و تحلیل اجزا محدود (تغییر محل ترک در تیر دو سر گیردار) .....	۳۳



- جدول ۲-۳- د مقایسه فرکانس‌های طبیعی حاصل از مدل تیر تیموشنکو ارائه شده و تحلیل اجزا محدود (تغییر محل ترک در تیر ساده- مفصل برشی) ..... ۳۴
- جدول ۲-۳- ه مقایسه فرکانس‌های طبیعی حاصل از مدل تیر تیموشنکو ارائه شده و تحلیل اجزا محدود (تغییر محل ترک در تیر گیردار- مفصل برشی) ..... ۳۴
- جدول ۲-۳- و مقایسه فرکانس‌های طبیعی حاصل از مدل تیر تیموشنکو ارائه شده و تحلیل اجزا محدود (تغییر محل ترک در تیر کنسولی) ..... ۳۵
- جدول ۱-۴ مقایسه نتایج مدل پیشنهادی با آزمایش انجام شده در مرجع [۴۸] ..... ۳۶
- جدول ۲-۵ هجده ترکیب انتخاب شده برای انجام حل معکوس ..... ۴۰
- جدول ۲-۶ نتایج حل معکوس برای ترکیب‌های انتخاب شده در جدول ۲-۵ ..... ۴۷

## فهرست شکل‌ها

عنوان	صفحه
۱-۲ تیر تیموشنکو با ترک باز یک طرفه (خط پر) و ترک دو طرفه .....	۹
شکل ۲-۲ ترک یک طرفه در تیر با شش شرط مرزی مختلف (الف) تیر ساده، (ب) تیر ساده-گیردار، (ج) تیر دو سر گیردار، (د) تیر ساده-مفصل برشی، (ه) تیر گیردار-مفصل برشی، (و) تیر کنسولی.....	۱۳
شکل ۳-۲ نتایج آزمایش ارتعاش آزاد برای تیر ساده در مرجع [۴۸].....	۳۶
شکل ۴-۲ محاسبه محل ترک با در نظر گرفتن مستقیم تساوی اندیس سختی در سه مود اول (روش شماره ۲) برای مورد شماره ۱ از جدول ۲-۵. (الف) تغییرات اندیس سختی در برابر محل ترک برای سه فرکانس اول. (ب) جزئیات محل برخورد گرافها؛ طول مرکز سطح شبه مثلث ایجاد شده محل تشخیصی ترک است. (۳۴/۳mm).....	۴۱
شکل ۵-۲ محاسبه محل ترک با در نظر گرفتن مستقیم تساوی اندیس سختی در سه مود اول (روش شماره ۲) برای مورد شماره ۴ از جدول ۲-۵. (الف) تغییرات اندیس سختی در برابر محل ترک برای سه فرکانس اول. (ب) جزئیات محل برخورد گرافها. (۸۲/۳mm).....	۴۲
شکل ۶-۲ محاسبه محل ترک با در نظر گرفتن ریشه‌های معادله (۲-۵۲) (روش شماره ۱) برای مورد شماره ۷ از جدول ۲-۵. (الف) تغییر مقادیر رابطه (۲-۵۲) در برابر محل ترک برای سه فرکانس اول. (ب) جزئیات محل برخورد گرافها. (۵۹/۳mm).....	۴۳
شکل ۷-۲ محاسبه محل ترک با در نظر گرفتن ریشه‌های معادله (۲-۵۲) (روش شماره ۱) برای مورد شماره ۱۰ از جدول ۲-۵. (الف) تغییر مقادیر رابطه (۲-۵۲) در برابر محل ترک برای سه فرکانس اول. (ب) جزئیات محل برخورد گرافها. (۶۳/۵mm).....	۴۴
شکل ۸-۲ محاسبه محل ترک با در نظر گرفتن مستقیم تساوی اندیس سختی در سه مود اول (روش شماره ۲) برای مورد شماره ۱۳ از جدول ۲-۵. (الف) تغییرات اندیس سختی در برابر محل ترک برای سه فرکانس اول. (ب) جزئیات محل برخورد گرافها. (۱۰۲/۸mm).....	۴۵
شکل ۹-۲ محاسبه محل ترک با در نظر گرفتن ریشه‌های معادله (۲-۵۲) (روش شماره ۱) برای مورد شماره ۱۶ از جدول ۲-۵. (الف) تغییر مقادیر رابطه (۲-۵۲) در برابر محل ترک برای سه فرکانس اول. (ب) جزئیات محل برخورد گرافها. (۴۹/۵mm).....	۴۶
شکل ۱-۳ شکلهای مودی در تیر تشریح شده در مراجع [۶۹و۸].....	۵۱
شکل ۲-۳ شکلهای مودی رسم شده در مرجع [۶۹].....	۵۲
شکل ۳-۳ پاسخ همپایه شده در انتهای آزاد تیر در سرعت‌های مختلف متناظر با شکل ۵ مرجع [۶۹].....	۶۱
شکل ۴-۳ پاسخ همپایه شده در انتهای آزاد تیر در سرعت‌های مختلف در شکل ۵ مرجع [۶۹].....	۶۱
شکل ۵-۳ پاسخ همپایه شده در انتهای آزاد تیر مثال قبل در سرعت $20\text{ m/s}$ برای عبور بار با در نظر گرفتن تعداد متفاوتی از مودها ( $n=1, 2, 4, 6$ ).....	۶۳

- شکل ۳-۶ پاسخ همپایه شده در انتهای آزاد تیر مثال قبل در سرعت  $40\text{ m/s}$  برای عبور بار با در نظر گرفتن تعداد متفاوتی از مودها ( $n=1, 2, 4, 6$ )..... ۶۳
- شکل ۳-۷ پاسخ همپایه شده در انتهای آزاد تیر مثال قبل در سرعت  $60\text{ m/s}$  برای عبور بار با در نظر گرفتن تعداد متفاوتی از مودها ( $n=1, 2, 4, 6$ )..... ۶۴
- شکل ۳-۸ پاسخ همپایه شده در انتهای آزاد تیر مثال قبل در سرعت  $80\text{ m/s}$  برای عبور بار با در نظر گرفتن تعداد متفاوتی از مودها ( $n=1, 2, 4, 6$ )..... ۶۴
- شکل ۳-۹ پاسخ همپایه شده در انتهای آزاد تیر با نسبت طول به ارتفاع چهار در سرعت بحرانی (  $667/59\text{ m/s}$ ) برای عبور بار در عمقهای نسبی ترک  $\eta = 0.2, 0.35, 0.5, 0.7$ ..... ۶۶
- شکل ۳-۱۰ پاسخ همپایه شده در انتهای آزاد تیر با نسبت طول به ارتفاع نه در سرعت بحرانی (  $307/96\text{ m/s}$ ) برای عبور بار در عمقهای نسبی ترک  $\eta = 0.2, 0.35, 0.5, 0.7$ ..... ۶۶
- شکل ۳-۱۱ پاسخ همپایه شده در انتهای آزاد تیر با نسبت طول به ارتفاع بیست در سرعت بحرانی (  $139/7\text{ m/s}$ ) برای عبور بار در عمقهای نسبی ترک  $\eta = 0.2, 0.35, 0.5, 0.7$ ..... ۶۷
- شکل ۳-۱۲ پاسخ همپایه شده در انتهای آزاد تیر با نسبت طول به ارتفاع چهار در سرعت بحرانی (  $667/59\text{ m/s}$ ) برای عبور بار در محللهای نسبی ترک  $e = 0.25, 0.5, 0.75$ ..... ۶۸
- شکل ۳-۱۳ پاسخ همپایه شده در انتهای آزاد تیر با نسبت طول به ارتفاع نه در سرعت بحرانی (  $307/96\text{ m/s}$ ) برای عبور بار در محللهای نسبی ترک  $e = 0.25, 0.5, 0.75$ ..... ۶۹
- شکل ۳-۱۴ پاسخ همپایه شده در انتهای آزاد تیر با نسبت طول به ارتفاع بیست در سرعت بحرانی (  $139/7\text{ m/s}$ ) برای عبور بار در محللهای نسبی ترک  $e = 0.25, 0.5, 0.75$ ..... ۶۹

## فصل ۱- کلیات

### ۱-۱- پیشگفتار

پیدا کردن محل و میزان آسیب یا حصول اطمینان از سالم بودن اعضا در سازه‌ها یکی از مسائل مورد بحث در بررسی سازه‌ها است. برخی سازه‌ها (برای مثال پل‌ها) بواسطه اهمیتی که دارند لازم است بصورت مداوم کنترل شوند. گسترش آسیب و در نتیجه آن خارج شدن آنها از خدمت رسانی می‌تواند تبعات جبران ناپذیری داشته باشد. برای رسیدن به پاسخ‌های مناسب در این باره، راهکارهای مختلفی ارائه شده است. در حال حاضر استفاده از آزمایش‌های غیر مخربی نظیر اشعه X یا استفاده از امواج فرا صوت متداول‌ترین روش برای دستیابی به این مهم است. طی سال‌های اخیر تلاش‌های زیادی در راستای ارائه حل تحلیلی برای این‌گونه مسائل صورت پذیرفته است. رسیدن به حل تحلیلی کاربردی در این زمینه می‌تواند مسئله پیدا کردن محل و میزان آسیب را ساده‌تر و کم هزینه‌تر کند. ایجاد خرابیهای ناگهانی در سازه‌ها محققین را به سمت تحقیق روی دینامیک سازه‌های آسیب دیده سوق داد. از این رو دینامیک سازه‌های آسیب دیده طی سه دهه اخیر موضوع تحقیق محققان بسیاری بوده است. رویکرد مشترک این تحقیقات استفاده از مدل‌های عددی و اندازه‌گیری فرکانس به عنوان شاخص آسیب است. نتایج برخی از این تحقیقات در آیین‌نامه‌های ساختمانی به چشم می‌خورد.

گروهی دیگر از محققین سعی در بدست آوردن پاسخ دینامیکی این سازه‌ها در عبور بار یا جرم متحرک داشته‌اند. هنگام عبور بار متحرک "در مقابل بارگذاری استاتیکی"، تنش‌ها و تغییر مکانهای بیشتری به سازه وارد می‌شود. کاربرد مساله بار متحرک در حمل‌ونقل، اهمیت این مساله را به عنوان یک مساله کاربردی آشکار می‌کند. پس از حل مساله حرکت بار متمرکز متحرک می‌توان برخی مسایل دیگر را با استفاده از انتگرال پیچش و حل بدست آمده حل کرد. مسائل ذکر شده و برخی مسائل دیگر سبب شده‌اند تا این مساله به عنوان یک مساله کلاسیک مورد توجه محققان باشد.

## ۱-۲- تاریخچه مطالعات

هنگامی که سازه در معرض خستگی قرار می‌گیرد یا بارهای غیر معمول به آن وارد می‌شود ممکن است در آن آسیب‌هایی ایجاد شوند (مثلا ترک خوردگی حادث می‌شود). این آسیب‌ها در خصوصیات سازه (مثلا سختی و میرایی) تغییر ایجاد می‌کنند. نتیجه این تغییر، تغییر در خصوصیات دینامیکی (فرکانسهای طبیعی و شکل‌های مودی) سازه است [۲و۱]. محققان با این مساله با روش‌های متفاوتی روبرو شده اند. یکی از روش‌های مواجهه با این مساله روش تحلیلی است. ردیابی تحلیلی ترک در یک المان تیر به دو بخش کلی تقسیم می‌شود. بخش اول مساله مستقیم نامیده می‌شود. در این بخش بررسی اثر ترک روی فرکانس‌های طبیعی مورد بحث خواهد بود. بخش دوم مساله معکوس نامیده می‌شود. در این بخش صورت مساله این است که چگونه با داشتن فرکانسهای طبیعی محل و میزان آسیب را پیدا کنیم. در واقع در مساله معکوس می‌کوشیم تا با داشتن پارامترهای اندازه‌گیری شده و سایر مشخصات سازه پارامترهای مجهول مساله را پیدا کنیم. در این مساله پارامترهای مجهول محل و میزان آسیب هستند [۳]. بدیهی است که برای پیگیری حل معکوس لازم است حل مستقیم بدست آید. مساله مستقیم عبارتست از بدست آوردن معادلات ارتعاش آزاد با در نظر گرفتن ترک با عمق دلخواه در یک محل دلخواه.

آزمایشات غیر مخرب از قبیل اشعه x و امواج فرا صوت در حال حاضر در بدست آوردن محل و میزان آسیب به طور گسترده‌ای استفاده می‌شوند. این روش‌ها، بخصوص در اجزای طویل، وقت گیر و پرهزینه اند. تشخیص ترک به کمک اندازه‌گیری خصوصیات دینامیکی می‌تواند در این سازه‌ها مزایای زیادی داشته باشد. این مساله در سازه‌هایی که به همه نقاطشان دسترسی وجود ندارد پر رنگ تر می‌شود [۴].

برای توضیح رفتار دینامیکی سازه‌های آسیب دیده روشهای تحلیلی متعددی به کار گرفته شده‌اند. برای مدلسازی ترک نیز مدل‌های بسیاری ارائه شده‌اند. برخی کوشیده‌اند تا با کاهش در اساس مقطع عضو این مساله را حل کنند [۵]. برخی دیگر تلاش کرده‌اند تا نرمی نسبی موضعی ایجاد شده را تخمین بزنند [۶]. یک رویکرد دیگر صرف نظر کردن از اثر برش در مقطع است. در نتیجه این فرض می‌توان ترک

را با یک فنر پیچشی جایگزین کرد [۷-۹]. پیدا کردن سختی پیچشی در فنر جانشین ترک نیز یکی از مسایل مورد بررسی توسط محققین بوده است. روش‌های بسیار متعددی برای بدست آوردن سختی فنر در مراجع ارائه شده است. در این تحقیق در فصل سوم یکی از روش‌های اشاره شده را به تفصیل شرح خواهیم داد. در سال ۱۹۹۸ چندروس و همکارانش مساله را برای تیر اولر-برنولی و برای ترک‌های یک طرفه و دو طرفه به صورت جامع بررسی کردند [۱۰]. برخی دیگر کوشیده‌اند با روش‌های عددی (مثلا اجزای محدود) به مساله بپردازند [۱۱-۱۷]. در حل عددی مساله نیز پارامترهایی نظیر فرکانس‌های طبیعی، ضریب شدت تنش و شکل‌های مودی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. بدیهی است که در مدل‌های بررسی شده در تحلیل‌های عددی شرایط عمومی‌تری به نسبت موارد بررسی شده در موارد تحلیلی در نظر گرفته می‌شود. لازم است اشاره کنیم که هنگامی که شرایط عمومی‌تری برای مساله در نظر گرفته می‌شود، حل عددی تقریبا تنها گزینه برای حل اینگونه مسایل است. برای مثال در مرجع [۱۵] مساله در شرایط غیر منشوری برای تیر اولر-برنولی مد نظر قرار گرفته است یا در مرجع [۱۶] مساله برای یک المان یک بعدی آسیب دیده در سازه مورد توجه قرار می‌گیرد.

مبنای بخش عمده‌ای از تحقیقات اخیر در هر دو روش تحلیلی و عددی، تغییر در فرکانسهای طبیعی [۴، ۱۱، ۱۴، ۱۵، ۱۸-۲۴]، اندازه‌گیری نرمی دینامیکی [۲۵-۲۸] یا مقایسه شکل‌های مودی [۲۹-۳۲] بوده است. در میان رویکردهای ذکر شده بررسی تغییر در فرکانسهای طبیعی بواسطه سهولت نسبی در به کارگیری، هزینه و سرعت در تحلیل نتایج، روش معمول‌تری است [۲۳-۳۳]. البته لازم است اشاره کنیم که هر یک از رویکردهای اشاره شده می‌توانند بسته به نوع مساله مورد بحث عملکرد متفاوتی نشان دهند همچنین بکارگیری هر یک از این روش‌ها نیاز به تجهیزات خاصی دارد [۳۱]. بررسی تحقیقات اخیر برای سازه‌های آسیب دیده نشان می‌دهد که مساله ترک در تیر و تشخیص آن با روشهای مبتنی بر ارتعاش، طی سه دهه اخیر مورد علاقه محققین بسیاری بوده است [۲۳ و ۳۴-۴۱].

اغلب تحقیقاتی که تاکنون پیرامون مساله تیر ترک خورده انجام شده‌اند از تئوری تیر اولر برنولی بهره گرفته‌اند. همچنین این مساله برای شرایط مرزی مختلفی نظیر دو سر ساده [۴۲-۴۵]، ساده گیردار [۴۵]،

دوسر گیردار [۴۵]، و کنسولی [۴۷-۴۵ و ۲۲، ۸] بررسی شده است. در این میان تعداد بسیار معدودی از محققین [۴۴ و ۴۵] برای مساله حل بسته ارائه کرده‌اند.

لهله و مایتی [۴] در سال ۲۰۰۲ روش جدیدی را برای مواجهه با این مساله پیشنهاد کردند. در این روش معادله مشخصه برای تیر ترک خورده تیموشنکو در شرایط مرزی کنسولی با یک دترمینان مرتبه هشت بیان می‌شود. لین [۴۸] همین مساله را برای شرایط مرزی ساده بررسی کرد و معادله مشخصه سازه را بصورت حل بسته ارائه کرد. لویا و همکارانش عبارات ساده‌ای را برای ارزیابی فرکانس‌های طبیعی در تیر ساده ترک خورده ارائه کردند. اخیراً پوتیرنیچچ [۴۹] و همکارانش در یک تحقیق جالب به ارائه یک المان دو بعدی برای مدل کردن ترک با استفاده از اصول مکانیک شکست پرداخته‌اند. در این تحقیق یک المان دو بعدی جانشین ترک می‌شود و تنش در ناحیه ترک را مدل می‌کند در حالی که در حالت عادی لازم است از تعداد زیادی المان در ناحیه ترک استفاده شود. نیک و مایتی [۵۰] نیز مساله را برای جهت-گیری اختیاری ترک بررسی کرده‌اند.

پیش از اینکه به بررسی مطالعات انجام شده برای تیر ترک خورده در عبور بار متحرک بپردازیم. مروری بر تاریخچه این مطالعات برای تیر سالم خواهیم داشت. اندازه‌گیری کاربردی پاسخ دینامیکی با ابزارهای مربوطه، هنگام عبور بار از روی تیر با هزینه‌های بالایی همراه است [۵۱، ۵۲ و ۵۳]. از سوی دیگر چگونگی استفاده از وسایل اندازه‌گیری همواره مورد بحث بوده است [۵۴ و ۵۵ و ۵۶]. گاهی این اندازه‌گیری ایجاب می‌کند که در زمان ساخت تمهیدات ویژه‌ای در نصب ابزارها در نظر گرفته شود [۵۳]. حال آنکه اغلب با سازه‌های ساخته شده مواجهیم. از سوی دیگر شبیه سازی این سازه‌ها نیز همواره با خطاهای مدلسازی همراه بوده است.

دلایل ارائه شده اخیر لزوم پرداختن به این مساله را دو چندان می‌کند.

زیبده [۵۷] در سال ۱۹۹۵ مساله را برای بار متحرک تصادفی در تیر تحت اثر بار محوری بررسی کرد. لاو و همکارانش [۵۸]، ژو و لاو [۵۹]، لاو و همکارانش [۶۰]، چان و همکارانش [۶۱] و بالاخره لاو و ژو [۶۲]، طی سالهای ۱۹۹۷ تا ۲۰۰۰ مطالعات مدون گسترده‌ای روی این مساله و راه‌حل‌های مواجهه با

آن ارائه کردند. در این مجموعه روش‌های متفاوت مواجهه با این مساله به تفصیل شرح داده شده‌اند. روش دامنه زمان، مودال و روش تحلیل در دامنه فرکانس از روش‌های مورد بررسی در این تحقیقات هستند. لازم است اشاره کنیم که مساله حل شده در چند تحقیق اخیر با مساله مورد بررسی در این تحقیق متفاوت است. همچنین اشاره کنیم که همه مدل‌های ارائه شده بجز در تحقیق آخر، بر اساس مدل تیر اولر برنولی هستند. میچالدسوس [۶۳] در سال ۲۰۰۲ رفتار دینامیکی تیر ساده اولر-برنولی یک دهانه را در اثر عبور یک بار متمرکز با محتوای حرکت متفاوت بررسی کرد. در این تحقیق اثر تغییر سرعت و همچنین شتاب‌دار شدن حرکت در عبور بار به تفصیل بررسی شده است. ابوهلال [۶۴] در سال ۲۰۰۶ پاسخ تیر دوبله شده اولر-برنولی را در عبور یک بار ثابت بررسی کرد.

مطالعات انجام شده برای سازه‌های آسیب دیده بسیار محدودند. پارهی و بهرا مساله عبور یک جرم را با در نظر گرفتن یک شفت دایره‌ای و جرم متحرک به روش رانج کوتا حل کردند [۶۵] و تغییر مکان‌های تیر را بدست آوردند. محمود [۶۶] با در نظر گرفتن تیر ساده اولر برنولی تحت جرم یا نیروی متحرک، از آنالیز مودال برای محاسبه فاکتور شدت تنش بهره گرفت. برای همان مساله محمود و ابوزید [۶۷] از یک روش آزمون و خطا در آنالیز مودال برای دست یابی به پاسخ دینامیکی سازه استفاده کردند. بیللو و برگمن [۶۸] به مطالعه تحلیلی و آزمایشگاهی رفتار و پاسخ تیر آسیب دیده اولر-برنولی در عبور یک جرم پرداختند. لین و چانگ [۶۹] در سال ۲۰۰۶ مساله را با بهره‌گیری از گشایش مودی برای تیر کنسولی اولر-برنولی حل کردند. اخیرا برخی دیگر از محققین مساله ارتعاش آزاد و اجباری را برای تیر با مصالح ناهمگن بسط داده‌اند [۷۰، ۷۱ و ۷۲]. سیسمک و کوکاتورک [۷۰] تیر سالم اولر برنولی را در عبور یک بار هارمونیک مورد بررسی قرار دادند. در تحقیق ذکر شده رفتار مصالح در مقطع تیر بصورت تابع نمایی فرض شده است. این رفتار مصالح در اصطلاح FGM خوانده می‌شود. یانگ و همکارانش نیز با فرض رفتار تابعی مصالح مساله تیر ترک خورده اولر-برنولی را مورد بررسی قرار دادند [۷۱ و ۷۲]. در مرجع [۷۱] ارتعاش آزاد و اجباری تیر مد نظر قرار گرفته است در حالی که در مرجع [۷۲] آنالیز ارتعاش آزاد و کماتش مد نظر قرار گرفته است. در هر دو تحقیق ذکر شده نیروی محوری ثابتی نیز در تیر فرض می-



کنند. لازم است تاکید کنیم که در تمام مطالعاتی که تاکنون برای تیر ترک خورده انجام شده است از مدل‌های عددی یا تحلیلی با فرمول بندی تیر اولر- برنولی استفاده شده است [۷۰، ۶۹ و ۷۱]. بر اساس جستجوهای نویسنده به نظر می‌رسد که حل مساله تیر ترک خورده تیموشنکو تحت بار متمرکز متحرک به روش گشایش مودی برای اولین بار در این تحقیق ارائه شده است.

## فصل ۲- ارتعاش آزاد

### ۲-۱- معادلات ارتعاش

تیر یک دهانه‌ای به طول  $L$ ، سطح مقطع  $A$  و ممان اینرسی  $I$  را با شرایط مرزی مشخص در دو سوی آن در نظر می‌گیریم. معادلات ارتعاش برای این تیر با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل‌های برشی و لختی دورانی چنین بدست می‌آیند [۷۳].

$$k'G \left( \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) - \rho \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2-1-الف)$$

و

$$EI \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + k'GA \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - \psi(x,t) \right) - \rho I \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2-1-ب)$$

که در این روابط  $y(x,t)$  تغییر مکان عرضی تیر و  $\psi(x,t)$  شیب در تیر بواسطه خمش را بیان می‌کنند. پارامترهای  $E$ ،  $G$  و  $\rho$  به ترتیب مدول الاستیسیته، مدول برشی و جرم واحد حجم مصالح را نشان می‌دهند.  $k'$  نیز ضریب برشی است که با توجه به شکل مقطع تعیین می‌شود. می‌توان معادلات اخیر را به یکی از روش‌های ابتدایی معادلات دیفرانسیل (مثلا روش اپراتورها) بصورت غیر همبسته نوشت. اگر این فرایند انجام شود خواهیم داشت.

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \rho I \left( 1 + \frac{E}{k'G} \right) \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\rho^2 I}{k'G} \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial t^4} = 0 \quad (2-2-الف)$$

و همچنین

$$EI \frac{\partial^4 \psi(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} - \rho I \left( 1 + \frac{E}{k'G} \right) \frac{\partial^4 \psi(x,t)}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\rho^2 I}{k'G} \frac{\partial^4 \psi(x,t)}{\partial t^4} = 0 \quad (2-2-ب)$$

دو معادله بالا را می‌توان با روش جدا سازی متغیرها حل کرد. در ضمن حل به روش جدا سازی متغیرها می‌کوشیم توابع و متغیرها را به فضای نرمال ببریم. بنابراین می‌توانیم حل‌های زیر را برای معادلات بالا در نظر بگیریم.

$$y(x,t) = LU(x) \exp(j\omega t) \quad (3-2)$$

و

$$\psi(x,t) = \Psi(x) \exp(j\omega t) \quad (4-2)$$

در این معادلات  $z = \sqrt{-1}$  و همچنین  $\omega$  فرکانس ارتعاش را نشان می‌دهد.  $U(x)$  و  $\Psi(x)$  نیز به ترتیب توابع نرمال شده  $y(x,t)$  و  $\psi(x,t)$  هستند. با جایگزینی معادلات (3-2) و (4-2) در معادلات (2-2 الف) و (2-2 ب) می‌توانیم پارامتر زمان را از معادلات حذف کنیم.

همچنین با در نظر گرفتن تغییر متغیرهای معادله (2-5) و توجه به حذف متغیر زمان می‌توان معادلات بالا را چنین ((2-6 الف) و (2-6 ب)) باز نویسی کرد.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \varsigma = \frac{t}{\sqrt{L}}, \quad \vartheta = \frac{E}{k'G}, \quad r = \frac{I}{AL^2}, \quad s = \vartheta r, \quad \alpha = \frac{\rho A}{EI} L^4 \omega^2 \quad (5-2)$$

$$U^{iv}(\xi) + \alpha(r+s)U''(\xi) + \alpha(\alpha rs - 1)U(\xi) = 0 \quad (6-2 الف)$$

و

$$\Psi^{iv}(\xi) + \alpha(r+s)\Psi''(\xi) + \alpha(\alpha rs - 1)\Psi(\xi) = 0 \quad (6-2 ب)$$

معادلات اخیر بایستی برای شرایط مرزی مختلف حل شوند. حال فرض می‌کنیم:

$$a = \frac{\alpha(r+s)}{2}, \quad b = \alpha(\alpha rs - 1), \quad \beta_1 = (\sqrt{a^2 - b} - a)^{1/2}, \quad \beta_2 = (\sqrt{a^2 - b} + a)^{1/2} \quad (7-2)$$

و

$$m_1 = \frac{\alpha s + \beta_1^2}{\beta_1}, \quad m_2 = \frac{\alpha s - \beta_2^2}{\beta_2}, \quad (8-2)$$

حل کلی معادلات (۲-۶-الف) و (۲-۶-ب) را می‌توان به صورت زیر نوشت [۷۴].

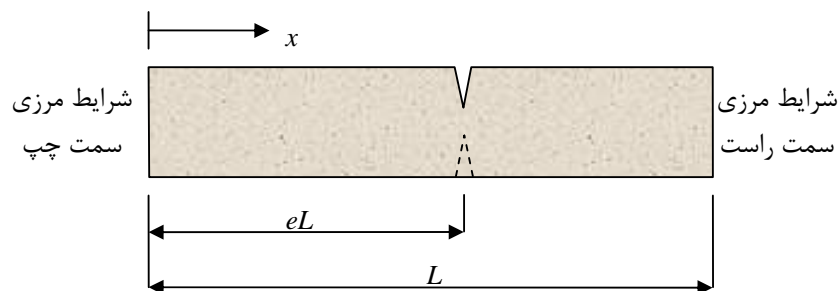
$$U(\xi) = A \cosh \beta_1 \xi + B \sinh \beta_1 \xi + C \cos \beta_2 \xi + D \sin \beta_2 \xi \quad (۲-۹-الف)$$

و

$$\Psi(\xi) = Am_1 \sinh \beta_1 \xi + Bm_1 \cosh \beta_1 \xi + Cm_2 \sin \beta_2 \xi - Dm_2 \cos \beta_2 \xi \quad (۲-۹-ب)$$

که در آن  $A, B, C, D$  ثابت اند.

حال تیری با یک ترک یک‌طرفه یا دوطرفه (شکل ۲-۱) را در نظر بگیرید. طول تیر برابر با  $L$  فرض می‌شود همچنین محل ترک در  $\xi = e$  در نظر گرفته می‌شود. برای حل مساله ارتعاش آزاد، تیر را به دو بخش تقسیم می‌کنیم، محل ترک نقطه تقسیم تیر به این دو بخش است. همچنین فرض بر این است که ترک در حین ارتعاش همواره باز می‌ماند. معادلات ارتعاش برای دو بخش اشاره شده بصورت زیر نوشته می‌شوند.



۱-۲ تیر تیموشنکو با ترک باز یک طرفه (خط پر) و ترک دو طرفه

(خط پر و خط چین)

$$U_1^{iv}(\xi) + \alpha(r+s)U_1''(\xi) + \alpha(ars-1)U_1(\xi) = 0, \quad 0 < \xi < e \quad (۲-۱۰-الف)$$

$$\Psi_1^{iv}(\xi) + \alpha(r+s)\Psi_1''(\xi) + \alpha(ars-1)\Psi_1(\xi) = 0, \quad 0 < \xi < e \quad (۲-۱۰-ب)$$

$$U_2^{iv}(\xi) + \alpha(r+s)U_2''(\xi) + \alpha(ars-1)U_2(\xi) = 0, \quad e < \xi < 1 \quad (۲-۱۰-ج)$$