بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضـای هیـأت داوران نسـخهٔ نهـایی پایـان‌نامـه **خـانم مـریم سـلیمانی‌کرانـی** رشـته **ریاضـی‌محـض** بـه شماره دانشجویی **۹۰۵۲۰۵۱۰۱۷** تحت عنوان: «**قضیه هربراند برای منطـق پیوسـته**» را در تـاریخ **۱۳۹۲/۷/۲۹** از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمد باقری	دانشیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر مرتضی منیری	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلا به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله ~~دکتری~~ نگارنده در رشته منطق ریاضی است که در سال ۹۲ در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار ~~خانم~~/جناب آقای دکتر سید محمد باقری ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر — و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر — از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب مریم سلیمانی دانشجوی رشته منطق ریاضی مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: مریم سلیمانی

تاریخ و امضا: ۹۲/۷/۳۰

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیات علمی، دانشجویان، دانش‌اموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درامدهای حاصل از انها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید اورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌اموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا اثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس ائین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیات رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب حریم سلیمانی دانشجوی رشته منصوره ریاضی ورودی سال تحصیلی ۹۰ مقطع کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در ائین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد ائین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر ان به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمنا نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس براورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:

تاریخ: ۹۲/۷/۳۰

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
گروه ریاضی محض

قضیه هربراند برای منطق پیوسته

نگارنده:
مریم سلیمانی

استاد راهنما:
دکتر سیدمحمد باقری

مهرماه ۱۳۹۲

تقدیم به همسرم

به پاس محبت‌های بی‌دریغش که هرگز فروکش نمی‌کند

سپاس‌گزاری

بسی شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر سید محمد باقری که با صبر فراوان و صرف وقت زیاد، همواره راهنما و راه‌گشای بنده در تکمیل این پایان‌نامه بوده‌اند تشکر نمایم.
در پایان از پدر، مادر، همسر عزیزم و همه فرشتگانی که بالهای محبت خود را گسترانیدند و با تحمل دشواری‌ها، سبب شدند تا در کمال آسودگی خیال و فراغت بال، شوق آموختن در من زنده بماند صمیمانه سپاسگزارم.

مریم سلیمانی

مهر ۱۳۹۲

تهران/ ایران

چکیده

ما قضیه هربراند را در چارچوب منطق پیوسته ثابت می‌کنیم. صرف نظر از جزئیات، قضیه هربراند منطق مرتبه اول را به منطق گزاره‌ای فرو می‌کاهد. ما روی یک حالت خاص که معمولاً با ابزار ساده مدل تئوریک ثابت می‌شود، تمرکز می‌کنیم. در حالت مرتبه اول، قضیه هربراند کاربردهای مهمی در اندازه‌های موتیویک دارد که در آن یک مشخص‌سازی از تابع‌های تعریف‌پذیر مورد نیاز است.
در این پایان‌نامه، یک حالت منطق پیوسته از قضیه هربراند را ثابت نموده، و از آن برای مشخص‌سازی عمل‌های تعریف‌پذیر روی فضاهای هیلبرت استفاده می‌کنیم. به ویژه، نشان داده می‌شود که عمل‌های تعریف‌پذیر به طور تکه‌ای توسط ترم‌ها تقریب زده می‌شوند.
وضعیت مشابهی برای توسیع‌های فضاهای هیلبرت نیز برقرار است.
در نوشتار این پایان‌نامه از مقاله زیر استفاده شده است.

I. Goldbring, *An approximate Herbrand's theorem and definable functions in metric structures,* Math. Log. Quart. 58, No. 3, 208-216(2012)

واژه‌های کلیدی:

قضیه هربراند ، منطق پیوسته، ساختار متریک، تابع تعریف‌پذیر، فضای هیلبرت

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

یک ساختار متریک یک ساختار چندگونه‌ای [۱] است که هر گونه آن یک فضای متریک کامل با قطر متناهی است. همچنین این ساختار شامل عناصری متمایز مانند برخی تابع‌های چند متغیره از جمله تابع‌هایی بین گونه‌ها و تابع‌هایی از گونه‌ها به زیرمجموعه‌های کراندار $\mathbb{R}$ می‌باشد که همگی باید پیوسته یکنواخت باشند. مثال‌هایی از این ساختارها در ریاضیات از جمله آنالیز و هندسه موجود است، مانند فضاهای متریک، جبرهای اندازه، ساختارهایی بر پایه فضاهای باناخ [۲] (که در آن می‌توان گوی‌ها را به جای گونه‌ها در نظر گرفت): شامل شبکه های باناخ [۳] ، C^*جبرها و غیره...

منطق ساختارهای متریک که ما در فصل اول بررسی می‌کنیم در چارچوب مدل تئوری منطق پیوسته [۹] می‌باشد که در سال ۱۹۶۶ به طور جدی مورد مطالعه قرار گرفت و سپس شکل اصلاح شده‌ای از آن در قالب مدل تئوری ساختارهای متریک ارائه شد که با همان نام منطق پیوسته مشخص می‌شود و ما پیرامون این شکل اصلاح شده بحث می‌کنیم. در این منطق هر فضای هاسدورف فشرده X را می‌توانستند به عنوان مجموعه ارزش‌های درستی در نظر بگیرند. اما این کار برای دستیابی به یک نظریه کاملاً مطلوب بسیار کلی بود. در اینجا ما فرض می‌کنیم که فضای ارزش‌های درستی X یک بازه بسته و کراندار از اعداد حقیقی با توپولوژی ترتیبی باشد. به طور مشخص بازه $[۰, ۱]$ را در نظر می‌گیریم. از آنجایی که مجموعه ارزش‌های درستی به همراه یک ترتیب خطی کامل است، دو چنداگر معروف که به وضوح شایسته توجه ویژه می‌باشند، دو عمل $\sup$ و $\inf$ هستند، که تنها چنداگرهای مورد نیاز ما در منطق پیوسته و ساختارهای متریک می‌باشند.
فصل اول ترکیب و معناشناسی منطق پیوسته را شرح خواهد داد که در نوشتار آن از [۵] استفاده شده است و سپس در همین فصل چند قضیه مهم در منطق پیوسته از جمله قضیه فشردگی و قضیه‌های

[۱] many-sorted

[۲] Banach spaces

[۳] Banach lattices

لونهایم-اسکولم را بیان می‌کنیم.
قضیه هربراند یکی از اساسی‌ترین قضیه‌های منطق ریاضی می‌باشد. که توسط هربراند [۴] در سال ۱۹۳۰ به عنوان قضیه اصلی پایان‌نامه‌اش ارائه شد و ما در فصل ۲ به آشنایی با این قضیه می‌پردازیم و چندین صورت مختلف از آن را به همراه اثبات ارائه می‌دهیم. آنچه به طور معمول قضیه هربراند نامیده می‌شود در کتاب‌های بسیاری یک شکل ساده از قضیه هربراند است که تنها برای $\exists\forall$-فرمول‌ها کاربرد دارد. اما صورت اصلی این قضیه برای فرمول‌های مرتبه اول دلخواه به کار می‌رود. این قضیه اثبات‌های مختلفی دارد که ما در فصل ۲ اثبات مدل تئوریک آن را ارائه داده‌ایم. همچنین در این فصل قضیه هربراند را در منطق پیوسته بیان و اثبات می‌کنیم. سپس به ارائه تئوری‌های اولیه می‌پردازیم. در پایان کاربردهایی از قضیه هربراند را برای تعیین تابع‌های تعریف‌پذیر در مدل‌های مرتبه اول بیان می‌کنیم. این قضیه همچنین کاربردهایی از جمله تقریب تابع‌های تعریف‌پذیر توسط تابع‌های آفین در مبحث انتگراگیری موتیوی دارد. کاربرد دیگر قضیه هربراند در فضاهای هیلبرت نامتناهی-بعد می‌باشد که در این پایان‌نامه به آن می‌پردازیم. در ابتدا باید با تابع‌های آفین و فضای هیلبرت آشنایی پیدا کنیم. نوشتار فصل ۲ و ۳ بر پایه [۱] بوده است.

[۴] Jacques Herbrand

فصل ۱

آشنایی با منطق پیوسته و ساختارهای متریک

در این فصل ابتدا ارتباط میان منطق مرتبه اول پیوسته و ساختارهای متریک را بیان می‌کنیم و سپس به معرفی ساختارهای متریک و زبان پیوسته می‌پردازیم.

۱.۱ منطق پیوسته

منطق پیوسته که آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم گسترشی از منطق مرتبه اول کلاسیک می‌باشد که در آن می‌توان مجموعه ارزش‌های درستی را از $\{۰, ۱\}$ به $[۰, ۱]$ گسترش داد. گزاره‌ها که شامل رابطه تساوی می‌باشند به تابع‌هایی از مجموعه زمینه A از یک ساختار ریاضی به بازه $[۰, ۱]$ تبدیل می‌شوند. در واقع تساوی در منطق $[۰, ۱]$-ارزشی یک متر d روی A (برای راحتی از قطر بیشینه ۱) است. همچنین متناظر با این فرض که تساوی یک رابطه هم‌ارزی برای تابع‌ها و رابطه‌ها در ساختارهای ریاضی است، داریم که تابع‌ها و رابطه‌ها در یک ساختار متریک نسبت به متر d پیوسته یکنواخت هستند. در منطق پیوسته $[۰, ۱]$-ارزشی رابطه‌ها، تابع‌های به طور یکنواخت پیوسته روی $[۰, ۱]$ و چنداگرها $\sup$ و $\inf$ هستند.
قضیه‌های منطق مرتبه اول پیوسته برای ساختارهای متریک تعمیمی از قضیه‌های منطق مرتبه اول معمولی برای ساختارهای عادی می‌باشند. در منطق پیوسته قضیه فشردگی، قضیه‌های لونهایم-

اسکولم[۱]، وجود مدل‌های همگن و آکنده، ویژگی‌های چنداگرزدایی، قضیه تعریف‌پذیری بث [۲]، قضیه زدایش تایپ‌ها [۳] و بسیاری از قضیه‌های کلاسیک دیگر برقرار است. در واقع هر ساختار ریاضی در منطق مرتبه اول معمولی را می‌توان به عنوان یک ساختار متریک با متر گسسته در نظر گرفت ($d(a,b) = ۱$ برای هر a و b متمایز). بنابراین تمام پیامدهایی که برای منطق مرتبه اول پیوسته درست است تعمیمی از پیامدهای متناظر برای منطق مرتبه اول معمولی می‌باشد.
دلیل دیگر اهمیت منطق پیوسته، کاربردهای نظریه مدل در آنالیز و هندسه می‌باشد، که اغلب این کاربردها به ساختمان فراضرب و یا به طور هم‌ارز به ساختمان پوشش نااستاندارد بستگی دارند. این ساختمان به طور گسترده در آنالیز تابعی و هندسه فضای متریک استفاده می‌شود. منطق فرمول‌های کراندار مثبت به منظور فراهم کردن یک چارچوب مدل تئوریک برای استفاده از فراضرب معرفی شده و در این راه بسیار موفق بوده است. منطق پیوسته برای ساختارهای متریک، یک زمینه هم‌ارز برای این ساختمان فراضرب می‌باشد. نوشتن فرمول‌های کراندار مثبت برای بیان گزاره‌هایی از آنالیز و هندسه، مشکل و اغلب غیرطبیعی است، در حالی که در منطق پیوسته به راحتی قابل بیان هستند.
در واقع منطق مرتبه اول پیوسته یک زبان مشترک برای آنالیزدانان و مدل تئوریست‌ها فراهم می‌کند، که این امر ناشی از استفاده مفاهیم معروف آنالیز در این منطق می‌باشد (مانند sup و inf به جای $\forall$ و $\exists$).

۲.۱ زبان و ساختارهای متریک

تعریف ۱.۱. یک زبان مانند $\mathcal{L}$ مجموعه‌ای از نمادهای رابطه‌ای $\mathcal{R}$ به همراه عدد صحیح n_R برای هر $R \in \mathcal{R}$، نمادهای تابعی $\mathcal{F}$ به همراه عدد صحیح n_f برای هر $f \in \mathcal{F}$ و نمادهای ثابت $\mathcal{C}$ است، در این حالت زبان $\mathcal{L}$ با یک زبان مرتبه اول در مدل تئوری یکسان است.

تعریف ۲.۱. (M,d) را یک فضای متریک در نظر می‌گیریم. این فضا را کراندار گوییم اگر یک عدد حقیقی مانند B وجود داشته باشد به گونه‌ای که برای هر $x,y \in M$ داشته باشیم، $d(x,y) \leq B$. کوچکترین عدد B که در این شرایط صدق کند را قطر (M,d) گوییم.

تعریف ۳.۱. فرض کنید (M,d) یک فضای متریک کامل و کراندار باشد. یک رابطه روی M یک تابع به طور یکنواخت پیوسته از M^n (برای $n \geq ۱$) به بازه‌ای کراندار در $\mathbb{R}$ است. یک تابع یا عمل

[۱] Löwenheim-Skolem

[۲] Beth

[۳] omitting types theorem

روی M یک تابع به طور یکنواخت پیوسته از M^n (برای $n \geq ۱$) به M می‌باشد. در هر مورد n تعداد آرایه‌های رابطه یا تابع را مشخص می‌کند.
یک ساختار متریک $\mathcal{M}$ بر پایه (M,d) شامل یک خانواده $(R_i|i \in I)$ از رابطه‌های روی M، یک خانواده $(F_j|j \in J)$ از تابع‌های روی M و یک خانواده $(c_k|k \in K)$ از عناصر ثابت M می‌باشد.
وقتی یک ساختار متریک را معرفی می‌کنیم، اغلب آن را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\mathcal{M} = (M, R_i, F_j, c_k | i \in I, j \in J, k \in K)$$

که هر یک از مجموعه‌های اندیس I, J, K می‌توانند تهی باشند که اگر همگی تهی باشند در این حالت $\mathcal{M}$ یک فضای متریک کراندار محض است.

شرط‌های کلیدی در ساختارهای متریک عبارتند از:
۱)فضای متریک کامل و کراندار است،
۲)هر رابطه مقدارهایش را در یک بازه از اعداد حقیقی اختیار می‌کند،
۳)تابع‌ها و رابطه‌ها پیوسته یکنواخت هستند.
در اینجا مثال‌هایی از ساختارهای متریک ارائه می‌دهیم:

مثال ۱.۱. یک فضای متریک کامل و کراندار (M,d) بدون هیچ ساختار اضافی.

مثال ۲.۱. ساختار $\mathcal{M}$ با همان مفهوم معمول در منطق مرتبه اول را در نظر می‌گیریم. متر گسسته را روی مجموعه زمینه ($d(a,b) = ۱$ جایی که a و b مجزا هستند) قرار می‌دهیم و یک رابطه را به عنوان رابطه‌ای که مقادیرش را از مجموعه $\{۰, ۱\}$ اختیار می‌کند در نظر می‌گیریم بنابراین نظریه گسترش یافته در اینجا، یک نظریه تعمیمی از مدل تئوری مرتبه اول می‌باشد.

مثال ۳.۱. اگر (M,d) یک فضای متریک کامل و بی‌کران با یک عنصر مشخص a باشد، آن را به عنوان یک ساختار متریک چندگونه $\mathcal{M}$ در نظر می‌گیریم برای مثال، می‌توان گونه‌ای را به یک گوی بسته B_n به شعاع n حول a مجهز به متر به دست آمده توسط d برد. نگاشت‌های شمول $I_{mn} : B_m \longrightarrow B_n$ $(m < n)$ تابع‌هایی در $\mathcal{M}$ می‌باشند به منظور اتصال گونه‌های مختلف به یکدیگر.

مثال ۴.۱. گوی یکه Bاز فضای باناخ Xروی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$:
می‌توان تابع‌ها را نگاشت‌های $f_{\alpha,\beta}$ در نظر گرفت که در آن برای هر جفت اسکالری که در $|\alpha|+|\beta| \leq ۱$ صدق می‌کنند داریم $f_{\alpha,\beta}(x,y) = \alpha x + \beta y$. نرم را می‌توان به عنوان یک رابطه و عضو همانی جمعی

0_X را به عنوان یک عنصر مشخص در نظر گرفت. X را نیز می‌توان به عنوان یک ساختار چندگونه‌ای در نظر گرفت که در آن هر گونه به شکل یک گوی به مرکز ۰ و شعاع یک عدد صحیح مثبت می‌باشد.

مثال ۵.۱. جبرهای باناخ: در این جبرها ضرب به عنوان یک عمل است و اگر جبر دارای یک همانی ضرب باشد آن را به عنوان ثابت در نظر می‌گیریم.

مثال ۶.۱. فضاهای هیلبرت [۴] به همراه ضرب داخلی مانند فضای باناخ رفتار می‌کنند و ضرب داخلی به عنوان یک رابطه‌ی دوجایی است.

به هر ساختار متریک $\mathcal{M}$ می‌توان زبانی به شکل زیر نسبت داد. به هر رابطه‌ی R از $\mathcal{M}$ نماد رابطه‌ای P و عدد صحیحی چون $n(P)$ که تعداد آرایه‌های R را بیان می‌کند نسبت می‌دهیم، و آن را با $P^{\mathcal{M}}$ نمایش می‌دهیم. همچنین به هر تابع F از $\mathcal{M}$ یک نماد تابعی f و عدد صحیحی چون $n(f)$ که بیانگر تعداد آرایه‌های F است را نسبت می‌دهیم و آن را با نماد $f^{\mathcal{M}}$ نشان می‌دهیم. در نهایت به هر عنصر مشخص a از $\mathcal{M}$، یک نماد ثابت c نسبت می‌دهیم، و آن را با نماد $c^{\mathcal{M}}$ نمایش می‌دهیم.
علاوه بر این یک زبان برای ساختارهای متریک باید خاص‌تر باشد در نتیجه باید برای هر نماد رابطه‌ای P یک بازه بسته وکراندار مانند I_P از اعداد حقیقی و یک پیمانه پیوستگی یکنواخت $\triangle_P$ ارائه داد. I_P و $\triangle_P$ باید به گونه‌ای باشند که $P^{\mathcal{M}}$ مقادیرش را در I_P اختیار کند و $\triangle_P$ یک پیمانه پیوستگی یکنواخت برای $P^{\mathcal{M}}$ باشد. همچنین این زبان برای هر نماد تابعی f یک پیمانه پیوستگی یکنواخت $\triangle_f$ را ارائه می‌دهد، که پیمانه پیوستگی یکنواخت تابعی مانند $\triangle : (0,1] \longrightarrow (0,1]$ می‌باشد و اگر (M,d) و (M',d') دو فضای متریک باشند و $f : M \longrightarrow M'$ یک تابع دلخواه باشد، گوییم $\triangle : (0,1] \longrightarrow (0,1]$ یک پیمانه پیوستگی یکنواخت برای f است هر گاه برای هر $\varepsilon \in (0,1]$ و هر $x,y \in M$ داشته باشیم:

$$d(x,y) < \triangle(\varepsilon) \Longrightarrow d'(f(x),f(y)) \leq \varepsilon$$

f پیوسته یکنواخت است هرگاه یک پیمانه پیوستگی یکنواخت داشته باشد. در نهایت زبان L باید یک عدد حقیقی نامنفی مانند D_L را به گونه‌ای ارائه دهد که این عدد یک کران برای قطر فضای متریک کامل (M,d) باشد که $\mathcal{M}$ بر پایه آن بنا شده است. ما اغلب d داده شده برای $\mathcal{M}$ را با $d^{\mathcal{M}}$ نمایش می‌دهیم.
معمولاً برای راحتی و بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم که $D_L = 1$ و برای هر نماد

[۴] Hilbert spaces

رابطه‌ای P داریم $I_P = [\circ, \text{۱}]$.

زمانی که موردهای بالا برآورده شود و نمادهای رابطه‌ای، تابعی و ثابت L دقیقاً با رابطه‌ها، تابع‌ها و عناصر ثابت $\mathcal{M}$ متناظر شوند، گوییم $\mathcal{M}$ یک Lـساخت است.

زبان L در تنظیم ساختارهای متریک موارد زیر را مشخص می‌کند:

۱)یک کران برای قطر فضای متریک زمینه

۲)یک پیمانه پیوستگی یکنواخت برای هر رابطه و تابع

۳)یک بازه کراندار و بسته از مقادیری که یک رابطه، اختیار می‌کند.

تعریف ۴.۱. فرض کنید $M_\circ$ یک مجموعه باشد $d_\circ : M_\circ \times M_\circ \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک متریک‌نما گویند هرگاه برای هر $x, y, z \in M_\circ$ داشته باشیم

$$d_\circ(x,x) = \circ$$

$$d_\circ(x,y) = d_\circ(y,x) \geq \circ$$

$$d_\circ(x,z) \leq d_\circ(x,y) + d_\circ(y,z).$$

این شرایط مشابه شرایطی است که برای یک متر تعریف می‌شود به جز حالتی که ممکن است حتی در زمانی که x, y مجزا هستند داشته باشیم $d_\circ(x,y) = \circ$. در این صورت $(M_\circ, d_\circ)$ یک فضای شبه متریک خواهد بود.

در بسیاری از موارد می‌توان یک فضای متریک را به عنوان خارج‌قسمتی از یک فضای شبه‌متریک $(M_\circ, d_\circ)$ ساخت. اگر $(M_\circ, d_\circ)$ یک فضای شبه‌متریک باشد، می‌توان یک رابطه هم‌ارزی E روی $M_\circ$ را توسط $E(x,y) \Leftrightarrow d_\circ(x,y) = \circ$ تعریف کرد در این صورت داریم

$$d_\circ(x,y) = d_\circ(x', y')$$

که در آن xEx' و yEy'. M را مجموعه خارج‌قسمتی $M_\circ/E$ و $\pi : M_\circ \longrightarrow M$ را نگاشت خارج‌قسمتی در نظر می‌گیریم. بنابراین برای هر $x \in M_\circ$، $\pi(x)$ کلاس هم‌ارزی x است. آنگاه برای هر $x, y \in M_\circ$، d را روی M توسط $d(\pi(x), \pi(y)) = d_\circ(x,y)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت (M,d) یک فضای متریک و π یک تابع حافظ فاصله از $(M_\circ, d_\circ)$ به (M,d) می‌باشد که (M,d) فضای متریک خارج‌قسمتی القاء شده توسط $(M_\circ, d_\circ)$ است.

تعریف ۵.۱. فرض کنید $(M_\circ, d_\circ)$ یک فضای شبه متریک باشد که

$$\forall x, y \in M_\circ \quad d_\circ(x,y) \leq D_L$$

یک L-پیش‌ساخت $\mathcal{M}_\circ$ بر پایه $(M_\circ, d_\circ)$ ساختاری شامل اطلاعات زیر است:

۱) برای هر نماد رابطه‌ای p از L یک تابع $p^{\mathcal{M}_\circ} : M_\circ^n \longrightarrow I_p$ وجود دارد که یک پیمانه پیوستگی یکنواخت مانند Δ_p دارد.

۲) برای هر نماد تابعی f از L یک تابع $f^{\mathcal{M}_\circ} : M_\circ^n \longrightarrow M_\circ$ وجود دارد که یک پیمانه پیوستگی یکنواخت مانند Δ_f دارد.

۳) برای هر نماد ثابت c از L یک عنصر $c^{\mathcal{M}_\circ}$ از $M_\circ$ وجود دارد.

تعریف ۶.۱. L را یک زبان برای ساختارهای متریک در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\mathcal{N}$ و $\mathcal{M}$ دوLـساخت باشند. یک نشاندن از $\mathcal{M}$ به $\mathcal{N}$ یک ایزومتری مانند

$$T : (M, d^{\mathcal{M}}) \longrightarrow (N, d^{\mathcal{N}})$$

می‌باشد که برای هر نماد تابعی nـ جایی از L مانند f و $a_1 ...... a_n \in M$ داریم

$$T(f^{\mathcal{M}}(a_1, ..., a_n)) = f^N(T(a_1), ..., T(a_n))$$

برای هر نماد ثابت از L مانند c داریم

$$T(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$$

و برای هر نماد رابطه‌ای nـ جایی از L مانند P و $a_1, ..., a_n \in M$ داریم

$$P^{\mathcal{M}}(a_1, ..., a_n) = P^{\mathcal{N}}(T(a_1), ..., T(a_n)).$$

یک ایزومورفیسم یک نشاندن پوشاست. اگر یک ایزومورفیسم بین $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ وجود داشته باشد گوییم این دو با هم ایزومورف هستند و می‌نویسیم $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

$\mathcal{M}$ را زیرساخت $\mathcal{N}$ گوییم و می‌نویسیم $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ هرگاه $M \subseteq N$ و یک نشاندن از $\mathcal{M}$ به $\mathcal{N}$ موجود

باشد. همچنین نگاشت شمول از M به N یک نشاندن از $\mathcal{M}$ به $\mathcal{N}$ باشد.

تعریف ۷.۱. ترم‌ها در زبان پیوسته دقیقاً همانند منطق مرتبه اول به طور استقرایی تعریف می‌شوند. هر متغیر و هر نماد ثابت یک L-ترم است. اگر f یک نماد تابعی n-جایی و $t_1, ..., t_n$، L-ترم باشند آنگاه $f(t_1, ..., t_n)$ یک L-ترم است. تمامی L-ترم‌ها این‌چنین ساخته می‌شوند. فرمول‌ها نیز در زبان L عبارت‌های به شکل $P(t_1, ..., t_n)$ می‌باشند که در آن P یک نماد رابطه‌ای n-جایی و $t_1, ..., t_n$، L-ترم هستند، مانند $d(t_1, t_2)$ که در آن t_1, t_2، L-ترم هستند. توجه کنیم که نماد منطقی d برای متر به طور صوری به عنوان یک نماد رابطه‌ای دوجایی به کار رفته است، دقیقاً مشابه نماد برابری در منطق مرتبه اول.

فرمول‌ها نیز در زبان پیوسته به طور استقرایی ساخته می‌شوند و مبنای این ساختار استقرایی متناظر با تعریف آن در منطق مرتبه اول است. تابع‌های پیوسته نقش رابط‌ها و sup و inf نقش چنداگرها در منطق مرتبه اول را، ایفا می‌کنند. تعریف دقیق در زیر آورده شده است.

تعریف ۸.۱. کلاس Lـ فرمول‌ها، کوچکترین کلاس عبارت‌های به شکل زیر می‌باشد:

۱) فرمول‌های اتمی، Lـ فرمول‌ها هستند.

۲) اگر $u : [0, 1]^n \longrightarrow [0, 1]$ پیوسته باشد و $\varphi_1, ..., \varphi_n$، Lـ فرمول باشند، آنگاه $u(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ یک Lـ فرمول است.

۳) اگر φ یک L ـ فرمول و x یک متغیر باشد، آنگاه $\sup_x \varphi$ و $\inf_x \varphi$، Lـ فرمول هستند.

یک Lـ فرمول، بی‌چنداگر است هرگاه به طور استقرایی از فرمول‌های اتمی وبدون استفاده از $\sup_x$ و $\inf_x$ به دست آمده باشد.

تعریف ۹.۱. یک متغیر x را بسته می‌نامیم اگر در فرمولی شامل $\sup_x \varphi$ و $\inf_x \varphi$ ظاهر شود، در غیر این صورت آن را آزاد گوییم.

تعریف ۱۰.۱. یک L -جمله، L -فرمولی است که متغیر آزاد نداشته باشد.

معناشناسی

برای هر $L(M)$ جمله σ، ارزش σ در $\mathcal{M}$ یک عدد حقیقی در بازه $[0, 1]$ می‌باشد و با $\sigma^{\mathcal{M}}$ نمایش داده می‌شود.

اکنون آماده‌ایم معناشناسی منطق پیوسته را با استقرا روی فرمول‌ها ارائه دهیم.

تعریف ۱.۱۱. ۱) برای هر t_1, t_2

$$(d(t_1, t_2))^{\mathcal{M}} = d^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, t_2^{\mathcal{M}})$$

۲) برای هر نماد رابطه‌ای n-جایی P از L و هر $t_1, ..., t_n$

$$(P(t_1, ..., t_n))^{\mathcal{M}} = P^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, ..., t_n^{\mathcal{M}})$$

۳) برای $L(M)$-جمله‌های دلخواه $\sigma_1, ..., \sigma_n$ و هر تابع پیوسته $u : [0, 1]^n \longrightarrow [0, 1]$

$$(u(\sigma_1, ..., \sigma_n))^{\mathcal{M}} = u(\sigma_1^{\mathcal{M}}, ..., \sigma_n^{\mathcal{M}})$$

۴) برای هر $L(M)$-فرمول $\varphi(x)$

$$(\sup_x \varphi(x))^{\mathcal{M}} \equiv \sup\{\varphi(a)^{\mathcal{M}}; a \in M\} \in [0, 1]$$

۵) برای هر $L(M)$-فرمول $\varphi(x)$

$$(\inf_x \varphi(x))^{\mathcal{M}} \equiv \inf\{\varphi(a)^{\mathcal{M}}; a \in M\} \in [0, 1]$$

تعریف ۱.۱۲. یک $L(M)$-فرمول $\varphi(x_1, ..., x_n)$ را در نظر بگیرید، $\varphi^{\mathcal{M}}$ تابعی از M^n به $[0, 1]$ می‌باشد که به‌وسیله

$$\varphi^{\mathcal{M}}(a_1, ..., a_n) = (\varphi(a_1, ..., a_n))^{\mathcal{M}}$$

تعریف شده است.

فرمول‌ها در منطق پیوسته تابع‌های به طور یکنواخت پیوسته‌ای را تعریف می‌کنند.

قضیه ۱.۱. فرض کنید $t(x_1, ..., x_n)$ یک L-ترم و $\varphi(x_1, ..., x_n)$ یک L-فرمول باشد. آنگاه تابع‌های $\triangle_t$ و $\triangle_\varphi$ از $[0, 1]$ به $[0, 1]$ به گونه‌ای وجود دارند که برای هر L-پیش‌ساخت $\mathcal{M}$، $\triangle_t$ یک پیمانه‌ی پیوستگی یکنواخت برای تابع $t^{\mathcal{M}} : M^n \longrightarrow M$ و $\triangle_\varphi$ یک پیمانه‌ی پیوستگی یکنواخت برای رابطه $\varphi^{\mathcal{M}} : M^n \longrightarrow [0, 1]$ می‌باشند.

هم‌ارزی منطقی

تعریف ۱.۱۳. یک L-شرط E که به صورت $E(x_۱, ..., x_n)$ نوشته می‌شود به فرمولی مانند $\varphi = ۰$ اشاره می‌کند. اگر E یک $L(M)$-شرط $\varphi(x_۱, ..., x_n) = ۰$ باشد و $a_۱, ..., a_n \in M$ باشند، گوییم E به ازای $a_۱, ..., a_n$ در $\mathcal{M}$ صدق می‌کند و می‌نویسیم $\mathcal{M} \models E[a_۱, ..., a_n]$ هرگاه

$$\varphi^{\mathcal{M}}(a_۱, ..., a_n) = ۰$$

تعریف ۱.۱۴. دو L-فرمول $\varphi(x_۱, ..., x_n)$ و $\psi(x_۱, ..., x_n)$ را هم‌ارز منطقی نامند هرگاه برای هر L-ساخت $\mathcal{M}$ و هر $a_۱, ..., a_n \in M$ داشته باشیم

$$\varphi^{\mathcal{M}}(a_۱, ..., a_n) = \psi^{\mathcal{M}}(a_۱, ..., a_n).$$

می‌توان تعریف قبل را با در نظر گرفتن فاصله منطقی بین φ و ψ به صورت سوپریمم تمام اعداد

$$|\varphi^{\mathcal{M}}(a_۱, ..., a_n) - \psi^{\mathcal{M}}(a_۱, ..., a_n)|$$

گسترش داد که در آن $\mathcal{M}$ یک $L-$ساختار دلخواه است و $a_۱, ..., a_n \in M$. این مفهوم یک متریک‌نما روی مجموعه تمام فرمول‌ها با متغیرهای آزاد بین $x_۱, ..., x_n$ تعریف می‌کند. دو فرمول به طور منطقی هم‌ارزند اگرو تنها اگر فاصله منطقی بین آنها صفر باشد.

تعریف ۱.۱۵. برای $i = ۱, ۲$، E_i را L-شرط $\varphi_i(x_۱, ..., x_n) = ۰$ در نظر می‌گیریم. گوییم $E_۱$ و $E_۲$ هم‌ارز منطقی هستند اگر برای هر L-ساخت $\mathcal{M}$ و هر $a_۱, ..., a_n \in M$ داشته باشیم

$$\mathcal{M} \models E_۱[a_۱, ..., a_n] \iff \mathcal{M} \models E_۲[a_۱, ..., a_n].$$

برخی تعریف‌ها در مدل تئوری

تعریف ۱.۱۶. یک تئوری در L مجموعه‌ای از L-شرط‌های بسته است. اگر T یک تئوری در L و $\mathcal{M}$ یک L-ساخت باشد گوییم $\mathcal{M}$ یک مدل از T است و می‌نویسیم $\mathcal{M} \models T$ اگر برای هر شرط E در T داشته باشیم $\mathcal{M} \models E$.

گردایه تمام مدل‌های T را با $Mod_L(T)$ نمایش می‌دهیم.