دانشگاه بین‌المللی امام خمینی

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش هندسه

عنوان : پیش‌ژئودزیک‌های همگن و مدارها در همسایگی مخروط نوری

استاد راهنما:

دکتر رضا میرزایی

استاد مشاور:

دکتر عبدالرحمن رازانی

تحقیق و نگارش :

زیبا ایزک‌عباس‌پور

زمستان ۱۳۹۱

فهرست مندرجات

چکیده

فرض کنید M یک منیفلد لورنتزی به طور ژئودزیکی کامل، $\phi : G \times M \longrightarrow M$ یک عمل ایزومتری از گروه لی همبند G روی M و $G(x)$ یک مدار نورگون از نقص بعد یک باشد. در این پایان‌نامه با استفاده از مفهوم ژئودزیک‌ها و پیش‌ژئودزیک‌های همگن، خواص هندسی مدارهای نزدیک به مدار نورگون $G(x)$ را بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی : منیفلد لورنتزی، گروه ایزومتری‌ها، مدار، پیش‌ژئودزیک همگن

Abstract

Let M be a lightlike geodesically complete Lorentz manifold, $\phi : G \times M \longrightarrow M$ isometric action of a connected lie group on M and G(x) be a lightlike orbit of condimension one. This thesis uses the concept of homogeneous geodesics and pregeodesics to review geometric properties of orbits neighbouring to lightlike orbit G(x).

keywords: Lorentz manifold, group of isometries, orbit, homogeneous geodesic

مقدمه

یک مشخصه ویژه از هندسه لورنتزی این است که کلاف‌های متعامد مربوط به زیرمنیفلدهای نورگون لزوما کلاف نرمال نیستند. بنابراین تئوری منیفلدهای لورنتزی بسیار پیچیده‌تر از منیفلدهای ریمانی است. اگر عمل ایزومتری $\phi : G \times M \longrightarrow M$ از گروه لی G روی منیفلد لورنتزی (M, g) را در نظر بگیریم این سوال مطرح می‌شود که مدار های مجاور به مدار $G(x)$ چگونه به $G(x)$ وابسته هستند. بررسی این موضوع هنگامی امکان پذیر است که مدار کلاف نرمال $G-$ پایا داشته باشد. مدارهای زمان‌گون یا فضاگون همواره این نوع کلاف نرمال را دارند اما اگر مدار نورگون باشد، فضای متعامد و فضای مماس بر مدار نورگون یک تجزیه از فضای مماس بر منیفلد M را نمی‌دهند. یعنی مدارهای نورگون در حالت کلی دارای کلاف نرمال $G-$ پایا نیستند. با این وجود در بعضی حالت‌ها همسایگی یک مدار نورگون نیز قابل بررسی است. در این پایان‌نامه با استفاده از مفاهیم ژئودزیک‌ها و پیش‌ژئودزیک‌های همگن به بررسی همسایگی مدارهای نورگون از نقص بعد یک می‌پردازیم.

در فصل اول این پایان‌نامه، فضا لورنتزی و همچنین فضای مینکوفسکی که حالت خاصی از این فضا است را معرفی می‌کنیم. همچنین مفاهیم نورگون، فضاگون و زمان‌گون بودن و قضایایی در این مورد که در تشخیص فضاهایی با این مشخصه مفید هستند را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم مفاهیمی مانند گروه لی و جبر لی، عمل گروه بر منیفلد، عمل ایزومتری، پایایی، کلاف ها و... را که در فصل‌های دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند به طور مختصر یادآوری می‌کنیم.

در فصل سوم ژئودزیک‌ها و پیش‌ژئودزیک‌های همگن را معرفی می‌کنیم که به ما کمک خواهند کرد تا در حالاتی خاص به توصیف مدارهایی که در همسایگی مدار نورگون واقع هستند بپردازیم.

در فصل چهارم به بررسی همسایگی مدارهای نورگون با نقص بعد یک در فضای لورنتزی که مولدهایشان پیش ژئودزیک‌های همگن هستند می‌پردازیم و در نهایت به نتیجه زیر دست می‌یابیم:

اگر (M,g) یک منیفلد لورنتزی به طور ژئودزیکی کامل و $\phi : G \times M \longrightarrow M$ یک عمل ایزومتری از گروه لی پیوسته و $G(z)$ مدار نورگونی ازآن از نقص بعد یک باشد که در خصوصیات زیر صدق می‌کند:

الف) مولدهای $G(z)$ پیش ژئودزیک همگن اصلی باشند.

ب) $dimG(z) \geq ۱$ باشد.

ج) یک همسایگی $V \subset M$ از z موجود باشد به قسمی که $G(x)$ برای $x \in V$ دارای نقص بعد بزگتر یا مساوی یک باشد.

آن‌گاه یک همسایگی $W \subset V$ از z موجود است به قسمی که $W - (G(z) \cap M)$ دارای دو مولفه همبندی W' و W'' است و $G(x)$ یک مدار از نقص بعد یک بوده که فضاگون است اگر $x \in W'$ و زمان‌گون است اگر $x \in W''$.

این پایان‌نامه بر مبنای مقاله زیر از J.szenthe به رشته تحریر در آمده است.

Homogeneous pregeodesics and the orbits neighbouring a lightlike one

فصل ۱

منیفلدهای نیمه‌ریمانی و لورنتزی

۱−۱ ضرب اسکالر

تعریف ۱.۱ فرض کنید V یک فضای برداری روی R باشد، یک فرم دوخطی[۱] روی V عبارت است از نگاشت دو خطی $g : V \times V \longrightarrow R$.

g را متقارن[۲] نامند هرگاه $g(v,w) = g(w,v)$

تعریف ۲.۱ فرض کنیم g یک فرم دو خطی متقارن روی V باشد.

الف) g را مثبت (منفی) معین[۳] نامند هرگاه برای هر $V \ni v \neq \circ$ داشته باشیم $g(v,v) > 0$ ($g(v,v) < \circ$).

ب) g ر امثبت (منفی) نیمه‌معین[۴] نامند هرگاه برای هر $V \ni v \neq \circ$ داشته باشیم $g(v,v) \geq \circ$ ($g(v,v) \leq \circ$).

ج) g را ناتبهگون[۵] هرگاه گزاره‌ی زیر صحیح باشد.

$$\forall w \in V \ , \quad g(v,w) = \circ \longrightarrow v = \circ$$

در غیر این صورت g را تبهگون نامند.

تعریف ۳.۱ فرض کنیم g یک فرم دوخطی متقارن روی فضای برداری V و W یک زیرفضای برداری V است چنان‌که $g|_W$ منفی معین است، اگر $dimW = s$ بیشترین مقدار ممکن باشد، s را اندیس[۶] فرم g می‌نامند.

[۱] bilinear form
[۲] symmetric
[۳] positive [negative]definite
[۴] semi definite
[۵] nonodegenerated
[۶] index

تعریف ۴.۱ تابع

$$\begin{cases} q : V \longrightarrow R \\ q(v) = g(v,v) \end{cases}$$

را فرم درجه دوم[۷] وابسته به g می‌نامیم. رابطه زیر نشان می‌دهد که q و g کاملا به وسیله یکدیگر مشخص می‌شوند، یعنی اگر یکی را داشته باشیم دیگری نیز مشخص می‌شود.

$$g(v,w) = \frac{1}{2}[q(v+w) - q(v) - q(w)]$$

فرض کنید $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ پایه‌ای برای V است و قرار دهید $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. ماتریس $[g_{ij}]$ را ماتریس g نسبت به پایه $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ می‌نامیم. چون g متقارن است ماتریس $[g_{ij}]$ نیز متقارن است. با توجه به رابطه زیر، g کاملا توسط ماتریس خود مشخص می‌شود.

$$g(v,w) = \sum_{i,j} g_{ij} v_i w_j$$

که در آن $v = \sum_i v_i e_i \quad , \quad w = \sum_j w_j e_j$.

لم ۱.۱ [۱۴] فرم دوخطی و متقارن g ناتبهگون است اگر وتنها اگر ماتریس g نسبت به یک پایه (لذا نسبت به هر پایه) وارون‌پذیر باشد.

تعریف ۵.۱ اگر g یک فرم دوخطی ناتبهگون بر فضای برداری V باشد، g را یک ضرب اسکالر[۸] روی V نامند.

اگر ضرب اسکالر g مثبت معین باشد g را ضرب درونی[۹] نامند.

[۷] quadratic form
[۸] scalar product
[۹] inner product

تعریف ۶.۱ یک پایه متعامد یکه مجموعه‌ی از بردارهای $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ در T_pM است چنان‌که اگر s اندیس M باشد، آنگاه:

$$g(e_1, e_1) = ... = g(e_s, e_s) = -1\ ,\ g(e_{s+1}, e_{s+1}) = ... = g(e_n, e_n) = 1\ ,\ g(e_i, e_j) >= 0\ ;\ i \neq j$$

مثال ۱.۱ روی $V = R^2$ تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} g : R^2 \times R^2 \longrightarrow R \\ g(v, w) = -v_1 w_1 + v_2 w_2 \end{cases}$$

که در آن $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2)$. به سادگی دیده می‌شود که g متقارن و دوخطی است و ماتریس آن نسبت به پایه استاندارد R^2 یعنی $e_1 = (1, 0)\ ,\ e_2 = (0, 1)$ به صورت زیر است:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لذا (g_{ij}) وارون پذیر است. بنابراین g ناتبهگون است. لذا g یک ضرب اسکالر است.

لم ۲.۱ [۱۴] هر فضای ضرب اسکالر V پایه‌ی متعامد یکه دارد.

۱—۲ منیفلدهای نیمه‌ریمانی

یادآوری ۱.۱ یک تانسور متریک[10] g روی منیفلد M عبارت است از تانسور مرتبه‌ی $(0, 2)$ متقارن و ناتبهگون روی M با اندیس ثابت. یعنی g_p که در هر نقطه‌ی p به صورت $g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow R$

[10] metric tensor

می‌باشد، یک ضرب اسکالر روی T_pM است و اندیس T_pM باتغییر p ثابت می‌ماند.

تعریف ۷.۱ منیفلد هموار M را منیفلد نیمه‌ریمانی[۱۱] نامیم هرگاه مجهز به یک تانسور متریک باشد .

تعریف ۸.۱ اگر $\bar{M}$ یک منیفلد نیمه‌ریمانی باشد، زیرمنیفلد M از $\bar{M}$ نیمه‌ریمانی است هرگاه برای هر $p \in M$ تحدید g روی T_pM ناتبهگون باشد.

در ادامه مطلب به جای علامت $g(v,w)$ که برای ضرب اسکالر بردارهای v، w به کار برده‌ایم، از علامت $< v,w >$ نیز استفاده می‌کنیم.

نکته ۱.۱ اگر M یک منیفلد نیمه‌ریمانی باشد، g یک تانسور روی M است و اگر X و Y دو میدان برداری روی M باشند $g(X,Y)$ تابع عددی است که به نقطه p بستگی دارد. بنابراین $g(X,Y)$ یک تابع روی M است که در هر نقطه $p \in M$ مقدار تابع برابراست با

$$g(X,Y)(p) = g_p(X_p,Y_p) =< X_p,Y_p >$$

و اگر v، w دو بردار باشند $< v,w >$ درصورتی با معنا است که v، w در یک نقطه بر M مماس باشند یعنی $v,w \in T_pM$.

تعریف ۹.۱ اندیس T_pM را که برای همه ی نقاط p، ثابت فرض می‌شود، اندیس M می‌نامیم و معمولا آن را با علامت ν نمایش می‌دهیم. بنابراین $0 \leq \nu \leq \mathrm{n} = \mathrm{dimM}$.

اگر $\nu = 0$ باشد منیفلد M ریمانی است.

[۱۱] semi-riemannian manifold

اگر $\nu = 1$ و $n \geq 2$ باشد، منیفلد M را منیفلد لورنتزی [12] می‌نامیم.

منیفلد M با بعد n و اندیس ν را برای سادگی با علامت M^n_ν نیز نمایش می‌دهیم .

مثال ۲.۱ $M = R^n$ همراه با ضرب درونی بردارها یک منیفلد ریمانی است.

$$< v, w >= v_1 w_1 + v_2 w_2 + ... v_n w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

که در آن $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ و $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$.

مثال ۳.۱ در مثال قبل اگر ضرب را به صورت زیر تعریف کنیم، منیفلد نیمه ریمانی با اندیس ν به دست می آید که آن را با علامت R^n_ν نشان می‌دهیم .

$$< v, w >= -v_1 w_1 - v_2 w_2 - ... - v_\nu w_\nu + v_{\nu+1} w_{\nu+1} + ... v_n w_n = -\sum_{i=1}^{\nu} v_i w_i + \sum_{\nu+1}^{n} v_j w_j$$

R^n_1 را فضای مینکوفسکی [13] می‌نامند.

تعریف ۱۰.۱ بردار v در T_pM را

الف) فضاگون [14] گویند اگر $v = 0$ یا $< v, v >> 0$.

ب) نورگون (پوچ) [15] گویند اگر $v \neq 0$ و $< v, v >= 0$.

ج) زمان‌گون [16] گویند اگر $< v, v >< 0$.

---

[12] lorentz manifold

[13] minkowski space

[14] spacelike

[15] lightlike(null)

[16] timelike

تعریف ۱۱.۱ مجموعه همه‌ی بردارهای نورگون در T_pM را مخروط نوری[۱۷] در $p \in M$ گویند و معمولا با علامت Λ نشان می‌دهند.

مثال ۴.۱ در مثال (۱.۱) دیدیم که روی R^2،

$$\begin{cases} g : R^2 \times R^2 \longrightarrow R \\ g(v,w) = -v_1w_1 + v_2w_2 \end{cases}$$

یک فرم دوخطی ناتبهگون (ضرب اسکالر) است.

فرم درجه دوم وابسته به g به صورت $q(v) = g(v,v) = -v_1^2 + v_2^2$ است و سه حالت برای آن امکان پذیر است:

الف) $q(v) = 0 \leftrightarrow |v_1| = |v_2|(v_1 = \pm v_2)$. شکل هندسی در این حالت نیمساز ربع اول و سوم یا نیمساز ربع دوم و چهارم است. بردارهایی که از مبدا شروع شده و در امتداد این خطوط واقع‌اند بردارهای نورگون هستند.

ب) $q(v) > 0 \leftrightarrow |v_1| < |v_2|$. شکل هندسی در این حالت هذلولی افقی است. بردارهایی که نقطه ابتدای آن‌ها مبدا و انتهای آن روی این هذلولی‌ها واقع‌اند بردارهای فضاگون هستند.

ج) $q(v) < 0 \leftrightarrow |v_1| > |v_2|$. شکل هندسی در این حالت هذلولی قائم است. بردارهایی که نقطه ابتدای آن‌ها مبدا و انتهای آن روی این هذلولی‌ها واقع‌اند بردارهای زمان‌گون هستند.

---

[۱۷] lightcone

مثال ۵.۱ روی $R^{\text{۳}}$،

$$\begin{cases} g: R^{\text{۳}} \times R^{\text{۳}} \longrightarrow R \\ g(v,w) = -v_{\text{۱}}w_{\text{۱}} + v_{\text{۲}}w_{\text{۲}} + v_{\text{۳}}w_{\text{۳}} \end{cases}$$

که در آن $v = (v_{\text{۱}}, v_{\text{۲}}, w_{\text{۳}}), w = (w_{\text{۱}}, w_{\text{۲}}, w_{\text{۳}})$.

فرم درجه دوم وابسته به g در این حالت به صورت $q(v) = g(v,v) = -v_{\text{۱}}^{\text{۲}} + v_{\text{۲}}^{\text{۲}} + v_{\text{۳}}^{\text{۲}}$ است که اگر $q(v) = \text{۰}$ باشد شکل حاصل یک مخروط است که آن را مخروط نوری گویند. بردارهایی که از مبدا شروع شده و انتهای آن داخل مخروط نوری واقع‌اند زمان‌گون، بردارهایی که روی مخروط واقع‌اند نورگون و بردارهایی که انتهای آن خارج از مخروط نوری واقع‌اند فضاگون هستند.

تعریف ۱۲.۱ بردارهای $v, w \in V$ را عمود[۱۸] بر یکدیگر می‌نامیم هرگاه $g(v,w) = \text{۰}$. در این حالت می‌نویسیم: $v \perp w$.

نکته ۲.۱ اگر g مثبت معین باشد، عمود بودن همان معنای آشنای خود را دارد، ولی در غیر این صورت باید دقت شود که با حالت های معمولی (ریمانی) اشتباه نگیریم. مثلا در حالت معمولی (ریمانی)

[۱۸] orthogonal

هیچ برداری بر خودش عمود نیست. در حالی که اگر ضرب مثبت معین نباشد، هر بردار پوچ برخودش عمود است.

تعریف ۱۳.۱ فرض کنیم V یک فضای برداری و W زیرفضای برداری V است دراین صورت

$$W^{\perp} = \{v \in V; g(v,w) = 0 \quad \forall \mathrm{w} \in \mathrm{W}\}$$

لم ۳.۱ [۱۴] فرض کنیم V فضای ضرب اسکالر و W یک زیرفضای V باشد آنگاه

الف) $dimV = dimW + dimW^{\perp}$

ب) $(W^{\perp})^{\perp} = W$

ج) زیرفضای W از فضای ضرب اسکالر V ناتبهگون است اگروتنها اگر $V = W \oplus W^{\perp}$

تعریف ۱۴.۱ یک میدان برداری V روی خمینه‌ی M فضاگون (زمان گون—نورگون) است اگر برای هر $x \in M$ بردار V_x فضاگون (زمان‌گون—نورگون) باشد.

تعریف ۱۵.۱ منحنی α در M را فضاگون (زمان‌گون—نورگون) گویند اگر تمام بردارهای سرعت $\alpha'(s)$ فضاگون (زمان‌گون—نورگون) باشند.

۱—۳ فضای برداری لورنتزی

تعریف **۱۶.۱** یک فضای برداری لورنتزی[۱۹] یک فضای ضرب اسکالر از اندیس یک و بعد بیشتر از ۲ است.

فرض کنید W یک زیر فضای فضای برداری لورنتزی V و g ضرب اسکالر روی V باشد. سه حالت برای W امکان پذیر است:

۱) $g \mid W$ مثبت معین است؛ یعنی W فضای ضرب درونی است.

۲) $g \mid W$ ناتبهگون از اندیس یک است .

۳) $g \mid W$ تبهگون است.

در حالت های ۱و۲و۳ به ترتیب W را فضاگون، زمان‌گون یا نورگون می‌نامند.

لم **۴.۱** اگر z یک بردار زمان‌گون در یک فضای برداری لورنتزی باشد، آنگاه زیرفضای $z^\perp$ فضاگون است و $V = Rz + z^\perp$ یعنی V جمع مستقیم Rz و $z^\perp$ است.

اثبات: زیرفضای Rz ناتبهگون از اندیس یک است. بنابراین طبق لم (۳.۱) $V = Rz + z^\perp$ یک جمع مستقیم است. بنابراین $indV = indRz + indz^\perp$ که ایجاب می‌کند $indz^\perp = 0$. بنابراین $z^\perp$ فضاگون است. ■

برهان لم قبل نشان می‌دهد که به طور کلی زیرفضای W زمان‌گون است اگر وفقط اگر $W^\perp$ فضاگون باشد. از آنجایی که $(W^\perp)^\perp = W$ واژ ه‌های زمان‌گون و فضاگون در لم فوق می‌توانند جابجا شوند.

قضیه زیر شرایطی را که تحت آن یک زیرفضا زمان‌گون است به استثنا حالت بدیهی $\dim W = ۱$ را بیان می‌کند.

لم **۵.۱** فرض کنید W یک زیرفضا در یک فضای لورنتزی باشد و $\dim W \geq ۲$. آنگاه گزاره‌های زیر هم ارزند:

[۱۹] Lorentz vector space